9 Funciones

INTRODUCCIÓN

La representación gráfica de las funciones es la forma más adecuada de entender la relación entre las variables. Estas gráficas se usan en diferentes disciplinas para interpretar y deducir las leyes que rigen determinados fenómenos.

Uno de los objetivos principales de esta unidad es que los alumnos tengan clara la relación entre la representación gráfica de una función y su expresión algebraica, y que sean capaces de realizar ambas.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Función*: correspondencia entre variables que asocia a una de ellas, como máximo, un único valor de la otra.
- *Variable independiente*: puede tomar cualquier valor. *Variable dependiente*: su valor depende del valor que tome la variable independiente.
- *Dominio*: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente. *Recorrido*: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente.
- *Función discontinua*: presenta uno o varios puntos en los que una pequeña variación de la variable independiente produce un salto en los valores de la variable dependiente.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Conocer las expresiones de una función.	• Formas de expresar la relación entre dos variables.	• Obtención de unas expresiones de una función a partir de otras.
2. Calcular el dominio y el recorrido de una función.	• Variable independiente y variable dependiente. • Dominio y recorrido de una función.	• Cálculo del dominio y el recorrido de una función.
3. Distinguir entre funciones continuas y discontinuas.	• Función continua. • Función discontinua.	• Diferenciación de ambos tipos de funciones.
4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos de una gráfica.	• Función creciente y función decreciente. • Máximos y mínimos.	• Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. • Determinación de los máximos y mínimos.
5. Puntos de corte con los ejes.	• Puntos de corte con el eje *Y*. • Puntos de corte con el eje *X*.	• Cálculo de los puntos de corte con ambos ejes.
6. Conocer las funciones definidas por trozos de recta.	• Funciones definidas por trozos de recta.	• Representación de una función definida a trozos.

9 OBJETIVO 1
CONOCER LAS EXPRESIONES DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La relación entre dos variables se puede expresar de diferentes maneras:

- **Mediante un texto:** descripción verbal y/o escrita que expresa la relación entre dos variables. Es lo que se suele llamar enunciado del problema.
- **Mediante tablas:** los valores de la variable independiente y sus valores asociados para la variable dependiente se organizan en forma de tabla.
- **Mediante gráficos:** nos dan una visión cualitativa de la relación que existe entre las variables. Puede ser una representación en unos ejes de coordenadas.
- **Mediante una fórmula o expresión algebraica:** con ella podemos calcular qué valor de la variable dependiente corresponde a un valor de la variable independiente, y viceversa.

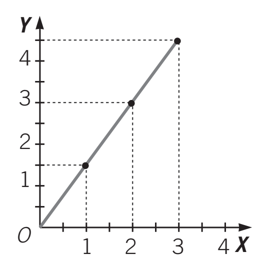
EJEMPLO

El precio de las naranjas es 1,50 €/kg. Vamos a expresarlo de las maneras que acabamos de explicar.

- **Mediante un texto:** el importe que se paga es el producto de 1,50 € por el número de kilogramos adquiridos.
- **Mediante una tabla:** el número de kilogramos es la variable independiente y el importe es la variable dependiente.

KILOGRAMOS DE NARANJAS	1	2	3	…
IMPORTE (€)	1,50	3	4,50	…

- **Mediante un gráfico:** representamos la situación mediante puntos en un sistema de ejes de coordenadas.



- **Mediante una fórmula:** si llamamos P al importe en euros y n al número de kilos de naranjas, la fórmula es: $P = 1,5 \cdot n$.

1 **En un aparcamiento vemos la siguiente tarifa de precios. Obtén la tabla, el gráfico y la fórmula que expresan la relación entre el tiempo (número de horas) que permanece el coche en el aparcamiento y el dinero que se abona.**

TARIFAS

1.ª hora o fracción .... 2 €

Cada hora adicional o fracción .... 1,50 €

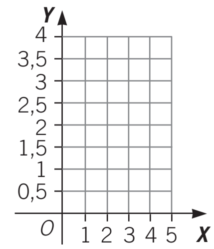
Máximo: 10 € por 24 horas

829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 341

La **gráfica** de una función es la representación del conjunto de puntos que definen esa función.

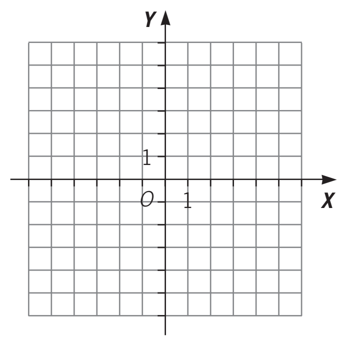
2 **La tabla expresa la relación entre los litros de leche adquiridos y su precio. Obtén la gráfica y la fórmula que representa la relación entre ambas magnitudes.**

LITROS DE LECHE	PRECIO (€)
1	0,75
2	1,50
3	2,25
4	3



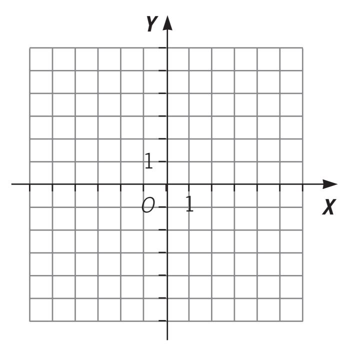
3 **Dada la función mediante la fórmula $y = 3x - 1$, obtén su tabla de valores y su gráfica.**

x	$y = f(x)$
0	
1	
−1	
2	
−2	



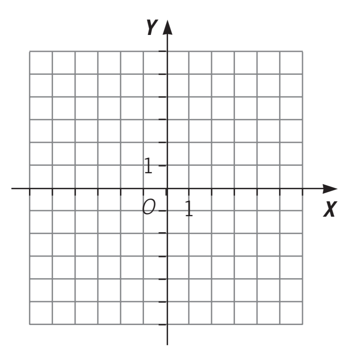
4 **Dada la función mediante la fórmula $y = x^2 - 1$, halla su tabla de valores y su gráfica.**

x	$y = f(x)$
0	
1	
−1	
2	
−2	



5 **Dada la función mediante la fórmula $y = x^3 + 1$, determina su tabla de valores y su gráfica.**

x	$y = f(x)$
0	
1	
−1	
2	
−2	



9 OBJETIVO 2
CALCULAR EL DOMINIO Y EL RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una **función** $y = f(x)$ es una relación entre dos magnitudes o variables, tal que a cada valor de la variable independiente x se le asocia, como máximo, un único valor de la variable dependiente y.

