UNIDAD 3: INTEGRAL INDEFINIDA

ÍNDICE DE LA UNIDAD

1.- INTRODUCCIÓN.

*El **Cálculo Integral**, que es una de las más importantes y complejas partes del Análisis Matemático tiene su origen en el estudio del **área de figuras planas**. Las fórmulas para el cálculo de las áreas de triángulos y rectángulos eran ya conocidas en la Grecia Clásica, así como la de los polígonos regulares previa descomposición en triángulos.*

*El problema se plantea a la hora de calcular áreas de figuras limitadas por líneas curvas. **Euclides** (300 a.C.) sigue los trabajos de Eudoxio (400-355 a.C.) para calcular el área del círculo por el **método de exhaución**, es decir, inscribiendo en él sucesivamente polígonos con más lados. La suma de estas áreas se aproximaba cada vez más al área del círculo, estando en el "límite" el valor exacto*

***Arquímedes** (287-212 a.C.) halló también el área encerrada por un arco de parábola y la cuerda correspondiente, cosa realmente difícil en aquel tiempo, ya que no se disponía del álgebra formalizada ni de la geometría analítica. El método utilizado era el de agotamiento, esto es, se encaja el área entre dos polígonos, uno inscrito en la región y otro circunscrito a la región.*

*Desde los griegos hasta el siglo XVII poco se hizo con relación al cálculo de áreas y volúmenes de figuras limitadas por líneas o superficies cerradas. **Pascal, Fermat y Leibniz** comienzan un estudio engarzado con el cálculo diferencial; así pues, aunque históricamente se estudian los primeros elementos del cálculo integral antes que el* *diferencial, en el siglo XVII se estudian y configuran a la par, relacionándose por medio de muchos e importantes resultados.*

En esta primera de las dos unidades que dedicaremos al cálculo integral, nos centraremos en el ***Cálculo de Primitivas****, herramienta necesaria para la segunda unidad, en la que aplicaremos lo visto en esta para el cálculo de áreas.*

2.- PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN

Definición 1: Sean $f(x)$ y $F(x)$ dos funciones reales definidas en un mismo dominio D. Se dice que **F es una primitiva de f** si se cumple que $F'(x)=f(x)\ \forall x\in D$.

Ejemplo 1: Sin más que recordar la tabla de derivadas, es evidente que:

a) $F(x)=senx$ es una primitiva de $f(x)=\cos x$ *en* $\mathbb{R}$.

b) $F(x)=\ln x$ es una primitiva de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *en* $(0,+\infty)$.

Proposición 1: Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces $F(x)+C$ es también una primitiva de $f(x)\ \forall C\in\mathbb{R}$.

Proposición 2: Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de una función $f(x)$, entonces $G(x)=F(x)+C$. Es decir, dos primitivas de una misma función se diferencian en una constante.

Nota 1: Según hemos visto en la proposición anterior para hallar todas las primitivas de una función $f(x)$, basta calcular una primitiva concreta $F(x)$, ya que las infinitas primitivas de dicha función serán todas las de la forma: $F(x)+C$, con C una constante cualquiera.

3.- INTEGRAL INDEFINIDA. PROPIEDADES

Definición 2: Se llama **integral indefinida** de una función $f(x)$ al conjunto de todas las primitivas de $f(x)$. A dicho conjunto lo representaremos por $\int f(x)dx$.

Ejemplo 2: Sin más que recordar el ejemplo 1, se concluye que:

a) $\int \cos x\,dx = senx + C$. b) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$. c) $\int e^x\,dx = e^x + C$

Proposición 3: (Linealidad de la integral indefinida)

a) $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

b) $\int \lambda f(x)dx = \lambda\int f(x)dx\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

Ejemplo 3: $\int\left(7-\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx=7\int dx-2\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=7x-2tgx+C$

Nota 2: Para evitar errores graves en los cálculos, conviene tener en cuenta que, en general:

a) $\int\left(f(x)\cdot g(x)\right)dx\neq\int f(x)dx\cdot\int g(x)dx$ b) $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

4.- INTEGRACIÓN INMEDIATA

Como ya hemos podido comprobar en lo visto hasta ahora en la unidad, el problema de determinar la integral indefinida de una función se reduce al de hallar una primitiva, es decir, al de calcular una función cuya derivada sea la función a integrar.

