Proyecto MaTEX

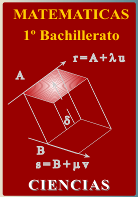
Complejos

Fco Javier González Ortiz

Directorio

D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTEX

COMPLEJOS

Tabla de Contenido

1. Introducción

Vamos a clasificar los números como soluciones de las ecuaciones. Observa las siguientes ecuaciones:

- $x + 3 = 8 \Rightarrow x = 5$ tiene solución en los naturales $\mathcal{N}$
- $x + 3 = 1 \Rightarrow x = -2$ tiene solución en los enteros $\mathcal{Z}$
- $2x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$ tiene solución en los racionales $\mathcal{Q}$
- $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ tiene solución en los reales $\mathcal{R}$

Se tiene así que el sistema de números se ha ido ampliando

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$$

Ahora observa la ecuación

$$x^2 = -1$$

que como sabes no hay ningún número cuyo cuadrado sea negativo. En el siglo XVI “inventaron” un número que cumple la ecuación anterior y llamaron la *unidad imaginaria*, **i**.

Es decir definimos la unidad imaginaria **i** como un número (no real) que cumple

$$\boxed{\mathbf{i}^2 = -1} \tag{1}$$

1.1. Las potencias de i

Únicamente hay cuatro potencias distintas de $\mathbf{i}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \mathbf{i} & \qquad \mathbf{i}^5 &= \mathbf{i}^4 \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \\
\mathbf{i}^2 &= -1 & \qquad \mathbf{i}^6 &= \mathbf{i}^4 \cdot \mathbf{i}^2 = -1 \\
\mathbf{i}^3 &= \mathbf{i}^2 \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{i} & \qquad \mathbf{i}^7 &= \mathbf{i}^4 \cdot \mathbf{i}^3 = -\mathbf{i} \\
\mathbf{i}^4 &= \mathbf{i}^2 \cdot \mathbf{i}^2 = (-1)(-1) = 1 & \qquad \mathbf{i}^8 &= \mathbf{i}^4 \cdot \mathbf{i}^4 = 1
\end{aligned}
$$

Si seguimos calculando potencias sólo aparecen

$$\{1, -1, i, -i\}$$

Así por ejemplo

$$i^{47} = i^{4\cdot 11+3} = (i^4)^{11} \cdot i^3 = i^3 = -i$$

Ejercicio 1. Efectúa las siguientes potencias de i:

a) i^{34} *b*) i^{64} *c*) i^{81} *d*) i^{107}

Además, ahora podemos expresar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$x^2 + 9 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}\sqrt{-1} = \pm 3\,\mathbf{i}$$
$$x^2 + 16 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16}\sqrt{-1} = \pm 4\,\mathbf{i}$$

Ejemplo 1.1. Resuelve la ecuación $x^2 + 8x + 25 = 0$

Solución: Resolvemos la ecuación sustituyendo $\sqrt{-1}$ por i.

$$\begin{aligned} x =& \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 25}}{2} \\ =& \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} \\ =& \frac{-8 \pm 6\sqrt{-1}}{2} \\ =& -4 \pm 3\,\mathbf{i} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.2. Comprueba que $-4 + 3\,\mathbf{i}$ verifica $x^2 + 8x + 25 = 0$

Solución: Sustituimos y operamos de forma natural

$$\begin{aligned} (-4 + 3\,\mathbf{i})^2 + 8\,(-4 + 3\,\mathbf{i}) + 25 =& 16 - 24\,\mathbf{i} + 9\,\mathbf{i}^2 \\ & - 32 + 24\mathbf{i} + 25 \\ =& 9 + 9\mathbf{i}^2 \\ =& 9 + 9(-1) = 0 \end{aligned}$$

□

Estos nuevos “números” de la forma

$$a + b\,\mathbf{i}$$

los llamamos números complejos en forma binómica y decimos que a es la parte real y b la parte imaginaria. Un modelo para comprenderlos consiste en representarlos en el plano

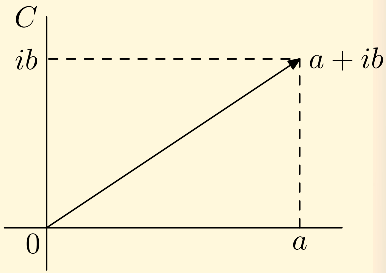
2. Forma binómica de un número complejo

2.1. Representación gráfica

Un complejo en forma binómica

$$a + b\,i$$

se representa mediante un vector con origen el punto $O(0, 0)$ y extremo el punto de coordenadas $A(a, b)$. Al punto $A(a, b)$ se le llama afijo del complejo



Ejercicio 2. Representar los siguientes complejos en el plano:

a) $3 + i$ *b*) $2\,i$ *c*) $-2 + 3\,i$ *d*) -2

e) $-2 - i$ *f*) $2 - 2\,i$ *g*) 2

2.2. Operaciones en forma binómica

- **Suma en forma binómica**

Para sumar números complejos en forma binómica se suman la parte real y la parte imaginaria.

Ejemplo 2.1. Hallar la suma $(5+\ i)+(1-3\,i)$:

Solución:

$$\begin{aligned}(5+\ i)+(1-3\,i) =&(5+1)+(1-3)\,i\\ =&6-2\,i\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2. Efectuar la suma $3\cdot(5+\ i)+2\cdot(1-3\,i)$:

Solución:

$$\begin{aligned}3\cdot(5+\ i)+2\cdot(1-3\,i) =&(15+3\,i)+(2-6\,i)\\ =&(15+2)+(3-6)\,i\\ =&17-3\,i\end{aligned}$$

□

Ejercicio 3. Efectúa las operaciones:

a) $(2+5\,i)+(3-2\,i)$ *b*) $(2-2\,i)+(2+2\,i)$

c) $(5+\ i)+2\,(1-3\,i)$ *d*) $(2-4\,i)-(3-3\,i)$

• Producto en forma binómica

Para multiplicar números complejos en forma binómica se multiplican de forma algebraica natural, teniendo en cuenta que el termino $i^2 = -1$.