Para indicar que a cada valor de x se le asocia un único valor de y se escribe: $x \rightarrow f(x)$.

Se llama **original** al valor x, e **imagen** al valor y; o también puede ser el valor y la **imagen** y el valor x su **antiimagen**.

El conjunto de valores que puede tomar la variable x se llama **dominio** de la función, y el conjunto de valores que puede tomar la variable y se denomina **recorrido** de la función.

EJEMPLO

Halla el dominio y el recorrido de las funciones.

a) $f(x) = -5x - 2$ En este caso, la variable independiente x puede tomar cualquier valor real, y para cada uno de esos números reales se obtiene un valor real de la variable dependiente y. Así, tenemos que: Im $f = \mathbb{R}$, Dom $f = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ En este caso, la variable independiente x puede tomar cualquier valor real, salvo aquel valor para el que se anula el denominador, ya que no existe la división entre cero. Por tanto, el dominio es: Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$.

El recorrido es todos los números reales, Im $f = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \sqrt{x}$ En este caso, la variable independiente puede tomar cualquier valor real positivo mayor o igual que cero, pues no existe la raíz cuadrada de un número negativo. Así, el dominio es Dom $= \mathbb{R}^+$. El recorrido es el conjunto de los números reales positivos, $R = \mathbb{R}^+$.

1 **Sea la función $f(x)$ que asocia a cada número real su doble más 5 unidades.**

a) Halla su fórmula o su expresión algebraica.

b) Calcula $f(0)$, $f(-1)$ y $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Obtén la antiimagen de $\dfrac{16}{3}$.

d) Determina su dominio y su recorrido.

2 **Dada la relación que asocia a cada número real el inverso de la resta de ese número menos 3:**

a) Determina si es o no una función y, en caso de serlo, obtén su fórmula.

b) Halla $f(0)$, $f(-1)$ y $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Calcula la antiimagen de $\dfrac{1}{4}$.

d) Determina su dominio y su recorrido.

829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 343

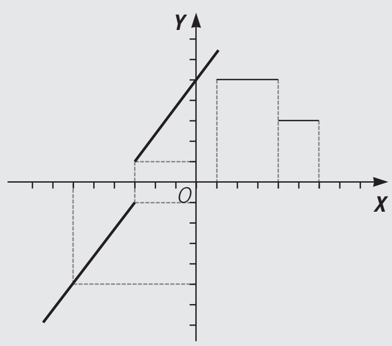
OBJETIVO 3

DISTINGUIR ENTRE FUNCIONES CONTINUAS Y DISCONTINUAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

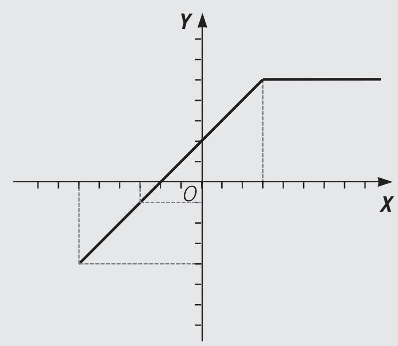
FUNCIÓN NO CONTINUA

Una función no es continua si tiene puntos en los cuales una pequeña variación de la variable independiente produce un salto en los valores de la variable dependiente. Esos puntos se denominan puntos de discontinuidad.



FUNCIÓN CONTINUA

Una función es continua si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo, es decir, no presenta puntos de discontinuidad.



1 **En una tienda de fotocopias tienen la siguiente lista de precios.**

CANTIDAD	PRECIO POR COPIA
Menos de 10	0,06 €
De 11 a 20	0,04 €
De 21 a 50	0,03 €
Más de 50	0,02 €

Representa la función que relaciona el número de fotocopias realizadas y el importe total.

¿Es una función continua?

2 **La tarifa por la bajada de bandera en un taxi es 2 € y por cada 500 metros recorridos hay que abonar 0,50 €.**

a) Construye la tabla de valores y representa la función.
b) ¿Es una función continua o discontinua?
c) Calcula el precio de un recorrido de 3 km.

829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 344

9 OBJETIVO 4
CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA GRÁFICA

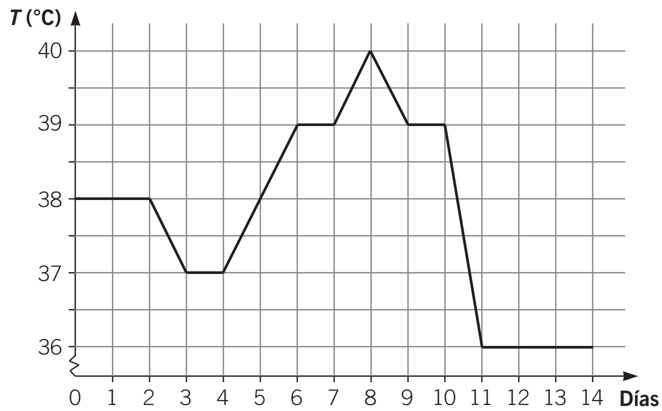
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Dados una función $f(x)$ y dos valores x_1 y x_2, tales que $x_1 < x_2$:

- Si $f(x_1) - f(x_2) > 0$, la función es **creciente** entre x_1 y x_2.
- Si $f(x_1) - f(x_2) < 0$, la función es **decreciente** entre x_1 y x_2.

EJEMPLO

La temperatura de un enfermo evolucionó a lo largo de 14 días según se muestra en el gráfico siguiente.



a) ¿En qué días subió la temperatura?

b) ¿En qué días permaneció constante?

c) ¿Y en qué días bajó?

d) ¿Cuál fue la temperatura máxima alcanzada? ¿En qué día la alcanzó?

e) ¿Cuál fue la temperatura mínima alcanzada? ¿En qué día la alcanzó?

f) Si le dieron una pastilla los días en que la temperatura subió por encima de 38 °C, ¿qué días tomó la pastilla?

a) Vemos que la temperatura subió los días 5.º, 6.º y 8.º. Los intervalos de crecimiento de la función son (4, 6) y (7, 8).

b) Permaneció constante los días 1.º, 2.º, 4.º, 7.º, 10.º, 12.º, 13.º y 14.º.

c) La temperatura descendió los días 3.º, 9.º y 11.º. Los intervalos de decrecimiento de la función son (2, 3), (8, 9) y (10, 11).

d) La temperatura máxima fue de 40 °C, y la alcanzó el día 8.º.

e) La temperatura mínima fue de 36 °C. La alcanzó el undécimo día y la mantuvo hasta el final.

f) Tomó la pastilla los días 6.º, 7.º, 8.º, 9.º, 10.º y 11.º.