Antes de empezar con los métodos y, a modo de curiosidad, debemos saber que no todas las integrales se pueden expresar como una función elemental. Algunos ejemplos de éstas son: $\int\frac{\operatorname{sen}x}{x}dx$, $\int\operatorname{sen}x^2dx$, $\int e^{-x^2}dx$, $\int\frac{e^x}{x}dx$ *entre otras.*

Realmente son pocas las integrales que se pueden abordar con un único método. Por el contrario, es muy normal que debamos combinar varios de los métodos que veremos en lo que resta de unidad para integrar una función. Todos los métodos que abordaremos tienen como objetivo final transformar la integral inicial en otras hasta llegar finalmente a integrales inmediatas. Por ello, el primer método de integración y base de todos los demás de los que veremos a continuación, es el de integración inmediata, esto es utilizar "al revés" la tabla de derivadas de las funciones elementales vista en la unidad anterior y que resumimos a continuación:

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS	
$\int dx=x+C$	$\int\lambda dx=\lambda x+C$
$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad \forall n\neq-1$	$\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$
$\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}+C$	$\int\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}dx=\sqrt[n]{x}$
$\int e^x dx=e^x+C$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
$\int senx\,dx=-\cos x+C$	$\int\cos x\,dx=\operatorname{sen}x+C$
$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\left(1+\operatorname{tg}^2x\right)dx=\int\sec^2x\,dx=\operatorname{tg}x+C$	$\int\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}dx=\int\left(1+\operatorname{cotg}^2x\right)dx=\int\operatorname{cosec}^2x\,dx=-\operatorname{cotg}x+C$
$\int\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2x}dx=\sec x+C$	$\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2x}dx=-\operatorname{cosec}x+C$
$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\operatorname{arcsen}x+C$	$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x+C$

Antes de comenzar con todos los métodos de integración, conviene recordar (porque las necesitaremos en muchas integrales), además de las propiedades de los logaritmos vistas en la unidad anterior, las principales relaciones trigonométricas que resumimos en la siguiente tabla:

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS			
$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	$1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$	$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x$	
$\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$	$\text{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$	$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$	$\text{cosec}\, x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$
$\text{sen}(x+y) = \text{sen}\, x \cdot \cos y + \cos x \cdot \text{sen}\, y$		$\text{sen}(x-y) = \text{sen}\, x \cdot \cos y - \cos x \cdot \text{sen}\, y$	
$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \text{sen}\, x \cdot \text{sen}\, y$		$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$	
$\text{tg}(a+b) = \dfrac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$		$\text{tg}(x-y) = \dfrac{\text{tg}\, x - \text{tg}\, y}{1 + \text{tg}\, x \cdot \text{tg}\, y}$	
$\text{sen}\, 2x = 2\,\text{sen}\, x \cdot \cos x$		$\text{sen}\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$	
$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$		$\cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$	
$\text{tg}\, 2x = \dfrac{2\,\text{tg}\, x}{1 - \text{tg}^2 x}$		$\text{tg}\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$	
$\text{sen}\, x \cdot \text{sen}\, y = \dfrac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$		$\cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$	
$\text{sen}\, x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}\left(\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y)\right)$		$\cos x \cdot \text{sen}\, y = \dfrac{1}{2}\left(\text{sen}(x+y) - \text{sen}(x-y)\right)$	

<u>Nota 3:</u> En muchos casos de integrales trigonométricas, resulta muy útil reducir los exponentes pares. Esto se consigue despejando en la fórmula del coseno del ángulo doble, obteniéndose las relaciones:

a) $\text{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ b) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

<u>Nota 4:</u> (Integración por descomposición) Aunque la aplicación de las propiedades de linealidad de la integral vistas en la proposición 3 no es realmente un método de integración considerado como tal, es uno de los métodos más utilizados o combinados con otros, proporcionándonos, en muchos casos, soluciones sencillas a determinadas integrales. Veamos algunos ejemplos:

<u>Ejemplo 4:</u>

a) $\int \text{tg}^2 x\, dx = \int \left(1 + \text{tg}^2 x - 1\right) dx = \int \left(1 + \text{tg}^2 x\right) dx - \int dx = \text{tg}\, x - x + C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\text{sen}^2 x} = \text{tg}\, x - \text{cotg}\, x + C$

c) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C$

d) $\int \frac{1}{7\sqrt{x}}dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{7}\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{2}{7}\sqrt{x} + C$

e) $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 2x\, dx\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\, dx\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$

Como se puede ver en el ejemplo, la estrategia de sumar y restar una misma cantidad, al igual que la de multiplicar y dividir por una misma cantidad, resulta bastante útil en determinados casos y ayuda a simplificar el cálculo de determinadas integrales.

Se proponen las **actividades 1 y 2.**

5.- INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Aunque el método de integración por sustitución o ***cambio de variable*** *se aplica en numerosas situaciones, su origen está en la regla de la cadena utilizada en la derivación. En efecto, si $f(x)$ es una función cuya primitiva es $F(x)$, entonces, $F(g(x))$ será una primitiva de $f(g(x))g'(x)$, sin más que utilizar la regla de la cadena, porque $\left(F(g(x))\right)' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$, con lo que $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$. En la práctica utilizaremos la notación: $\int f(g(x))g'(x)dx = \left\| \begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x)dx \end{array} \right\| = \int f(t)dt$ con el objetivo de simplificar dicha integral, es decir, el cambio de variable es un buen método cuando se obtiene una integral más sencilla de resolver que la primera. En principio la dificultad para aplicar este método radica en saber qué cambio hay que hacer. Esta dificultad la salvaremos con la práctica y algunos cambios recomendados que veremos más adelante.*