Ejemplo 2.3. Hallar el producto $(5+\,i)\cdot(1-3\,i)$:

Solución:

$$\begin{aligned}(5+\,i)\cdot(1-3\,i) =& 5-15\,i+i-3\,i^2\\ =& 5-15\,i+i+3\\ =& 8-14\,i\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.4. Hallar el producto $(2+\,i)\cdot(1-\,i)$:

Solución:

$$(2+\,i)\cdot(1-\,i) = 3-\,i$$

□

Ejercicio 4. Efectúa las operaciones:

a) $(2+5\,i)\cdot(3-2\,i)$

b) $(2-2\,i)\cdot(2+2\,i)$

c) $(5+\,i)\cdot(1-3\,i)$

d) $(2-4\,i)\cdot(3-3\,i)$

e) $(2+2\,i)\cdot(1-5\,i)\cdot(2+3\,i)$

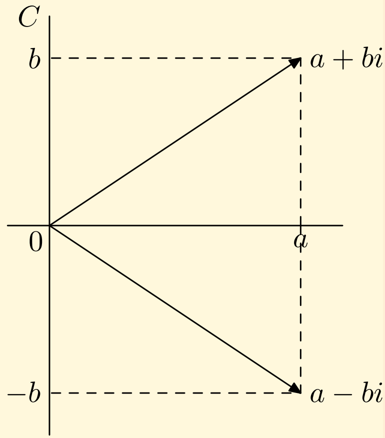
f) $(1+5\,i)\cdot(-\,i)-(4+3\,i)\cdot(4-3\,i)$

Definición 2.1

Llamamos conjugado de un número complejo $z = a + b\,i$ al complejo

$$\bar{z} = a - b\,i$$

es decir sus partes imaginarias son opuestas. Al conjugado de z lo vamos a representar por $\bar{z}$.



Ejercicio 5. Demostrar que la suma de dos números complejos conjugados es un número real:

Ejercicio 6. Demostrar que el producto de dos números complejos conjugados es un número real:

- **Cociente en forma binómica**

Para dividir números complejos en forma binómica se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador.

Ejemplo 2.5. Hallar el cociente $\dfrac{3-i}{3+i}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{3-i}{3+i} &= \frac{3-i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i} = \frac{9-3\,i-3\imath+i^2}{9-i^2}\\ &= \frac{8-6\,i}{10} = \frac{8}{10}-\frac{6}{10}\,i\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 2.6. Hallar el cociente $\dfrac{2+i}{i}$.

Solución:

$$\frac{2+i}{i} = \frac{2+i}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = 1-2\,i$$

$\square$

Ejercicio 7. Hallar los cocientes:

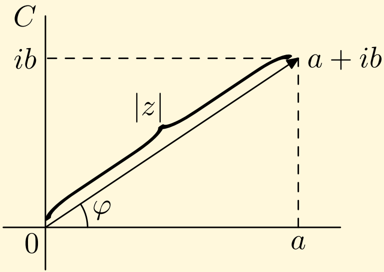
a) $\dfrac{2-i}{3-i}$ *b*) $\dfrac{3-i}{3+i}$

c) $\dfrac{5-2\,i}{3+2\,i}$ *d*) $\dfrac{i}{1+i}$

3. Forma polar de un número complejo

Definición 3.1

Un número complejo $z = a+b\,i$ *se puede caracterizar por su* *módulo* *o magnitud* $m = |z|$ *y por el ángulo que determina con la parte positiva del eje* Ox*. En el gráfico se aprecia que el módulo por el teorema de Pitágoras corresponde a:*



$$m = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

y el ángulo φ *que llamamos* *argumento* *verifica*

$$\tan\varphi = \frac{b}{a} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = \arctan\frac{b}{a}$$

De esta forma un número complejo en forma binómica $a+b\,i$ *se puede expresar en forma polar* m_φ

$$\boxed{a+b\,i = \left\{ \begin{array}{c} m = \sqrt{a^2+b^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{b}{a} \end{array} \right\} \Longrightarrow m_\varphi} \qquad (2)$$

MATEMATICAS 1º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
COMPLEJOS
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejemplo 3.1. Expresar en forma polar $1 + i$:

Solución: Calculamos su módulo y su argumento.

$$1 + i = \left\{ \begin{array}{c} m = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4} \end{array} \right\} = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$$

$\square$

Ejemplo 3.2. Expresar en forma polar $2\,i$:

Solución: Calculamos su módulo y su argumento.

$$2\,i = \left\{ \begin{array}{c} m = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \\ \varphi = \arctan \dfrac{2}{0} = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right\} = 2_{\frac{\pi}{2}}$$

$\square$

Ejercicio 8. Hallar el módulo y argumento de los siguientes complejos , representándolos previamente:

a) $2 - 2\,i$ *b*) $2\,i$ *c*) $-2\,i$ *d*) $-2 + 2\,i$

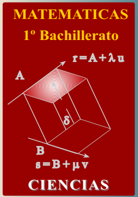
e) $2 + 2\,i$ *f*) 2 *g*) -2 *h*) $-2 - 2\,i$

Ejercicio 9. Hallar el módulo y el argumento de los complejos:

a) $\sqrt{6} + \sqrt{2}\mathbf{i}$ *b*) $\sqrt{12} - 2\mathbf{i}$ *c*) $-2 + 2\mathbf{i}$