1 **Representa una función definida por los siguientes valores.**

$f(x = 0) = 2$	$f(2) = 1$	$f(4) = 3$	$f(6) = 6$	$f(8) = 4$
$f(1) = 2$	$f(3) = 3$	$f(5) = 5$	$f(7) = 4$	$f(9) = 2$

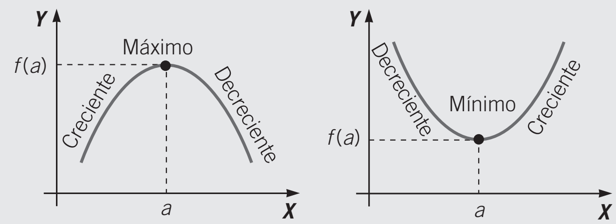
a) ¿En qué tramos la función es creciente?

b) ¿En qué tramos es decreciente?

c) ¿Y en qué tramos es constante?

d) ¿Tiene algún punto de discontinuidad?

- Una función tiene un **máximo** en un punto si a la izquierda de ese punto la función es creciente, y a la derecha, la función es decreciente.
- Una función tiene un **mínimo** en un punto si a la izquierda de ese punto la función es decreciente, y a la derecha, la función es creciente.



2 **Dada la función $y = x^2 - 1$, construye su tabla de valores, represéntala y estudia si es continua o discontinua, su crecimiento y decrecimiento, y si tiene máximos y mínimos.**

3 **En la siguiente tabla aparecen las temperaturas medias registradas durante un año en una localidad.**

MES	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
***T* (°C)**	4	9	11	16	15	22	26	25	22	14	11	7

a) Dibuja una gráfica a partir de la tabla.
b) La función representada, ¿es continua?
c) Di cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) ¿Tiene algún máximo o mínimo?

9 OBJETIVO 5
PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

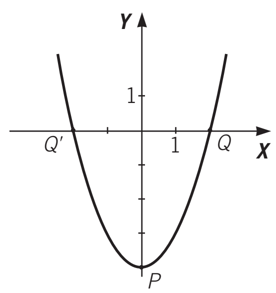
Los puntos en los que la función $y = f(x)$ corta a los ejes se calculan de esta manera.

- **Puntos de corte con el eje *Y*:** haciendo $x = 0$ se obtiene $f(0)$. Los puntos de corte son del tipo $P(0, f(0))$.
- **Puntos de corte con el eje *X*:** haciendo $f(x) = 0$ se obtiene el valor o los valores correspondientes de x. Los puntos de corte son del tipo $Q(x, 0)$.

EJEMPLO

La función $f(x) = x^2 - 4$ tiene estos puntos de corte.

- Con el eje Y, si $x = 0 \rightarrow y = 0 - 4 = -4$.
  Tiene un único punto de corte con el eje Y: $P(0, -4)$.
- Con el eje X, si $y = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$.
  Tiene dos puntos de corte con el eje X: $Q(2, 0)$ y $Q'(-2, 0)$.



1 **Dadas las siguientes funciones, resuelve.**

1.° Construye su tabla de valores y dibuja la función.
2.° Determina su dominio y su recorrido.
3.° Di cuáles son sus intervalos de crecimiento o decrecimiento, y si tienen algún máximo o mínimo.
4.° Halla los puntos de corte con los ejes, si los hubiera.

a) $f(x) = 2x - 1$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{-x + 6}{3}$

829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 347

CONOCER LAS FUNCIONES DEFINIDAS POR TROZOS DE RECTA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

EJEMPLO

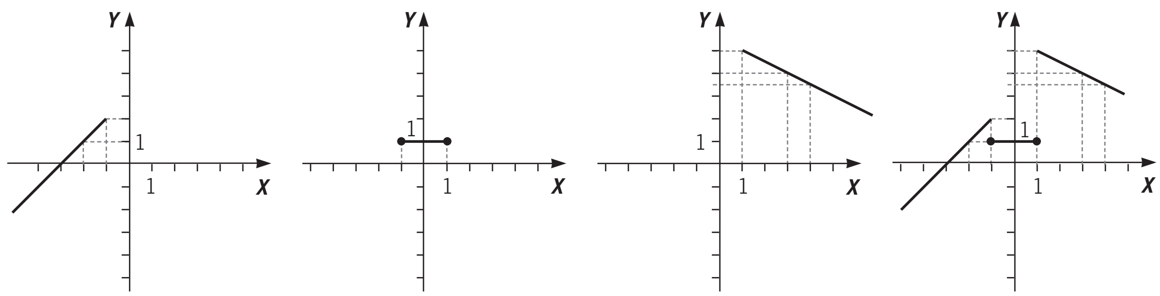
Consideramos la función definida por: $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ -\dfrac{x}{2} + \dfrac{11}{2} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

Esta función tiene tres trozos rectos que determinan el dominio formado por los números reales.
Para cada intervalo construimos su tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	-4	-3	-2
$f(x)$	-1	0	1

x	-1	0	1
$f(x)$	1	1	1

x	2	3	4
$f(x)$	9/2	4	7/2



Señalamos con un punto (•) para indicar que el punto está incluido en dicho trozo de recta.

La función $f(x)$ es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$, es creciente en el primer trozo y decreciente en el tercero.

1 **Representa la función.**

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < -4 \\ -\dfrac{1}{2}x - 3 & \text{si } -4 \le x < 0 \\ \dfrac{2}{5}x - 3 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} & \text{si } 2 \le x < 4 \\ -5 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$

2 **Representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ 0 & \text{si } 2 < x \leq 0 \\ x - 7 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 7x & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ 7x - 2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

10 Funciones polinómicas y racionales

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos de esta unidad es que los alumnos aprendan a hallar la ecuación de una recta dados dos puntos por los que pasa, o su pendiente y un punto, así como distinguir si dos rectas dadas son paralelas o secantes, y si son secantes.

Estudiaremos la función cuadrática más simple, $y = a \cdot x^2$, su representación gráfica, que es una parábola, y sus traslaciones en el plano.

La función cuadrática en su forma general, $y = ax^2 + bx + c$, supone mayores dificultades para los alumnos, por lo que nos limitamos a representarla y a hallar las coordenadas de su vértice mediante la fórmula dada, sin analizar cómo se obtiene dicha expresión.