Ejemplo 5:

a) $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x\, dx = \left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{sen} x \\ dt = \cos x\, dx \end{array} \right\| = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$

b) $\int e^{3x+1}dx = \left\| \begin{array}{l} t = 3x+1 \\ dt = 3dx \to dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right\| = \int e^t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{3x+1} + C$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \left\| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x^2 + C$

d) $\int \frac{3x^2-10x}{x^3-5x^2}dx = \left\| \begin{array}{l} t = x^3-5x^2 \\ dt = (3x^2-10x)dx \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x^3-5x^2\right| + C$

Se propone la **actividad 3.**

Nota 5: **(Integración de funciones racionales de exponenciales)** En las funciones racionales de exponenciales se suele utilizar el siguiente cambio que las transforma en una racional: $\int R\left(a^x\right)dx = \left\| \begin{matrix} t = a^x \\ dt = a^x \ln a\, dx \to dx = \dfrac{dt}{t \ln a} \end{matrix} \right\|$. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 6: $\int \frac{e^{2x} - e^x}{e^{2x}+1}dx = \left\| \begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \to dx = \dfrac{dt}{t} \end{matrix} \right\| = \int \frac{t^2 - t}{t^2+1} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{t-1}{t^2+1}dt = \int \frac{tdt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{1+t^2} =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) - \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right) - \operatorname{arctg} e^x + C$$

6.- INTEGRACIÓN POR PARTES

Por la regla de derivación del producto, sabemos que $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. *Si utilizamos la notación diferencial, tendremos que* $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$. *Integrando en ambos miembros, obtenemos* $u \cdot v = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$. *Así pues, despejando, se obtiene la* ***fórmula de integración por partes*** $\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$ *. Lo que conseguimos aplicando esta fórmula es transformar una integral en otra. Esto facilitará el cálculo siempre que la segunda sea más sencilla que la primera. En muchos casos, ha de aplicarse el método más de una vez o combinarlo con otros métodos.*

Ejemplo 7:

a) $\int x \cdot e^x dx = \left\| \begin{matrix} u = x \to du = dx \\ dv = e^x dx \to v = e^x \end{matrix} \right\| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$

b) $\int \ln x\, dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x \to du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx \to v = x \end{matrix} \right\| = x \ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$

Se propone la **actividad 4**

7.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

La integración de funciones racionales es, en general, una tarea larga y, a menudo, complicada. En esta sección veremos únicamente los casos más sencillos para iniciarnos en este tipo de integrales. Esto es, integrales del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ *siendo* $Q(x)$ *un polinomio con raíces reales. Para mejor comprensión, distinguiremos dos casos:*

Caso 1: $gr\left(P(x)\right) < gr\left(Q(x)\right)$

1º) Supongamos que las raíces de $Q(x)$ son $a_1, \ldots\ldots a_n$ con multiplicidades $m_1, \ldots. m_n$ Entonces, la fracción se puede descomponer en fracciones simples en la forma siguiente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \ldots \frac{A_{1m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{n1}}{(x-a_n)} + \frac{A_{n2}}{(x-a_n)^2} + \ldots \frac{A_{nm_n}}{(x-a_n)^{m_n}}$$

2º) Sustituyendo en la integral y aplicando la linealidad de la integral, obtenemos:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}=\int\frac{A_{11}}{(x-a_1)}+\int\frac{A_{12}}{(x-a_1)^2}+\ldots\int\frac{A_{1m_1}}{(x-a_1)^{m_1}}+\ldots\ldots..+\int\frac{A_{n1}}{(x-a_n)}+\int\frac{A_{n2}}{(x-a_n)^2}+\ldots\int\frac{A_{nm_n}}{(x-a_n)^{m_n}}$$

3º) Resolvemos por separado cada una de estas integrales, que son inmediatas.

Caso 2: $gr(P(x))\geq gr(Q(x))$

En este caso, efectuamos la división y obtenemos la igualdad: $\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$, con lo que $\int\frac{P(x)}{Q(x)}=\int C(x)+\int\frac{R(x)}{Q(x)}$, siendo $C(x)$ el cociente y $R(x)$ el resto. El primer sumando es inmediata (polinómica) y el segundo sumando se resuelve procediendo como en el caso 1.

Veamos esto con más claridad con algunos ejemplos:

Ejemplo 8:

a) $\int\frac{x-2}{x^2+x}dx$.