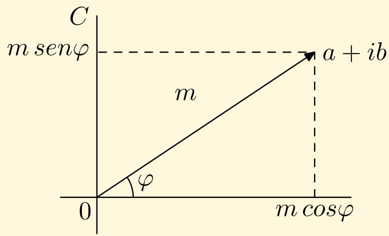
Ejercicio 10. Expresar en forma polar los números complejos:

a) $3 + \sqrt{3}\,i$ *b*) $2\,i$ *c*) $-2 + 2\,i$



3.1. Forma trigonométrica de un número complejo

En el dibujo se aprecia que a partir de la forma polar de un número complejo, podemos calcular su parte real y su parte imaginaria, pues



$$a = m\,\cos\varphi \qquad b = m\,\operatorname{sen}\varphi$$

Se llama la expresión trigonométrica

$$\boxed{m_\varphi \Longrightarrow m(\cos\varphi + i\,\operatorname{sen}\varphi)} \tag{3}$$

Ejemplo 3.3. Expresar en forma trigonométrica $1 + i$:

Solución: Calculamos su módulo y su argumento.

$$1 + i = \left\{ \begin{array}{c} m = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4} \end{array} \right\} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

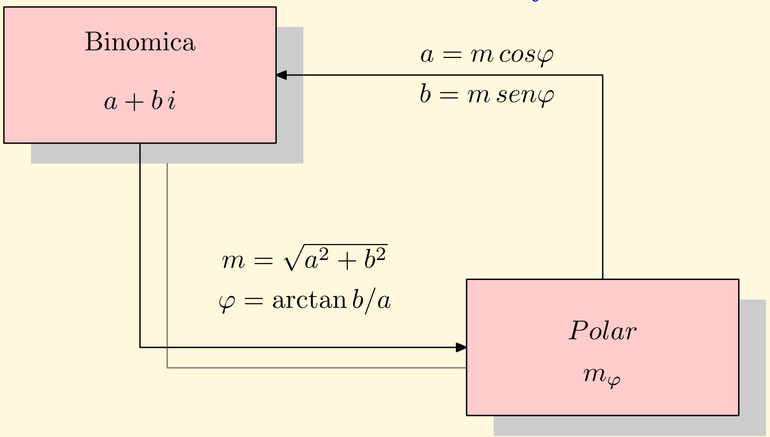
□

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 11. Expresar en forma polar y trigonométrica los números complejos::

$a)\ 1+i$ $\qquad b)\ -i$ $\qquad c)\ \sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$

Conversión de Binómica a Polar y viceversa



Ejercicio 12. Rellenar la tabla siguiente

Cartesiana	Binómica	Polar	Trigonométrica
$(1, -1)$			
	$\sqrt{3} - \mathbf{i}$		
		$3_{\pi/4}$	
			$2\, cos\, \pi/3 + \mathbf{i}\, sen\, \pi/3$

Ejercicio 13. Hallar x para que el cociente

$$\frac{x + 3\mathbf{i}}{3 + 2\mathbf{i}}$$

sea imaginario puro.

Ejercicio 14. Hallar x para que el complejo $z = \dfrac{3 - 2\,x\,i}{4 + 3\,i}$:

a) Sea imaginario puro.

b) Sea un número real.

Ejercicio 15. Hallar x para que el módulo de $z = \dfrac{x + i}{2 + i}$ sea $\sqrt{2}$.

3.2. Producto en forma polar

Teorema 3.1. El producto de dos números en forma polar es un complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos

$$\boxed{m_\alpha \cdot m'_\beta = (m \cdot m')_{\alpha+\beta}} \tag{4}$$

Ejemplo 3.4. Hallar $4_{120^o} \cdot 2_{30^o}$

Solución:

$$4_{120^o} \cdot 2_{30^o} = 8_{150^o} = 8(\cos 150 + \operatorname{sen} 150\, i) = -4\sqrt{3} + 4\, i$$

□

Ejemplo 3.5. Hallar $2_{90^o} \cdot 1_{90^o}$

Solución:

$$2_{90^o} \cdot 1_{90^o} = 2_{180^o} = 2(\cos 180 + \operatorname{sen} 180\, i) = -2$$

□

Ejercicio 16. Halla los siguientes productos:

a) $3_{\pi/6} \cdot 2_{\pi/6}$

b) $4_{\pi/12} \cdot 2_{\pi/6}$

c) $\sqrt{2}_{\pi/3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}_{5\pi/3}$

d) $-3 \cdot 4_{\pi/4} \cdot 2_{\pi/6}$

3.3. División en forma polar

Teorema 3.2. El cociente de dos números en forma polar es un complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y cuyo argumento es la diferencia de los argumentos

$$\boxed{\frac{m_\alpha}{m'_\beta} = \left(\frac{m}{m'}\right)_{\alpha-\beta}} \tag{5}$$

Ejemplo 3.6. Hallar $\dfrac{4_{120^o}}{2_{30^o}}$

Solución:

$$\frac{4_{120^o}}{2_{30^o}} = 2_{90^o} = 2(\cos 90 + \operatorname{sen} 90\, i) = 2\, i$$

□

Ejercicio 17. Halla los siguientes cocientes:

a) $3_{\pi/6} : 2_{\pi/6}$

b) $4_{\pi/12} : 2_{\pi/6}$

c) $3_{\pi/2} : 2_{\pi/4}$

d) $8_{\pi} : 2_{\pi/2}$

Ejercicio 18. Expresar en forma trigonométrica

$$\frac{-3+3\sqrt{3}\mathbf{i}}{2-2\mathbf{i}}$$

Ejercicio 19. Expresar en forma trigonométrica $\dfrac{2-2\mathbf{i}}{\sqrt{3}+\mathbf{i}}$

Ejercicio 20. Escribe en forma trigonométrica: $\dfrac{6\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}$

Ejercicio 21. Escribe en forma trigonométrica: $\dfrac{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$

Ejercicio 22. Escribe en forma trigonométrica:: $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}\mathbf{i}}{\sqrt{12}-2\mathbf{i}}$

Test. Responde a las preguntas:

1. El complejo $z = -2 + 2\,i$ está en:

(a) 1^o cuadrante (b) 2^o cuadrante (c) 3^o cuadrante

2. La forma polar de $z = -2 + 2\,i$ es:

(a) $\sqrt{8}_{\pi/4}$ (b) $\sqrt{8}_{-\pi/4}$ (c) $\sqrt{8}_{3\pi/4}$

3. La forma polar de $3\,(\cos 30^o - i\ \text{sen}\, 30^o)$ es

(a) 3_{30} (b)1 3_{-30} (c) 3_{60}

4. El módulo de $1_\pi \cdot 1_{2\pi} \cdot 1_{3\pi}$ es:

(a) 3 (b) 1 (c) otro

5. El argumento de -3 es:

(a) π (b) 0 (c) $2\,\pi$

3.4. Potencia en forma polar

Teorema 3.3. La potencia n-ésima de un número en forma polar m_φ es un complejo cuyo módulo es la potencia n-ésima de m y cuyo argumento es n veces φ.

$$\boxed{(m_\alpha)^n = m^n_{n\,\alpha}} \tag{6}$$

Ejemplo 3.7. Efectuar $\left(2_{\pi/4}\right)^5$

Solución:

$$\left(2_{\pi/4}\right)^5 = 2^5_{5\times\pi/4} = 32_{225^o}$$

$\square$

Ejemplo 3.8. Efectuar $(3_\pi)^2$

Solución:

$$(3_\pi)^2 = 3^2_{2\times\pi} = 8_{180^o}$$

$\square$

Ejercicio 23. Hallar la potencia $(1+\mathbf{i})^5$

Ejercicio 24. Hallar la potencia $(-2+2\sqrt{3}\mathbf{i})^6$

Ejercicio 25. Operar en forma polar $\dfrac{1}{(1+\mathbf{i})^5}$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

3.5. Raíz n-ésima de un complejo

Queremos hallar la raíz $n-$ésima de un complejo $a+b\,i$ que expresaremos en forma polar m_φ.

$$x = \sqrt[n]{m_\varphi} \Longleftrightarrow x^n = m_\varphi$$

Llamemos a la solución buscada $x = r_\alpha$, entonces se tiene que

$$(r_\alpha)^n = m_\varphi = r^n_{n\,\alpha}$$

igualando módulos y argumento,

$$m = r^n \Longrightarrow r = \sqrt[n]{m}$$

$$n\,\alpha = \varphi + k\cdot 360^o \Longrightarrow \alpha = \frac{\varphi + k\cdot 360^o}{n} \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

La raíz n-ésima de un número en forma polar corresponde a n números complejos con la expresión

$$\sqrt[n]{m_\varphi} = \sqrt[n]{m}_{\frac{\varphi + k\cdot 360^o}{n}} \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{7}$$

En los números reales $\sqrt[3]{1} = 1$, pero ahora en el campo de los complejos ademas de 1, hay otros dos complejos cuyo cubo es la unidad.

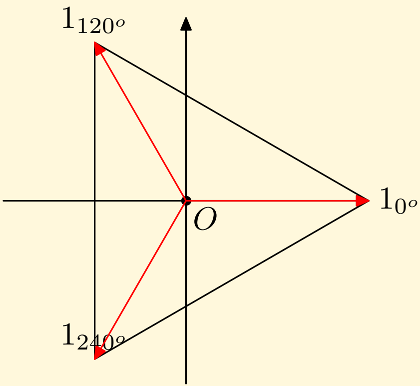
Ejemplo 3.9. Hallar las raíces $\sqrt[3]{1}$

Solución: Ponemos el radicando en forma polar

$$1 \Longrightarrow 1_0$$

El módulo es $\sqrt[3]{1} = 1$ y de la ecuación (7) dando valores a $k = 0, 1, 2$ se tienen los argumentos,

$$\alpha_k = \frac{0 + k \cdot 360^o}{3} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = 120 \\ \alpha_2 = 240 \end{array} \right.$$



luego las tres raíces son

$$1_0 \qquad 1_{120^o} \qquad 1_{240^o}$$

Los afijos de las soluciones son los vértices de un triángulo equilátero. □

MATEMATICAS
1º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
COMPLEJOS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 3.10. Hallar las raíces $\sqrt[5]{-32}$

Solución: Ponemos el radicando en forma polar

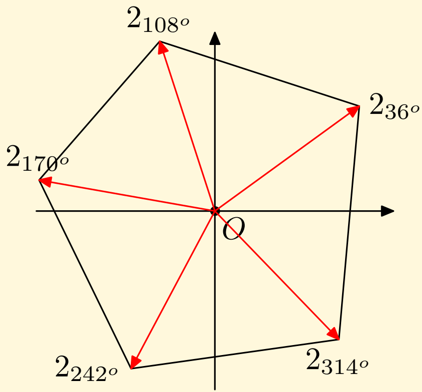
$$-32 \Longrightarrow 32_{180}$$

El módulo es $\sqrt[5]{32} = 2$ y de la ecuación (7) dando valores a $k = 0, 1, \cdots 4$ se tienen los argumentos,

$$\alpha_k = \frac{0 + k \cdot 360^o}{5} \begin{cases} \alpha_0 = 36^o \\ \alpha_1 = 108^o \\ \alpha_2 = 170^o \\ \alpha_3 = 242^o \\ \alpha_4 = 314^o \end{cases}$$

luego las cinco raíces son

$$2_{36^o} \quad 2_{108^o} \quad 2_{170^o} \quad 2_{242^o} \quad 2_{314^o}$$



Los afijos de las soluciones son los vértices de un polígono regular de cinco lados. □

Ejercicio 26. Un complejo z en forma binómica es $a+b\,i$, su conjugado es $\bar{z}=a+b\,i$ y su opuesto es $-z=-a-b\,i$. ¿Cuál es la expresión de los mismos en forma polar?

Ejercicio 27. Hallar dos complejos z_1 y z_2 sabiendo que su cociente es 4, sus argumentos suman 40^o y la suma de sus módulos es 15.