Tiene especial interés la función de proporcionalidad inversa.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Función de proporcionalidad directa*: $y = mx$.
- *Función afín*: $y = mx + n$.
- m es la pendiente de la recta; si $m > 0$, la recta es creciente, y si $m < 0$, la recta es decreciente.
- *Rectas paralelas*: tienen igual pendiente. *Rectas secantes*: tienen diferente pendiente.
- *Función cuadrática*: $y = ax^2$. Su representación es una parábola.
- Traslación vertical y horizontal de $y = x^2$: $y = (x + h)^2 + k$.
- Representación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$.
- *Función de proporcionalidad inversa*: $y = \frac{1}{x}$.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Conocer la función de proporcionalidad directa.	• Función lineal o de proporcionalidad directa.	• Reconocimiento y representación de funciones de la forma $y = mx$.
2. Conocer la función afín.	• Función afín. Representación gráfica.	• Representación de funciones de la forma $y = mx + n$.
3. Obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.	• Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.	• Cálculo de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, o de la recta de la que conocemos su pendiente y un punto por el que pasa.
4. Distinguir entre rectas paralelas y rectas secantes.	• Posición relativa de dos rectas.	• Determinación de si dos rectas son paralelas o secantes. • Cálculo del punto de corte de dos rectas secantes.
5. Conocer la función cuadrática $y = ax^2$.	• Parábolas de ecuación $y = ax^2$.	• Representación de parábolas de ecuación $y = ax^2$.
6. Efectuar traslaciones de la función $y = x^2$.	• Traslaciones verticales de $y = x^2$. • Traslaciones horizontales de $y = x^2$. • Traslaciones verticales y horizontales de $y = x^2$.	• Representación de parábolas de ecuación $y = ax^2 + k$. • Representación de parábolas de ecuación $y = (x + h)^2$. • Representación de parábolas de ecuación $y = (x + h)^2 + k$.
7. Representar la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$.	• Gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$.	• Representación de parábolas de ecuación $y = ax^2 + bx + c$.
8. Conocer la función de proporcionalidad inversa.	• Función de proporcionalidad inversa.	• Representación de hipérbolas de ecuación $y = \frac{1}{x}$.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

10 OBJETIVO 1
CONOCER LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una **función de proporcionalidad directa**, o **función lineal**, se expresa de la forma: $\boldsymbol{y = m \cdot x}$, siendo m un número cualquiera.

La **representación gráfica** de estas funciones es una **recta que pasa por el origen de coordenadas**.

La inclinación de esta recta respecto al eje de abscisas viene representada por el número m, que recibe el nombre de **pendiente**. Cuanto mayor sea m, más inclinada estará la recta respecto del eje X, es decir, mayor será el ángulo que esta recta forme con la horizontal.

Cuando entre dos magnitudes existe una **relación de proporcionalidad directa**, la función que representa dicha relación es de tipo lineal.

EJEMPLO

Determina, a partir de los pares de valores de la tabla, si la relación entre las magnitudes que aparecen en ella es o no de proporcionalidad.

ENTRADAS DE CINE	1	2	3	4	5	6
IMPORTE (€)	4,50	9	13,50	18	22,50	27

El número de entradas y el importe que se abona son magnitudes directamente proporcionales, ya que si multiplicamos el número de entradas, multiplicaremos por el mismo número el dinero que hay que abonar.

La constante de proporcionalidad es:

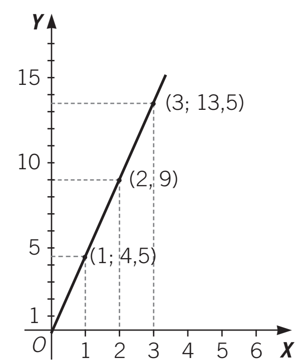
$$m = \frac{4,5}{1} = \frac{9}{2} = \frac{13,5}{3} = \frac{18}{4} = \ldots = 4,5$$

La expresión algebraica de la función que relaciona ambas magnitudes es:

$$y = m \cdot x \rightarrow y = 4,5 \cdot x$$

donde x es el número de entradas e y es el importe que se abona.

La representación gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene de pendiente $m = 4,5$. Para representarla hay que señalar en un sistema de ejes de coordenadas los puntos: (1; 4,5), (2, 9), (3; 13,5), (4, 18)…



1 **Un atleta ha recorrido las distancias que se muestran en la tabla en los tiempos que se indican.**

TIEMPO (min)	1	2	3	4
RECORRIDO (km)	0,2	1	1,6	2,4

Determina, a partir de estos pares de valores, si la relación entre ambas magnitudes es o no de proporcionalidad y, en caso de serlo, deduce la expresión algebraica de la función que las relaciona y represéntala.

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 351

CONOCER LA FUNCIÓN AFÍN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una **función afín** se expresa de la forma: $\mathbf{y = m \cdot x + n}$, siendo m y n dos números cualesquiera.

- m es la **pendiente** de la recta. Si $\mathbf{m > 0}$, la recta es **creciente**, y si $\mathbf{m < 0}$, la recta es **decreciente**.
- n es la ordenada en el origen.

La representación gráfica de estas funciones es una **recta que no pasa por el origen de coordenadas**, sino que pasa por el punto $(0, n)$.

Las funciones de proporcionalidad directa, o funciones lineales, son un caso particular de las funciones afines, cuando $n = 0$.

EJEMPLO

Dadas las siguientes funciones: $\mathbf{y = 2x + 2}$ $\qquad$ $\mathbf{y = -x + 2}$

a) Determina su pendiente y su ordenada en el origen.

b) ¿Cómo serán las rectas, crecientes o decrecientes?