- Lo primero que observamos es que el grado del numerador es menor que el del denominador, así pues, no es necesario dividir. Pasamos directamente a descomponer en fracciones simples el integrando:
- Factorizamos el denominador: $x^2+x=x(x+1)$
- Descomponemos: $\frac{x-2}{x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}\rightarrow x-2=A(x+1)+Bx$
- Llegados a este punto, se puede proceder de dos formas para determinar A y B:
  - o Igualando coeficientes: $x-2=(A+B)x+A\rightarrow\begin{cases}A+B=1\\A=-2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=3\end{cases}$
  - o Sustituyendo en dos valores: $\begin{cases}x=0\rightarrow-2=A\\x=-1\rightarrow-3=-B\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=3\end{cases}$
- Entonces: $\frac{x-2}{x^2+x}=\frac{-2}{x}+\frac{3}{x+1}\rightarrow\int\frac{x-2}{x^2+x}dx=\int\frac{-2}{x}dx+\int\frac{3}{x+1}dx=-2\ln|x|+3\ln|x+1|+C$

b) $\int\frac{x^4-1}{x^3-4x^2+4x}dx$.

- Lo primero que observamos es que el grado del numerador es mayor que el del denominador, así pues, es necesario dividir:
- $\frac{x^4-1}{x^3-4x^2+4x}=x+4+\frac{12x^2-16x-1}{x^3-4x^2+4x}$
- Descomponemos: $\frac{12x^2-16x-1}{x^3-4x^2+4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx}{x(x-2)^2}$

• Sustituyendo en tres valores: $\begin{cases} x=0 \to -1=4A \to A=\dfrac{-1}{4} \\ x=2 \to 15=2C \to C=\dfrac{15}{2} \\ x=1 \to -5=A-B+C \to B=\dfrac{-1}{4}+\dfrac{15}{2}+5=\dfrac{49}{4} \end{cases}$

• Entonces:

$$\int \frac{x^4-1}{x^3-4x^2+4x}dx=\int(x+4)dx+\int\frac{12x^2-16x-1}{x^3-4x^2+4x}=\int(x+4)dx-\int\frac{1/4}{x}dx+\int\frac{49/4}{x-2}dx+\int\frac{15/2}{(x-2)^2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+4x-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{49}{4}\ln|x-2|-\frac{15}{2(x-2)}$$

Se propone la **actividad 5**

8.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

La integración de funciones trigonométricas es, en general, un proceso largo y laborioso. Los métodos que se pueden utilizar son diversos, aunque destaca la utilización de determinados cambios de variable que veremos a continuación. Como norma general, cuando nos encontremos con una integral trigonométrica, podemos recomendar probar con lo siguiente (en ese orden):

1.- Simplificar el integrando lo máximo posible utilizando las relaciones trigonométricas. Suele ser útil, a menudo poner el integrando en función de seno y coseno.

2.- Observar si es inmediata o si se puede transformar por descomposición en integrales más sencillas utilizando las relaciones trigonométricas.

3.- Si después de probar con lo anterior no se resuelve de manera sencilla, escribirla de la forma $f(\operatorname{sen}x,\cos x)$, siendo una función en la que aparecen operaciones elementales (suma, resta, producto, cociente, potencia) y se recomiendan los siguientes cambios de variable:

- **Si la función es impar en seno, es decir, si** $f(-\operatorname{sen}x,\cos x)=-f(\operatorname{sen}x,\cos x)$

En este caso, se recomienda el cambio de variable $\left\| \begin{matrix} t=\cos x \\ dt=-\operatorname{sen}x\,dx \end{matrix} \right\|$

Ejemplo 9: $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,dx=\left\| \begin{matrix} t=\cos x \\ dt=-\operatorname{sen}x\,dx \end{matrix} \right\|=\int \operatorname{sen}^2 x\cdot \operatorname{sen}x\,dx=\int\left(1-\cos^2 x\right)\operatorname{sen}x\,dx=$

$$=\int\left(1-t^2\right)(-dt)=\int\left(t^2-1\right)dt=\frac{t^3}{3}-t+C=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$$

- **Si la función es impar en coseno, es decir, si** $f(\operatorname{sen}x,-\cos x)=-f(\operatorname{sen}x,\cos x)$

En este caso, se recomienda el cambio de variable $\left\| \begin{matrix} t=\operatorname{sen}x \\ dt=\cos x\,dx \end{matrix} \right\|$

- **<u>Si la función es par en seno y coseno</u>, es decir, si** $f\left(-\operatorname{sen}x,-\cos x\right)=f\left(\operatorname{sen}x,\cos x\right)$

En este caso, se recomienda el cambio de variable $\left\| \begin{array}{l} t=\operatorname{tg}x \to \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2} \end{cases} \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\|$

Veamos la demostración: $t=tgx \xrightarrow{1+tg^2x=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}} \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2} \xrightarrow{sen^2x=1-\cos^2 x} sen^2x=1-\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{t^2}{1+t^2}$

Por otra parte: $t=tgx \to x=\operatorname{arctg}t \to dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$