Ejercicio 28. Hallar dos complejos z_1 y z_2 sabiendo que su producto es $27\,i$ y uno de ellos es el cuadrado del otro.

Ejercicio 29. Hallar un complejo z_1 que cumpla que su inverso al cuadrado sea el opuesto de su conjugado.

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Teniendo en cuenta que $i^4 = 1$, basta dividir por 4 los exponentes:

a) $i^{34} = i^{4\cdot 8+2} = (i^4)^8 \cdot i^2 = i^2 = -1$

b) $i^{64} = i^{4\cdot 16} = (i^4)^{16} = 1$

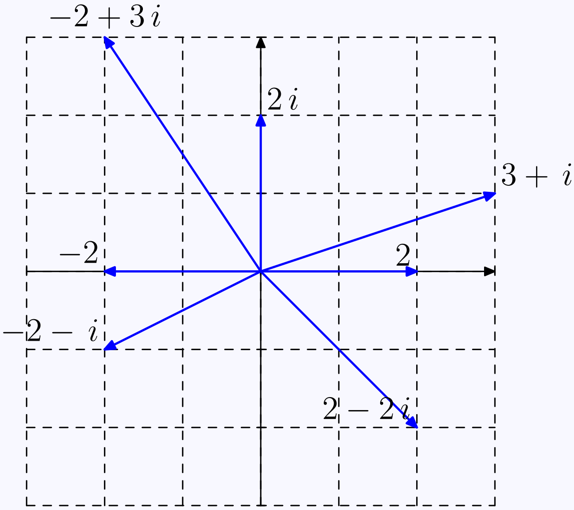
c) $i^{81} = i^{4\cdot 20+1} = (i^4)^{20} \cdot i = i$

d) $i^{107} = i^{4\cdot 26+3} = (i^4)^{26} \cdot i^3 = i^3 = -i$

Ejercicio 1

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 2.



Ejercicio 2

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 3.

a) $(2+5\,i)+(3-2\,i)=5+3\,i$

b) $(2-2\,i)+(2+2\,i)=4+$

c) $(5+\,i)+2\,(1-3\,i)=7-5\,i$

d) $(2-4\,i)-(3-3\,i)=-1-\,i$

Ejercicio 3

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 4.

a) $(2+5\,i)\cdot(3-2\,i)=16+11\,i$

b) $(2-2\,i)\cdot(2+2\,i)=8$

c) $(5+\,i)\cdot(1-3\,i)=8-14\,i$

d) $(2-4\,i)\cdot(3-3\,i)=-6-18\,i$

e) $(2+2\,i)\cdot(1-5\,i)\cdot(2+3\,i)=48+20\,i$

f) $(1+5\,i)\cdot(-\,i)-(4+3\,i)\cdot(4-3\,i)=-20-\,i$

Ejercicio 4

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 5. Sean los números complejos conjugados

$$z = a + b\,i \qquad \bar{z} = a - b\,i$$

$$\begin{aligned} z + \bar{z} =& (a + b\,i) + (a - b\,i) \\ =& 2\,a \end{aligned}$$

es decir la parte imaginaria es cero y por tanto es un número real.

Ejercicio 5

Ejercicio 6. Sean los números complejos conjugados

$$z = a + b\,i \qquad \bar{z} = a - b\,i$$

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} =& (a + b\,i) \cdot (a - b\,i) \\ =& a^2 - ab\,i + ab\,i - b^2\,i^2 \\ =& a^2 + b^2 \end{aligned}$$

es decir la parte imaginaria es cero y por tanto es un número real.

Ejercicio 6

Ejercicio 7.

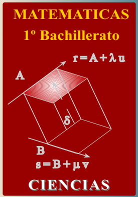
$$a)\ \frac{2-i}{3-i}=\frac{2-i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}=\frac{7-i}{10}=\frac{7}{10}-\frac{1}{10}\,i$$

$$b)\ \frac{3-i}{3+i}=\frac{3-i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{8-6\,i}{10}=\frac{8}{10}-\frac{6}{10}\,i$$

$$c)\ \frac{5-2\,i}{3+2\,i}=\frac{5-2\,i}{3+2\,i}\cdot\frac{3-2\,i}{3-2\,i}=\frac{11-16\,i}{13}=\frac{11}{13}-\frac{16}{13}\,i$$

$$d)\ \frac{i}{1+i}=\frac{i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,i$$

Ejercicio 7



Ejercicio 8.

$a)$ $2 - 2\,i \longrightarrow \sqrt{8}_{7\pi/4}$

$b)$ $2\,i \longrightarrow 2_{\pi/2}$

$c)$ $-2\,i \longrightarrow 2_{3\pi/2}$

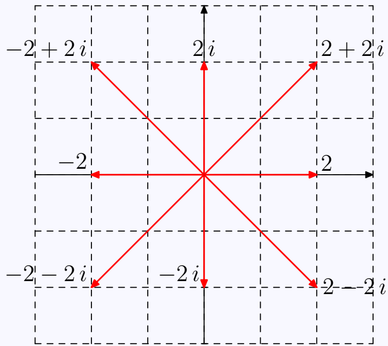
$d)$ $-2 + 2\,i \longrightarrow \sqrt{8}_{3\pi/4}$

$e)$ $2 + 2\,i \longrightarrow \sqrt{8}_{\pi/4}$

$f)$ $2 \longrightarrow 2_0$

$g)$ $-2 \longrightarrow 2_\pi$

$h)$ $-2 - 2\,i \longrightarrow \sqrt{8}_{5\pi/4}$



Ejercicio 8

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 9.