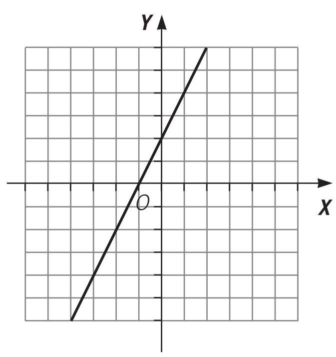
c) Construye su tabla de valores y represéntala.

a) $y = 2x + 2$; pendiente: $m_1 = 2$, $n_1 = 2$

b) Al ser la pendiente positiva: $m_1 = 2 > 0$, la primera recta es creciente.

c)

x	y
0	2
1	4
–1	0
2	6

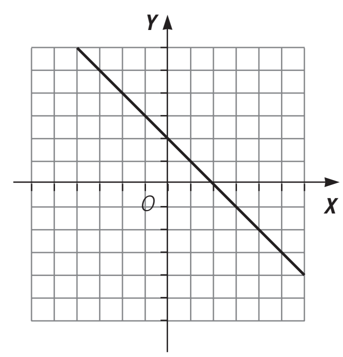


a) $y = -x + 2$, pendiente: $m_2 = -1$, $n_2 = 2$

b) Al ser la pendiente negativa: $m_2 = -1 < 0$, la segunda recta es decreciente.

c)

x	y
0	2
1	1
–1	3
2	0



1 **Clasifica las siguientes funciones en lineales o afines. Escribe, en cada caso, el valor de la pendiente y de la ordenada en el origen. Construye sus tablas de valores y represéntalas.**

a) $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$

b) $-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

10 OBJETIVO 3
OBTENER LA ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para representar una recta hay que conocer dos puntos por los que pasa. Así, para hallar la ecuación de la recta $y = mx + n$ que pasa por dos puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:

1.° **Calculamos el valor de la pendiente**: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2.° Sustituimos las coordenadas de uno de los puntos en la ecuación general de la recta $y = mx + n$. y **obtenemos el valor de la ordenada en el origen, *n***:

$$y_1 = mx_1 + n \rightarrow n = y_1 - mx_1$$
$$y_2 = mx_2 + n \rightarrow n = y_2 - mx_2$$

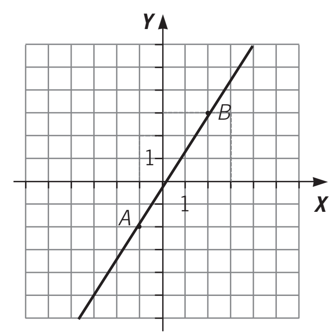
3.° **Sustituimos los valores obtenidos** para la pendiente (m) y la ordenada en el origen (n) en la ecuación general de la recta.

EJEMPLO

Halla la ecuación general de la recta que pasa por los puntos *A*(−1, −2) y *B*(2, 3).

1.° Calculamos el valor de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-2)}{2-(-1)} = \frac{5}{3}$$



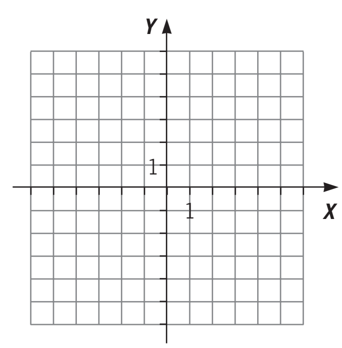
2.° Obtenemos el valor de la ordenada en el origen, sustituyendo, por ejemplo, el punto A:

$$y = mx + n \rightarrow -2 = \frac{5}{3} \cdot (-1) + n$$

$$n = -2 + \frac{5}{3} = \frac{-6+5}{3} = \frac{-1}{3}$$

3.° Sustituimos los valores obtenidos en la ecuación general: $y = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{3}$.

1 **Escribe y representa la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(0, 4) y *B*(3, 1).**



2 **Obtén la ecuación de la recta que tiene por pendiente $m = 2$ y que pasa por el punto (0, 3).**

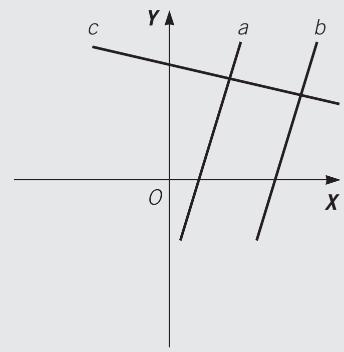
3 **Halla la ecuación de la recta que tiene por ordenada en el origen $n = -1$ y que pasa por el punto (4, 5).**

OBJETIVO 4

DISTINGUIR ENTRE RECTAS PARALELAS Y RECTAS SECANTES

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- **Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.**
  Por ejemplo, las rectas *a* y *b* del dibujo son paralelas.
- **Las rectas secantes no tienen la misma pendiente.**
  Por ejemplo, las rectas *a* y *c*, o *b* y *c* son secantes.
- **Las rectas secantes se cortan en un punto.**
  Para hallar ese punto, resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las dos rectas.



EJEMPLO

Determina si las siguientes parejas de rectas son o no paralelas. En caso de ser secantes, halla el punto de corte.

a) $\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{y = x + 1}\\ \boldsymbol{y = -2x - 1}\end{array}\right\}\begin{array}{l} m = 1\\ m = -2\end{array}$ Sus pendientes son distintas; por tanto, son rectas secantes.

El punto en el que se cortan verificará ambas ecuaciones, e igualando:

$$x + 1 = -2x - 1 \rightarrow 3x = -2 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

Sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones, obtenemos el valor de la ordenada común, *y*:

$$y = -\frac{2}{3} + 1 \rightarrow y = \frac{1}{3}$$

El punto de corte es $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

b) $\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{y = 3x + 7}\\ \boldsymbol{y = 3x - 5}\end{array}\right\}\begin{array}{l} m = 3\\ m = 3\end{array}$ Sus pendientes son iguales; por tanto, son rectas paralelas y no tienen ningún punto en común.

1 **Halla el punto de corte de los siguientes pares de rectas.**

a) $y = -3x - 5$ e $y = -x - 1$

c) $y = 2x - 1$ e $y = x + 2$

b) $y = \frac{1}{2}x + 1$ e $y = -\frac{1}{2}x - 1$

d) $y = \frac{1}{3}x - 3$ e $y = \frac{1}{3}x + 1$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

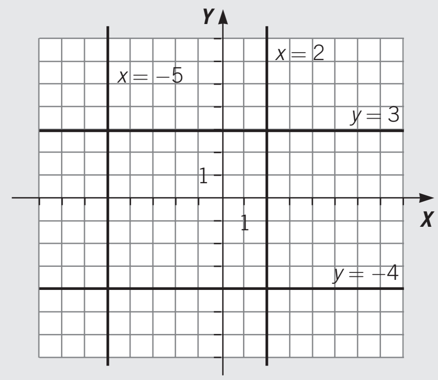
10

El eje horizontal o eje X es la recta de ecuación $y = 0$.

Las **rectas paralelas al eje *X*** tienen ecuaciones de la forma $y =$ constante.

El **eje vertical o eje *Y*** es la recta de ecuación $x = 0$.

Las rectas paralelas al eje Y tienen ecuaciones de la forma $x =$ constante.



EJEMPLO

Halla la ecuación de la recta paralela a $y = 3x - 1$ y que pasa por el punto (1, 2).