No obstante, conviene tener en cuenta que utilizando las identidades de la nota 3, se pueden simplificar muchas integrales de este tipo, sobre todo en el caso de que el integrando no sea una fracción sino un producto de potencias pares de senos y cosenos. La dificultad varía en cada caso. Veamos dos ejemplos bien distintos:

<u>Ejemplo 10:</u>

a) Utilizando el cambio de variable: $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx=\left\| \begin{array}{l} t=\operatorname{tg}x \to \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2} \end{cases} \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\|=$

$=\int \dfrac{t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{1}{1+t^2}\cdot\dfrac{dt}{1+t^2}=\int \dfrac{t^2}{\left(1+t^2\right)^3}dt$, que es una integral racional sin raíces reales en el denominador que ni siquiera hemos visto cómo resolverla en el tema.

b) Si utilizamos las fórmulas de la nota 3: $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx=\int \dfrac{1-\cos 2x}{2}\dfrac{1+\cos 2x}{2}dx=$

$=\dfrac{1}{4}\int(1-\cos^2 2x)dx=\dfrac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2x\,dx=\dfrac{1}{4}\int\dfrac{1-\cos 4x}{2}dx=\dfrac{1}{8}\int(1-\cos 4x)dx=\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{32}\operatorname{sen}4x+C$

c) Incluso hay una forma más fácil: $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx=\dfrac{1}{4}\int 4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx=\dfrac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2x\,dx$

A partir de ahí, se puede seguir como en el apartado b.

<u>Ejemplo 11:</u>

a) Utilizando el cambio de variable: $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^4 x}=\left\| \begin{array}{l} t=\operatorname{tg}x \to \operatorname{sen}^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2} \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\|=\int \dfrac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^4}{\left(1+t^2\right)^2}}=$

$$=\int\frac{1+t^2}{t^4}dt=\int\left(\frac{1}{t^4}+\frac{t^2}{t^4}\right)dt=\int\left(t^{-4}+t^{-2}\right)dt=\frac{t^{-3}}{-3}+\frac{t^{-1}}{-1}+C=\frac{-1}{3\operatorname{tg}^3 x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}+C$$

b) Si utilizamos las fórmulas de la nota 3: $\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x}=\int\frac{dx}{\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2}=\int\frac{4\,dx}{(1-\cos 2x)^2}$, cuya resolución es bastante más larga y compleja que con el cambio de variable.

- **<u>Cambio general o universal</u>**

El siguiente cambio es válido para cualquier caso. No obstante, al ser algo más complejo, conviene reservarlo para cuándo no se pueda resolver la integral con los anteriores.

El cambio es: $$\left\| \begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right\|$$

Veamos la demostración: $t=tg\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\rightarrow t^2=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\rightarrow t^2\left(1+\cos x\right)=1-\cos x\rightarrow$

$$\rightarrow t^2+t^2\cos x=1-\cos x\rightarrow\cos x\left(1+t^2\right)=1-t^2\rightarrow\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\rightarrow senx=\sqrt{1-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+t^4+2t^2-1-t^4+2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

Por otra parte, si $t=tg\frac{x}{2}\rightarrow\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}t\rightarrow x=2\operatorname{arctg}t\rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

<u>Ejemplo 12:</u> $$\int\frac{dx}{3+5\cos x}=\left\| \begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right\|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{8-2t^2}{1+t^2}}dt=\int\frac{dt}{4-t^2}$$

$$=-\int\frac{1}{t^2-4}dt\overset{Descomponemos}{=}\frac{1}{4}\int\frac{1}{t-2}dt-\frac{1}{4}\int\frac{1}{t+2}dt=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{tg\frac{x}{2}+2}\right|+C.$$

<u>Nota 6:</u> Hay un caso particular de integrales trigonométricas, que son las del tipo $\int\operatorname{sen}\alpha x\cdot\cos\beta x\,dx$, $\int\operatorname{sen}\alpha x\cdot\operatorname{sen}\beta x\,dx$, $\int\cos\alpha x\cdot\cos\beta x\,dx$ y cuya resolución es un tanto particular, ya que se utilizan las relaciones trigonométricas que vimos en el punto 4. Concretamente son las siguientes:

$\text{sen}(x+y)=\text{sen}\,x\cdot\cos y+\cos x\cdot\text{sen}\,y$	$\text{sen}(x-y)=\text{sen}\,x\cdot\cos y-\cos x\cdot\text{sen}\,y$
$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\text{sen}\,x\cdot\text{sen}\,y$	$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b$

Se trata de buscar dos es estas relaciones que tengan en común el radicando y sumar o restar, según sea más apropiado. Veamoslo de forma más clara con un ejemplo:

Ejemplo 13: $\int \text{sen}\,2x\cdot\cos 5x\,dx$

Buscamos dos de las relaciones en la que aparezcan. En este caso es evidente que son las de la primera fila.