$$a)\ \sqrt{6}+\sqrt{2}\mathbf{i} \quad \left\{ \begin{array}{c} m=\sqrt{6+2}=\sqrt{8} \\ \varphi=\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\pi}{6} \end{array} \right.$$

$$b)\ \sqrt{12}-2\,i \quad \left\{ \begin{array}{c} m=\sqrt{12+4}=4 \\ \varphi=\arctan-\dfrac{2}{\sqrt{12}}=\arctan-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{11\,\pi}{6} \end{array} \right.$$

$$c)\ -2+2\,i \quad \left\{ \begin{array}{c} m=\sqrt{4+4}=\sqrt{8} \\ \varphi=\arctan-\dfrac{2}{2}=\arctan-1=\dfrac{3\,\pi}{4} \end{array} \right.$$

Ejercicio 9

Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 10.

$$a)\ \ 3+\sqrt{3}\,i = \left\{ \begin{array}{c} m = \sqrt{12} \\ \varphi = \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6} \end{array} \right\} = \sqrt{12}_{\frac{\pi}{6}}$$

$$b)\ \ 2\,i = 2_{\frac{\pi}{2}}$$

$$c)\ \ -2+2\,i = \sqrt{8}_{3\,\pi/4}$$

Ejercicio 10

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 11.

$$a)\ \ 1+i=\left\{\begin{array}{c} m=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \\ \varphi=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right\}=\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

$$b)\ \ -i=\left\{\begin{array}{c} m=1 \\ \varphi=\arctan -\dfrac{1}{0}=\dfrac{3\,\pi}{2} \end{array}\right\}=1_{\frac{3\,\pi}{2}}$$

$$\cos\frac{3\,\pi}{2}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{3\,\pi}{2}$$

$$c)\ \ \sqrt{2}+\sqrt{2}\,i=\left\{\begin{array}{c} m=2 \\ \varphi=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right\}=2_{\frac{\pi}{4}}$$

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Ejercicio 11

Ejercicio 12.

Cartesiana	Binómica	Polar	Trigonométrica
$(1,-1)$	1-i	$\sqrt{2}_{7\pi/4}$	$\sqrt{2}(\,cos\, 7\pi/4 + \mathbf{i}\, sen\, 7\pi/4)$
$(\sqrt{3},-1)$	$\sqrt{3}-\mathbf{i}$	$2_{11\pi/6}$	$2\,(cos\, 11\pi/6 + \mathbf{i}\, sen\, 11\pi/6)$
$\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	$\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\, i$	$3_{\pi/4}$	$3(\,cos\, \pi/4 + \mathbf{i}\, sen\, \pi/4)$
$(1,\sqrt{3})$	$1+\sqrt{3}\, i$	$2_{\pi/3}$	$2\,(cos\, \pi/3 + \mathbf{i}\, sen\, \pi/3)$

Ejercicio 12

Ejercicio 13.

$$\frac{x+3\,i}{3+2\,i} = \frac{x+3\,i}{3+2\,i}\cdot\frac{3-2\,i}{3-2\,i} = \frac{(3\,x+6)+(9-2\,x)\,i}{13}$$

para que sea imaginario puro la parte real debe ser cero

$$\frac{3\,x+6}{13} = 0 \Longrightarrow x = -2$$

Ejercicio 13

Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 14.

$$z = \frac{3-2\,x\,i}{4+3\,i} = \frac{3-2\,x\,i}{4+3\,i}\cdot\frac{4-3\,i}{4-3\,i} = \frac{12-6\,x}{25} - \frac{(9+8\,x)\,i}{25}$$

$a)$ para que sea imaginario puro la parte real debe ser cero

$$\frac{12-6\,x}{25} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

$b)$ para que sea real puro la parte imaginaria debe ser cero

$$\frac{(9+8\,x)\,i}{25} = 0 \Longrightarrow x = -\frac{9}{8}$$

Ejercicio 14

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 15.

$$z = \frac{x+i}{2+i} = \frac{x+i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2\,x+1}{5} + \frac{(2-\;x)\,i}{5}$$

igualamos el módulo a $\sqrt{2}$

$$\sqrt{\left(\frac{2\,x+1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2-\;x}{5}\right)^2} = \sqrt{2} \Longrightarrow$$

$$\frac{4\,x^2+4x+1}{25} + \frac{4-4\,x+x^2}{25} = 2 \Longrightarrow$$

$$5\,x^2+5 = 50 \Longrightarrow x^2 = 9 \Longrightarrow \boxed{x = \pm 3}$$

Ejercicio 15

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Prueba del Teorema 3.1.

Expresamos los complejos m_α y m'_β en forma trigonométrica. Al operar aparece el coseno y el seno de la suma de ángulos:

$$\begin{aligned} m_\alpha \cdot m'_\beta =& m(\cos\alpha + i\ \text{sen}\,\alpha) \cdot m'(\cos\beta + i\ \text{sen}\,\beta) \\ =& m \cdot m'[\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \\ & \qquad + i\ \text{sen}\,\alpha\cos\beta + i\ \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta] \\ =& m \cdot m'[\cos(\alpha+\beta) + i\ \text{sen}(\alpha+\beta)] \\ =& (m \cdot m')_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

◀

Ejercicio 16.

$a)$ $3_{\pi/6} \cdot 2_{\pi/6} = 6_{\pi/3} = 6(\cos 30 + \operatorname{sen} 30\, i) = 3\sqrt{3} + 3\, i$

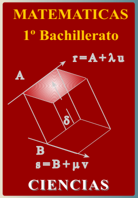
$b)$ $4_{\pi/12} \cdot 2_{\pi/6} = 8_{\pi/4} = 8(\cos 45 + \operatorname{sen} 45\, i) = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\, i$

$c)$ $\sqrt{2}_{\pi/3} \cdot {\dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{5\pi/3} = 1_{2\pi} = 1(\cos 360 + \operatorname{sen} 360\, i) = 1$

$d)$ $-3 \cdot 4_{\pi/4} \cdot 2_{\pi/6} = 3_{\pi} \cdot 4_{\pi/4} \cdot 2_{\pi/6} = 24_{17\pi/12}$

$$24_{17\pi/12} = 24(\cos 120 + \operatorname{sen} 120\, i) = -12 + 12\sqrt{3}\, i$$

Ejercicio 16



MaTEX

COMPLEJOS

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Prueba del Teorema 3.2.