Por ser paralelas, las rectas tendrán la misma pendiente, $m = 3$. Por tanto, su ecuación es $y = 3x + n$.

Como la recta pasa por el punto (1, 2), las coordenadas de este punto deberán cumplir la ecuación de dicha recta:

$$y = 3x + n \rightarrow 2 = 3 \cdot 1 + n \rightarrow n = -1$$

La recta es $y = 3x - 1$.

2 **Determina la ecuación de la recta paralela a $y = \frac{1}{2}x$, y que pasa por el origen de coordenadas.**

3 **Obtén la ecuación de la recta paralela a $y = 2x - 3$, y que pasa por el punto donde se cortan las rectas $\left.\begin{array}{r} y = 5x + 1 \\ y = -x - 1 \end{array}\right\}$.**

4 **Halla la ecuación de la recta paralela a $y = x - \frac{1}{2}$, y que pasa por el punto donde se cortan las rectas $\left.\begin{array}{r} y = x + 7 \\ y = -5x + 1 \end{array}\right\}$.**

829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 355

CONOCER LA FUNCIÓN CUADRÁTICA $y = ax^2$

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

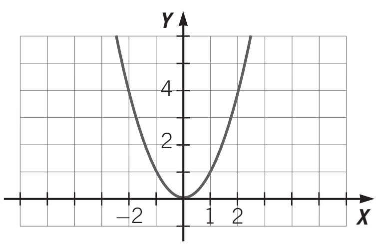
- Cuando $a > 0$, la gráfica de la función $y = ax^2$ es una parábola abierta hacia arriba (en forma de vaso). Cuando $a < 0$, es una parábola abierta hacia abajo (en forma de campana).
- En las parábolas de ecuación $y = ax^2$, el eje Y es su eje de simetría.

EJEMPLO

Representa las siguientes funciones.

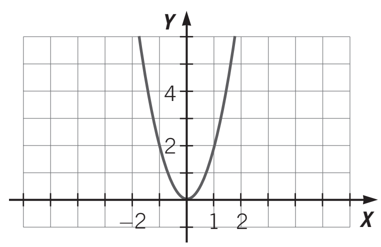
a) $y = x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



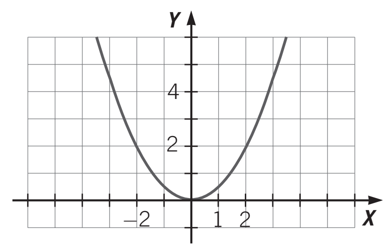
b) $y = 2x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	8	2	0	2	8



c) $y = \frac{1}{2}x^2$

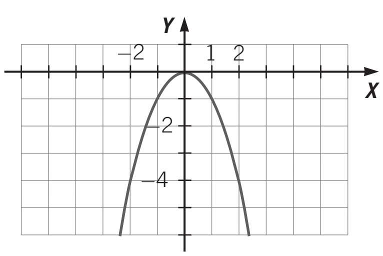
x	−2	−1	0	1	2
y	2	1/2	0	1/2	2



Las tres parábolas tienen forma de vaso. Vemos que la parábola $y = 2x^2$ es más estrecha que la parábola $y = x^2$. En cambio, la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ es más ancha que la parábola $y = x^2$.

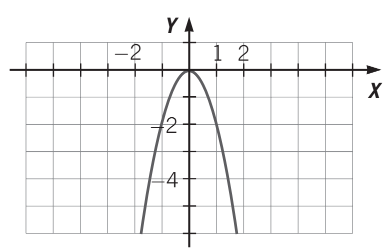
d) $y = -x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−1	0	−1	−4



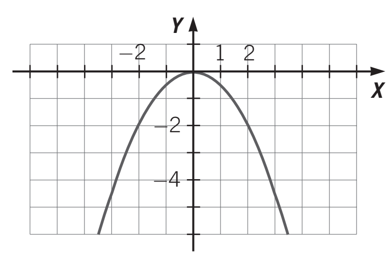
e) $y = -2x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−2	0	−2	−8



f) $y = -\frac{1}{2}x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−2	−1/2	0	−1/2	−2



Estas tres parábolas son iguales que las anteriores, pero están abiertas hacia abajo, y tienen forma de campana.

1 **Sin representarlas, di cuáles de las siguientes parábolas tienen forma de vaso o de campana y cuáles son más anchas o estrechas que $y = x^2$.**

a) $y = \frac{1}{4}x^2$ b) $y = -\frac{1}{3}x^2$ c) $y = 5x^2$ d) $y = -7x^2$ e) $y = \frac{5}{3}x^2$ f) $y = -9x^2$

829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 356

10 OBJETIVO 6
EFECTUAR TRASLACIONES DE LA FUNCIÓN $y = x^2$

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

TRASLACIONES VERTICALES

La gráfica de $y = x^2 + k$ se obtiene trasladando verticalmente k unidades la gráfica de $y = x^2$.

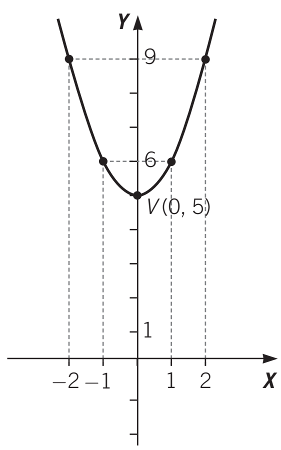
- Si $k > 0$, la traslación vertical es hacia arriba.
- Si $k < 0$, la traslación vertical es hacia abajo.

EJEMPLO

Representa las siguientes funciones.

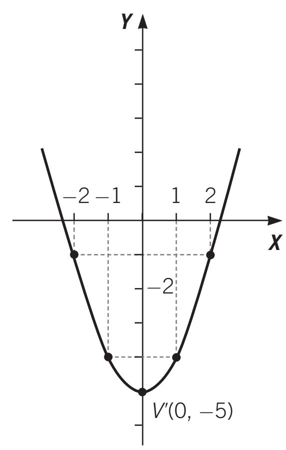
a) $y = x^2 + 5$

x	−2	−1	0	1	2
y	9	6	5	6	9



b) $y = x^2 - 5$

x	−2	−1	0	1	2
y	−1	−4	−5	−4	−1



La parábola $y = x^2 + 5$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 5 unidades hacia arriba, mientras que la parábola $y = x^2 - 5$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 5 unidades hacia abajo.