Basta aplicar las igualdades: $\begin{cases}\text{sen}(5x+2x)=\text{sen}\,5x\cos 2x+\cos 5x\,\text{sen}\,2x\\ \text{sen}(5x-2x)=\text{sen}\,5x\cos 2x-\cos 5x\,\text{sen}\,2x\end{cases}$.

Si restamos, obtenemos: $\text{sen}\,7x-\text{sen}\,3x=2\cos 5x\,\text{sen}\,2x$.

Así pues, $\int \text{sen}\,2x\cdot\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int(\text{sen}\,7x-\text{sen}\,3x)\,dx=\frac{-1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C$

Se propone la **actividad 6**

9.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES IRRACIONALES

En general, aunque la palabra irracional se refiere a algo mucho más extenso, cuando hablamos de integración de funciones irracionales, entenderemos que nos referimos a integrales en las que la variable x se encuentra dentro de una raíz.

Este tipo de integrales es uno de los que presenta mayor complejidad al nivel que nos movemos en Bachillerato y son muchos los casos que se nos pueden presentar. Por lo general y, en las integrales que nos encontraremos en este curso, suele funcionar alguna de las siguientes estrategias, que recomendamos probar en este orden:

1º) Hacer un cambio de variable, llamando al radicando t^n, siendo n el índice de la raíz. En el caso de que haya varias raíces en el integrando, tomaremos como n el mínimo común múltiplo de los índices.

2º) A veces, aunque son escasas, suele funcionar también un cambio de variable llamando t al radicando sin más.

3º) Para determinadas integrales, se pueden hacer los siguientes cambios de variable de tipo trigonométrico:

- $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx \to x=a\,\text{sen}\,t$ o bien $x=a\cos t$
- $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})\,dx \to x=a\,\text{tg}\,t$

- $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx \rightarrow x = a\sec t$

Como siempre $R(x,\sqrt{x^2-a^2})$ representa una función racional.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 14: $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx = \left\| \begin{matrix} x=t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right\| = \int \frac{1+t}{1-t}2tdt = -2\int \frac{t^2+t}{t-1}dt = -2\left(\int (t+2)dt + 2\int \frac{dt}{t-1} \right) =$
$= -t^2 - 4t - 4\ln|t-1| + C = -x - 4\sqrt{x} - 4\ln|\sqrt{x}-1|$

Ejemplo 15: $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}dx = \left\| \begin{matrix} 1+2x = t^3 \rightarrow x = \frac{t^3-1}{2} \\ 2dx = 3t^2dt \end{matrix} \right\| = \int \frac{\left(\frac{t^3-1}{2}\right)^2}{t}\cdot\frac{3t^2}{2}dt = \frac{3}{8}\int t\left(t^3-1\right)^2 dt =$

$= \frac{3}{8}\int \left(t^7 - 2t^4 + t\right)dt = \frac{3}{8}\left(\frac{t^8}{8} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^2}{2}\right) + C = \frac{3}{8}t^2\left(\frac{t^6}{8} - \frac{2t^3}{5} + \frac{1}{2}\right) + C = \text{(desahemos el cambio)} =$

$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{(1+2x)^2}\left(\frac{(1+2x)^2}{8} - \frac{2(1+2x)}{5} + \frac{1}{2}\right) + C$

Ejemplo 16: $\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left\| \begin{matrix} x = 2\operatorname{sen} t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{matrix} \right\| = \int \sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = 4\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cdot\cos t\,dt =$

$4\int \cos^2 t\,dt = 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2\int (1+\cos 2t)dt = 2t + \operatorname{sen} 2t + C = 2t + 2\operatorname{sen} t\cos t + C =$
$= 2t + 2\operatorname{sen} t\cdot\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = 2\arcsen\frac{x}{2} + x\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C = 2\arcsen\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$

Se propone la **actividad 7**

10.- ACTIVIDADES

ACTIVIDADES INTERCALADAS EN LA TEORÍA

Actividad 1: Efectúa las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int 2dx$ b) $\int \sqrt{2}\,dx$ c) $\int 2x\,dx$ d) $\int x\,dx$ e) $\int 3x\,dx$ f) $\int \frac{x}{5}dx$ g) $\int x^5 dx$

h) $\int -6x^4 dx$ i) $\int \frac{1}{x^3}dx$ j) $\int \frac{-7}{x^3}dx$ k) $\int (x+2)^4\,dx$ l) $\int \frac{5}{(x-3)^3}dx$ m) $\int \sqrt{x}\,dx$

n) $\int \frac{1}{\sqrt{x-5}}dx$ ñ) $\int \frac{3}{\sqrt{5x}}dx$ o) $\int \sqrt[5]{x^2}dx$ p) $\int \frac{1}{5x}dx$ q) $\int \frac{dx}{2x+6}$ r) $\int 2\cos x\,dx$ s) $\int e^{x+1}dx$

t) $\int e^{2x}dx$ u) $\int \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx$ v) $\int \operatorname{tg}x\cdot\sec x\,dx$ w) $\int 3^{x+1}dx$ x) $\int \operatorname{tg}^2 2x\,dx$ y) $\int \operatorname{tg}x\,dx$