Expresamos los complejos m_α y m'_β en forma trigonométrica. Al operar aparece el coseno y el seno de la diferencia de ángulos:

$$
\begin{aligned}
\frac{m_\alpha}{m'_\beta} &= \frac{m(\cos\alpha + i\ \text{sen}\,\alpha)}{m'(\cos\beta + i\ \text{sen}\,\beta)} \\
&= \frac{m(\cos\alpha + i\ \text{sen}\,\alpha)}{m'(\cos\beta + i\ \text{sen}\,\beta)}\,\frac{(\cos\beta - i\ \text{sen}\,\beta)}{(\cos\beta - i\ \text{sen}\,\beta)} \\
&\qquad (operando) \\
&= \frac{m}{m'}[\cos(\alpha-\beta) + i\ \text{sen}(\alpha-\beta)] \\
&= \left(\frac{m}{m'}\right)_{\alpha-\beta}
\end{aligned}
$$

◀

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 17.

$a)$ $\dfrac{3_{\pi/6}}{2_{\pi/6}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)_0$

$b)$ $\dfrac{4_{\pi/12}}{2_{\pi/6}} = (2)_{23\pi/12}$

$c)$ $\dfrac{3_{\pi/2}}{2_{\pi/4}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)_{\pi/4}$

$d)$ $\dfrac{8_{\pi}}{2_{\pi/2}} = (4)_{\pi/2}$

Ejercicio 17

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 18. Expresamos numerador y denominador en forma polar

$$-3+3\sqrt{3}\,i \quad\Longrightarrow\quad m=\sqrt{36} \quad \varphi=\frac{2\pi}{3}$$
$$2-2\,i \quad\Longrightarrow\quad m=\sqrt{8} \quad \varphi=\frac{7\pi}{4}$$

Ahora operamos el cociente en forma polar

$$\frac{-3+3\sqrt{3}\mathbf{i}}{2-2\,i}=\frac{6_{2\pi/3}}{\sqrt{8}_{7\pi/4}}=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)_{-13\pi/12}$$

$-\dfrac{13\pi}{12}=2\pi-\dfrac{13\pi}{12}=\dfrac{11\pi}{12}=165^o$ y pasamos a forma binómica

$$\frac{3}{\sqrt{2}}(\cos 165^o+\operatorname{sen}165^o\,i)$$

Ejercicio 18

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 19. Expresamos numerador y denominador en forma polar

$$\begin{array}{lcll} 2-2\,i & \Longrightarrow & m=\sqrt{8} & \varphi=\dfrac{7\pi}{4} \\ \sqrt{3}+\mathbf{i} & \Longrightarrow & m=\sqrt{4} & \varphi=\dfrac{\pi}{6} \end{array}$$

Ahora operamos el cociente en forma polar

$$\frac{2-2\mathbf{i}}{\sqrt{3}+\mathbf{i}}=\frac{\sqrt{8}_{7\pi/4}}{2_{\pi/6}}=\left(\sqrt{2}\right)_{19\pi/12}$$

y pasamos a forma trigonométrica

$$\sqrt{2}(cos\frac{19\pi}{12}+sen\frac{19\pi}{12}\,i)$$

Ejercicio 19

Ejercicio 20. Expresamos numerador y denominador en forma polar

$$\begin{array}{lcll} 6\,i & \Longrightarrow & m = 6 & \varphi = \dfrac{\pi}{2} \\ 1 + i & \Longrightarrow & m = \sqrt{2} & \varphi = \dfrac{\pi}{4} \end{array}$$

Ahora operamos el cociente en forma polar

$$\frac{6\,i}{1+i} = \frac{6_{\pi/2}}{\sqrt{2}_{\pi/4}} = \left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)_{\pi/4}$$

y pasamos a forma trigonométrica

$$\frac{6}{\sqrt{2}}(cos\frac{\pi}{4} + sen\frac{\pi}{4}\,i)$$

Ejercicio 20

Ejercicio 21. Expresamos numerador y denominador en forma polar

$$
\begin{array}{lclcl}
1+\sqrt{3}\,i & \Longrightarrow & m=2 & \varphi=\dfrac{\pi}{3} \\
1-\,i & \Longrightarrow & m=\sqrt{2} & \varphi=\dfrac{7\pi}{4}
\end{array}
$$

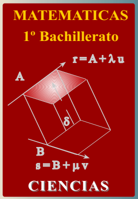
Ahora operamos el cociente en forma polar

$$
\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\,i}=\frac{2_{\pi/3}}{\sqrt{2}_{7\pi/4}}=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{-17\pi/12}
$$

$-\dfrac{17\pi}{12}=2\pi-\dfrac{17\pi}{12}=\dfrac{7\pi}{12}=105^o$ y pasamos a forma trigonométrica

$$
\frac{2}{\sqrt{2}}(\cos 105^o+\operatorname{sen} 105^o\, i)
$$

Ejercicio 21



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 22. Expresamos numerador y denominador en forma polar

$$\begin{array}{lclc}
\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i & \Longrightarrow & m=\sqrt{8} & \varphi=\dfrac{\pi}{6} \\
\sqrt{12}-2\,i & \Longrightarrow & m=4 & \varphi=-\dfrac{\pi}{6}
\end{array}$$

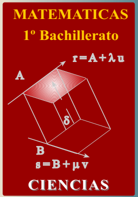
Ahora operamos el cociente en forma polar

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i}{\sqrt{12}-2\,i}=\frac{\sqrt{8}_{\pi/6}}{4_{-\pi/6}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\pi/3}$$

y pasamos a forma trigonométrica

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(cos\frac{\pi}{3}+sen\frac{\pi}{3}\,i)$$