El vértice de $y = x^2 + 5$ está en $V(0, 5)$, mientras que el vértice de $y = x^2 - 5$ está en $V'(0, -5)$. Así, el eje de simetría es igual en ambas gráficas: el eje Y, y pasa por el vértice de cada una de ellas.

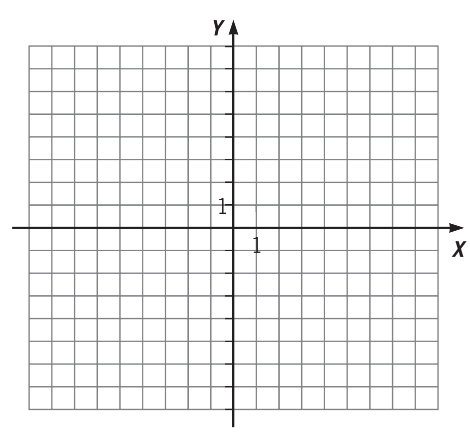
1 **Representa sobre el mismo sistema de ejes, con colores diferentes, las siguientes parábolas.**

a) $y = x^2 - 1$

b) $y = x^2 + 1$

c) $y = x^2 + 3$

Halla las coordenadas de sus vértices y de sus puntos de corte con el eje X, igualando $y = 0$.



 MATERIAL FOTOCOPIABLE © SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 357

TRASLACIONES HORIZONTALES

La gráfica de $y = (x + h)^2$ se obtiene trasladando horizontalmente h unidades la gráfica de $y = x^2$.

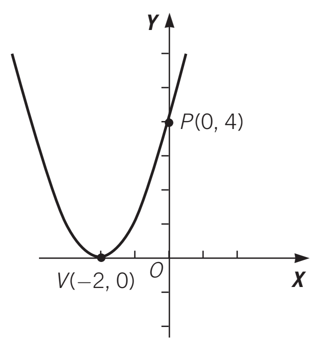
- Si $h > 0$, la traslación horizontal es hacia la izquierda.
- Si $h < 0$, la traslación horizontal es hacia la derecha.

EJEMPLO

Representa las funciones.

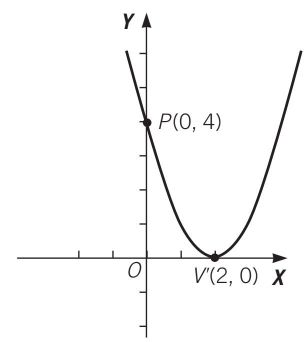
a) $\boldsymbol{y = (x + 2)^2}$

x	−2	−1	0	1	2
y	0	1	4	9	16



b) $\boldsymbol{y = (x - 2)^2}$

x	−2	−1	0	1	2
y	16	9	4	1	0



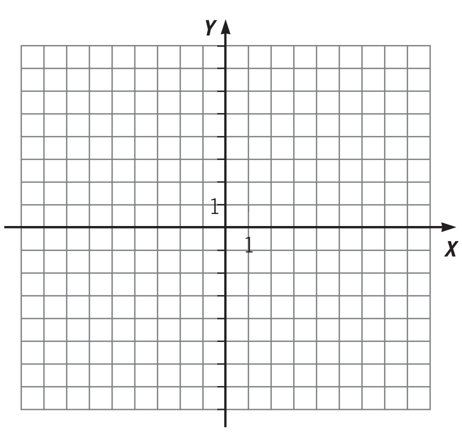
La parábola $y = (x + 2)^2$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 2 unidades hacia la izquierda, mientras que la parábola $y = (x - 2)^2$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 2 unidades hacia la derecha.

El vértice de $y = (x + 2)^2$ está en $V(-2, 0)$, mientras que el vértice de $y = (x - 2)^2$ está en $V'(2, 0)$. Así, el eje de simetría de la parábola $y = (x + 2)^2$ es la recta $x = -2$, mientras que el eje de $y = (x - 2)^2$ es la recta $x = 2$, que es paralela al eje Y.

2 **Representa sobre el mismo sistema de ejes, y con colores diferentes, las siguientes parábolas.**

a) $y = (x - 1)^2$ b) $y = (x + 1)^2$ c) $y = x^2 + 3$

Halla las coordenadas de sus vértices y de sus puntos de corte con el eje *Y*, igualando $\boldsymbol{x = 0}$.



TRASLACIONES VERTICALES Y HORIZONTALES

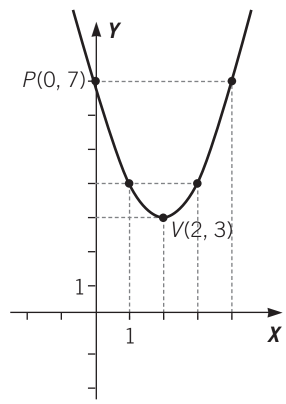
La gráfica de $y = (x - h)^2 + k$ es una parábola como la gráfica de $y = x^2$, pero con el vértice en el punto (h, k).

EJEMPLO

Representa la función $y = (x - 2)^2 + 3$.

Obtenemos su tabla de valores:

x	0	1	2	3	4
y	7	4	3	4	7



Si trasladamos la parábola $y = x^2$ en 2 unidades a la derecha se obtiene la parábola $y = (x - 2)^2$. Si a continuación trasladamos esta parábola en 3 unidades hacia arriba, obtenemos la parábola de ecuación $y = (x - 2)^2 + 3$.

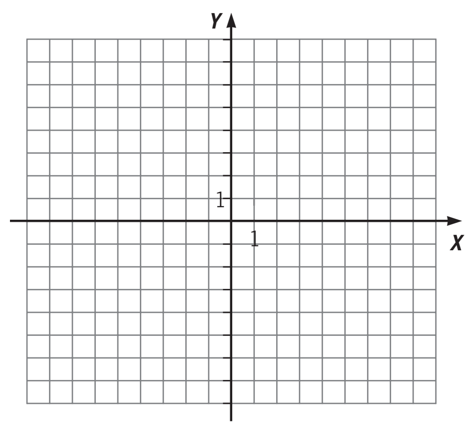
El vértice de $y = (x - 2)^2 + 3$ está en el punto $(h, k) = (2, 3)$.

Su eje de simetría es la recta $x = 2$, que es paralela al eje Y.

3 **A partir de la parábola $y = x^2$, representa las siguientes parábolas sobre el mismo sistema de ejes, con colores diferentes, explicando cómo lo haces.**

a) $y = (x + 2)^2 - 3$ b) $y = (x + 1)^2 + 3$ c) $y = (x - 3)^2 - 1$

Obtén las coordenadas de sus vértices y de su punto de corte con el eje Y, igualando $x = 0$.