Actividad 2: Halla el valor de las siguientes integrales por descomposición:

a) $\int (3x^3-5x^2+4x-7)dx$ b) $\int \frac{7x^4-5x^2+3x-4}{x^2}dx$ c) $\int\left(\frac{1}{x^2}-1\right)dx$ d) $\int \frac{x^3}{x-2}dx$

e) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{5x^3}}{3x}dx$ f) $\int \frac{x+1}{x}dx$ g) $\int (3x-5\operatorname{cotg}x)dx$ h) $\int \frac{1}{1-\cos x}dx$

i) $\int (5\cos x+3^x)dx$ j) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$ k) $\int \frac{3x-1}{1+x^2}dx$ l) $\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5}dx$

Actividad 3: Halla el valor de las siguientes integrales mediante un cambio de variable:

a) $\int \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x+1}}dx$ b) $\int \frac{2x}{1+x^4}dx$ c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx$ d) $\int x^2\cdot e^{x^3-2}dx$

e) $\int (2x-3)(x^2-3x)^7dx$ f) $\int \frac{2x^3-3x^2}{x^4-2x^3+1}dx$ g) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ h) $\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx$

i) $\int x\cos(3x^2-1)dx$ j) $\int \frac{5^{\ln x}}{x}dx$ k) $\int (1+e^x)e^{x+1}dx$ l) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

m) $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$ n) $\int \frac{7x}{\sqrt{1-3x^4}}dx$ ñ) $\int \frac{x^3dx}{\cos^2(x^4+1)}$ o) $\int \frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\operatorname{sen}x+\cos x}dx$

p) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ q) $\int \frac{1+\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}dx$ r) $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ s) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Actividad 4: Halla el valor de las siguientes integrales aplicando el método de integración por partes:

a) $\int x\cos x\,dx$ b) $\int x^3\ln x\,dx$ c) $\int x\operatorname{arctg}x\,dx$ d) $\int e^x\operatorname{sen}x\,dx$ e) $\int e^x\cos x\,dx$

f) $\int x^2\operatorname{sen}x\,dx$ g) $\int \operatorname{arctg}x\,dx$ h) $\int \operatorname{arcsen}x\,dx$ i) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

Actividad 5: Halla el valor de las siguientes integrales racionales:

a) $\int \frac{x^3+4x^2-10x+7}{x^3-7x-6}dx$ b) $\int \frac{3x^2-5x+1}{x^3}dx$ c) $\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}dx$ d) $\int \frac{x-3}{x^3-x^2-x+1}dx$

e) $\int \frac{x^3-4}{x^2-1}dx$ f) $\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x-1)}dx$ g) $\int \frac{x^4+1}{x^3+x^2-5x+3}dx$ h) $\int \frac{x+1}{x^3+6x^2+9x}dx$

i) $\int \frac{dx}{x^3+3x^2-x-3}$ j) $\int \frac{x-2}{x^3-5x^2+8x-4}dx$ k) $\int \frac{x^3}{x^3-5x^2+8x-4}dx$

Actividad 6: Halla el valor de las siguientes integrales trigonométricas:

a) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$ b) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$ c) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cdot \cos^3 x}$ d) $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\operatorname{sen} x + 5}$

e) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ f) $\int \frac{dx}{9\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$ g) $\int \operatorname{sen}^4 x \cdot \operatorname{cotg}^3 x\, dx$

h) $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^3 x} dx$ i) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x} dx$ j) $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$ k) $\int \cos^4 2x\, dx$

l) $\int \operatorname{sen} 5x \cdot \operatorname{sen} x\, dx$ m) $\int \cos 4x \cdot \cos 6x\, dx$ n) $\int \operatorname{tg}^3 x \cdot \sec^2 x\, dx$

Actividad 7: Halla el valor de las siguientes integrales irracionales:

a) $\int x^2 \sqrt{4-4x^2}\, dx$ b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+2x^2}}$ c) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{3+2x^2}}$ d) $\int \frac{\sqrt{2x^2-8}}{x} dx$ e) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$

f) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\, dx$ g) $\int \sqrt{4-9x^2}\, dx$ h) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$ i) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