Ejercicio 22



Prueba del Teorema 3.3.
Por la regla del producto se tiene

$$\begin{aligned}(m_\alpha)^n &= m_\alpha \cdot m_\alpha \cdots m_\alpha \\ &= (m \cdot m \cdots m)\alpha + \alpha + \cdots + \alpha \\ &= m^n_{n\,\alpha}\end{aligned}$$

Ejercicio 23. Calculamos su módulo y su argumento.

$$1+i=\left\{\begin{array}{c} m=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \\ \varphi=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right\}=\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$$

Ahora operamos la potencia en forma polar

$$\left(\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}\right)^5=\sqrt{2}^5_{5\frac{\pi}{4}}$$

Ejercicio 23

Ejercicio 24. Calculamos su módulo y su argumento.

$$(-2+2\sqrt{3}\mathbf{i})^6 = \left\{ \begin{array}{c} m = \sqrt{2^2+12} = \sqrt{16} = 4 \\ \varphi = \arctan -\sqrt{3} = \dfrac{2\pi}{3} \end{array} \right\} = 4_{\frac{2\pi}{3}}$$

Ahora operamos la potencia en forma polar

$$\left(4_{\frac{2\pi}{3}}\right)^6 = 4^6_{4\,\pi} = 4^6_0$$

Ejercicio 24

◄◄ ►►
◄ ►
◄ Doc Doc ►
Volver Cerrar

Ejercicio 25. Expresamos numerador y denominador en forma polar

$$\begin{array}{ccll} 1 & \Longrightarrow & m = 1 & \varphi = 0 \\ 1+i & \Longrightarrow & m = \sqrt{2} & \varphi = \dfrac{\pi}{4} \end{array}$$

Ahora operamos el cociente en forma polar

$$\frac{1}{(1+i)^5} = \frac{1_0}{(\sqrt{2}_{\pi/4})^5} = \frac{1_0}{4\sqrt{2}_{5\pi/4}} = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)_{3\pi/4}$$

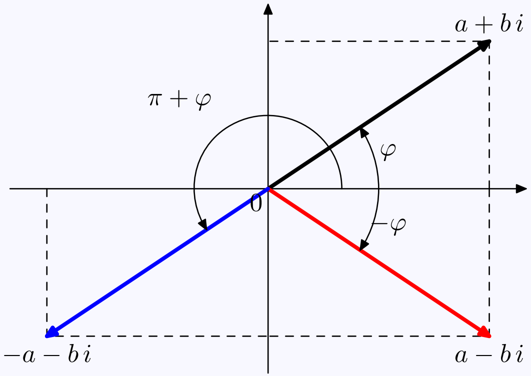
y pasamos a forma binómica

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\,(cos\,\frac{3\pi}{4} + \mathbf{i}\,sen\,\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{16}\,i$$

Ejercicio 25

Ejercicio 26. A partir del gráfico es fácil observar que si $a + b\,i$ es en forma polar m_φ, entonces

- Su conjugado $a - b\,i$ en polar es $m_{-\varphi}$
- Su opuesto $-a - b\,i$ en polar es $m_{\pi+\varphi}$



Ejercicio 26

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 27.

Sean $z_1 = m_\alpha$ y $z_2 = k_\beta$. Planteamos un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{m_\alpha}{k_\beta} = 4_0 \\ \alpha + \beta = 40 \\ m + k = 15 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \dfrac{m}{k} = 4 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 40 \\ m + k = 15 \end{array}\right\}$$

- $\alpha = \beta \Longrightarrow 2\,\alpha = 40 \Longrightarrow \boxed{\alpha = \beta = 20}$
- $m = 4\,k \Longrightarrow 5\,k = 15 \Longrightarrow \boxed{k = 3} \qquad \boxed{m = 12}$

Los complejos pedidos son

$$12_{20^o} \qquad 3_{20^o}$$

Ejercicio 27

MATEMATICAS
1º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
COMPLEJOS
Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 28.
Sean $z_1 = m_\alpha$ y $z_2 = k_\beta$. Planteamos un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{c} m_\alpha \cdot k_\beta = 27\, i = 27_{90^o} \\ m_\alpha = (k_\beta)^2 = k^2_{2\beta} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} m \cdot k = 27 \\ \alpha + \beta = 90 \\ m = k^2 \\ \alpha = 2\,\beta \end{array}\right\}$$

- $\alpha = 2\,\beta \Longrightarrow 3\,\beta = 90 \Longrightarrow \boxed{\alpha = 60} \qquad \boxed{\beta = 30}$
- $m = k^2 \Longrightarrow k^3 = 27 \Longrightarrow \boxed{k = 3} \qquad \boxed{m = 9}$

Los complejos pedidos son

$$9_{60^o} \qquad 3_{30^o}$$

Ejercicio 28

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 29.

Sean $z_1 = m_\alpha$ el complejo buscado

- Su inverso es
$$\frac{1}{m_\alpha} = \frac{1_0}{m_\alpha} = \left(\frac{1}{m}\right)_{-\alpha}$$
- El conjugado de $z_1 = m_\alpha$ es $\bar{z}_1 = m_{-\alpha}$ y el opuesto de este es $-\bar{z}_1 = m_{\pi-\alpha}$

luego se tiene que cumplir que

$$\left(\frac{1}{m^2}\right)_{-2\,\alpha} = m_{\pi-\alpha} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} 1 = m^3 \\ -2\,\alpha = \pi - \alpha \end{array}\right\}$$

El complejo buscado es $1_{-\pi} = 1_\pi = -1$

Ejercicio 29

Soluciones a los Tests

Solución al Test: En efecto

$$-2+2\,i \quad \left\{ \begin{array}{c} m=\sqrt{4+4}=\sqrt{8} \\ \varphi=\arctan -\dfrac{2}{2}=\arctan -1=\dfrac{3\pi}{4} \end{array} \right.$$

Final del Test

Índice alfabético