829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 359

REPRESENTAR LA FUNCIÓN CUADRÁTICA $y = ax^2 + bx + c$

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para representar una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ se siguen estos pasos.

1.º Se calculan los puntos de corte con el eje X. Después, se halla el punto de corte con el eje Y, si lo hubiera.

2.º Se halla el vértice, que tiene por abscisa $x = -\frac{b}{2a}$, y que es el valor que debe coincidir con la abscisa del punto medio entre los dos puntos de corte con el eje X.

EJEMPLO

Representa la función $y = 2x^2 - 9x - 18$.

1.º Calculamos los puntos de corte con el eje X, igualando $y = 0$.

$$2x^2 - 9x - 18 = 0 \rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm 15}{4} = \begin{cases} 6 \\ -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje X son $P(6, 0)$ y $Q\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

Para hallar el punto de corte con el eje Y hacemos $x = 0 \rightarrow y = -18 \rightarrow R(0, -18)$.

2.º El vértice tendrá por abscisa el valor $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-9}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4}$.

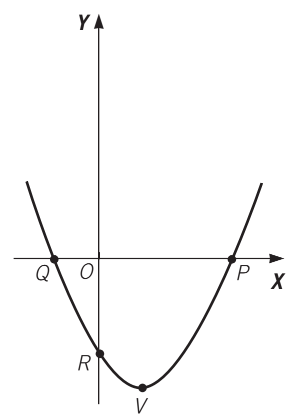
El valor de la ordenada y_V lo obtenemos sustituyendo el valor de x_V en la ecuación de la parábola:

$$y_V = 2x_V^2 - 9x_V - 18 = 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 - 9 \cdot \frac{9}{4} - 18 =$$

$$= \frac{81}{8} - \frac{81}{4} - 18 = \frac{81 - 162 - 144}{8} = -\frac{225}{8}$$

Así, el vértice es el punto $V\left(\frac{9}{4}, -\frac{225}{8}\right)$.

El eje de simetría de la parábola $y = 2x^2 - 9x - 18$ es la recta $x = \frac{9}{4}$.



1 **Representa las siguientes parábolas.**

a) $y = -x^2 + 6x - 8$

b) $y = x^2 - 4x - 5$

10 OBJETIVO 8
CONOCER LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Una función de proporcionalidad inversa se expresa de la siguiente forma.

$$x \cdot y = k \rightarrow y = \frac{k}{x}, \text{ siendo } k \neq 0.$$

- La representación gráfica de estas funciones es una hipérbola.
- Cuando entre dos magnitudes existe una relación de proporcionalidad inversa, la función que representa dicha relación es del tipo anterior.

EJEMPLO

Un coche que circula a una velocidad constante de 90 km/h tarda 2 horas en recorrer una distancia. ¿Cuánto habría tardado si hubiera ido a 120 km/h? ¿Y si hubiese circulado a 60 km/h?

Las dos variables relacionadas son la velocidad y el tiempo, ya que el espacio recorrido no varía. Construimos la siguiente tabla de valores entre ambas variables.

VELOCIDAD (km/h)	30	60	90	120
TIEMPO (h)	6	3	2	1,5

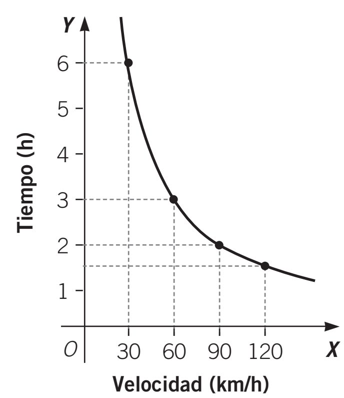
- Vemos que al duplicar la velocidad, el tiempo se reduce a la mitad; por tanto, ambas magnitudes, velocidad y tiempo, son inversamente proporcionales.
- La relación que cumplen ambas magnitudes es:

$$30 \cdot 6 = 60 \cdot 3 = 90 \cdot 2 = 120 \cdot 1{,}5 = 180 = k$$

- La expresión algebraica de la función que relaciona la velocidad y el tiempo es:

$$v \cdot t = k \rightarrow v \cdot t = 180 \rightarrow t = \frac{180}{v}$$

La representación gráfica de esta función es la rama del primer cuadrante de una hipérbola.



1 **La siguiente tabla de valores corresponde a una función de proporcionalidad inversa.**

a) Completa la tabla.
b) Escribe la expresión algebraica de la función.
c) Representa la función.

x	1	2	3	4	5	6
y			7/3			

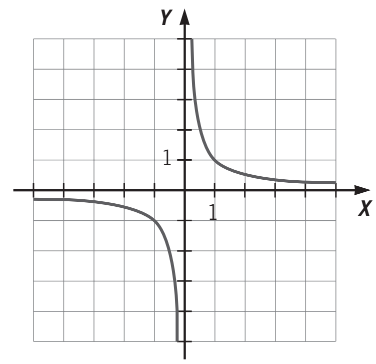
EJEMPLO

Representa la función de proporcionalidad inversa $y = \frac{1}{x}$.

En este caso, la variable x también puede tomar valores negativos. Construimos la tabla de valores.

x	1	−1	2	−2	3	−3
y	1	−1	1/2	−1/2	1/3	−1/3

Observa que x no puede tomar el valor 0, ya que no existe $\frac{1}{0}$.



2 **Representa la función de proporcionalidad inversa $y = -\frac{1}{x}$, y compárala con la función del ejemplo anterior.**

Las gráficas de $y = \frac{1}{x}$ e $y = -\frac{1}{x}$ son hipérbolas, simétricas respecto al eje X.

La gráfica de la función $y = \frac{1}{x} + k$, siendo k un valor constante, se obtiene trasladando verticalmente la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ hacia arriba (si $k > 0$) o hacia abajo (si $k < 0$) tantas unidades como sea el valor de k.

3 **Representa las siguientes hipérbolas.**

a) $y = \frac{1}{x} + 3$

b) $y = \frac{1}{x} - 3$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

4 **Representa gráficamente las siguientes funciones.**

a) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} -4x & \text{si } x \leq 1 \\ -3x^2 & \text{si } 1 < x \leq 5 \\ \dfrac{1}{x} + 1 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

c) $g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x^2 + x & \text{si } 0 < x \leq 5 \\ \dfrac{1}{x} + 2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■