Actividad 8: Halla el valor de las siguientes integrales:

a) $\int \frac{5x^4+6x}{x^5+3x^2+1} dx$ b) $\int \frac{x \cdot e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ c) $\int \frac{dx}{3+2\operatorname{sen} x + \cos x}$ d) $\int x \cdot \operatorname{sen}\left(x^2+4\right) dx$

e) $\int 3x \cdot e^x\, dx$ f) $\int x \cdot \sqrt{1+3x^2}\, dx$ g) $\int \operatorname{sen}^2(x+1)\cos^2(x+1)\, dx$ h) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

i) $\int e^{2x+1} \operatorname{sen}(2x+1)\, dx$ j) $\int \left(1+e^x\right)^3 \cdot e^x\, dx$ k) $\int \operatorname{sen} 6x \cdot \cos 3x\, dx$ l) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

m) $\int \frac{\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt{x}} dx$ n) $\int (x-1)\sqrt{x-1}\, dx$ ñ) $\int \frac{x^2}{x^3+x} dx$ o) $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x\cos^3(\ln x)} dx$

p) $\int \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) dx$ q) $\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$ r) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x} dx$ s) $\int x^3 \operatorname{sen}(x-3)\, dx$

t) $\int \frac{7}{5+\cos x} dx$ u) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$ v) $\int \frac{dx}{x\operatorname{sen}^2(\ln x)}$ w) $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx$

x) $\int \frac{e^x-3e^{2x}}{1+e^x} dx$ y) $\int (x-1)\operatorname{arctg} x\, dx$ z) $\int \frac{x-2}{\sqrt{1+x}} dx$

Actividad 9: Halla la función cuya derivada sea la siguiente y que pase por el punto dado:

a) $f'(x) = e^{3x}$ pasando por el punto $(0,1)$

b) $g'(x) = (x-1)^2$ pasando por el punto $(0,0)$

Actividad 10: Determina la función f tal que $f''(x) = -2\operatorname{sen} 2x$; $f(0)=1$ y $f(\pi/2)=0$

Actividad 11: Calcula la función f definida en $(1,+\infty)$ cuya derivada es $y' = \dfrac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2}$ y cuya gráfica pasa por el punto $(2, \ln 4)$.

Actividad 12: Halla razonadamente la expresión de una función f de la que se sabe que su derivada segunda es la función $g(x) = x + 1$, sabiendo también que su gráfica pasa por el punto $(2,1)$ y que la recta tangente en dicho punto es $3x - y = 5$

Actividad 13: Calcula el valor de la integral $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} dx$ haciendo el cambio de variable $t = \cos x$. Después, halla el valor de la misma integral utilizando el cambio $z = \operatorname{tg} x$. ¿Se obtiene el mismo resultado? Explica qué es lo que ocurre.

Actividad 14: Encuentra la familia de curvas cuyas pendientes de las rectas tangentes a las mismas en cualquier punto de abscisa x vienen dadas por la función $f(x) = xe^{2x}$. De entre todas ellas, determina la que pasa por el punto $A(0,2)$.

ACTIVIDADES DE SELECTIVIDAD

Actividad 15: (2003) Sea $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-1)\ln(x)$ donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, -3/2)$.

Actividad 16: (2003) Se sabe que la función $f : (0,3) \to \mathbb{R}$ es derivable en todo punto de su dominio, siendo $f'(x) = \begin{cases} x - 1 & si \;\; 0 < x \le 2 \\ -x + 3 & si \;\; 2 < x < 3 \end{cases}$ y que $f(1) = 0$.

Halla la expresión analítica de f.

Actividad 17: (2003) Sea $\ln(1 - x^2)$ el logaritmo neperiano de $1 - x^2$ y sea $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(1 - x^2)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$.

Actividad 18: (2004) Halla una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su gráfica pase por el punto M(0,1), que la tangente en el punto M sea paralela a la recta $2x - y + 3 = 0$ y que $f''(x) = 3x^2$.

Actividad 19: (2004) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-1)e^{2x}$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, e^2)$.

Actividad 20: (2004) De la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ se sabe que $f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2)=0$.

a) Determina f.
b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

Actividad 21: (2005) Calcula la integral $\displaystyle\int\frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2}dx$

Actividad 22: (2005) Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int\cos(5x+1)dx$ b) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}dx$ c) $\displaystyle\int xe^{-3x}dx$

Actividad 23: (2005) De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\operatorname{sen}(2x)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$.

Actividad 24: (2006) Calcula:

a) $\displaystyle\int\frac{5x^2-x-160}{x^2-25}dx$ b) $\displaystyle\int(2x-3)\cdot\operatorname{tg}\left(x^2-3x\right)dx$ siendo tg la función tangente.

Actividad 25: (2006) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=12x-6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisas $x=2$ tiene de ecuación $4x-y-7=0$.

Actividad 26: (2006) Calcula $\displaystyle\int\left(x^2-1\right)e^{-x}\,dx$

Actividad 27: (2006) Sea $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ una función tal que su función derivada viene dada por $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x & si\ \ 0<x<3\\ 2x-8 & si\ \ 3\le x<4\end{cases}$

a) Determina la expresión de f sabiendo que $f(1)=\dfrac{16}{3}$
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

Actividad 28: (2007) Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que su derivada viene dada por $f'(x)=x^2+x-6$ y que el valor que alcanza f en su punto de máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto de mínimo (relativo).

Actividad 29: (2007) Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=Ln\left(1+x^2\right)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas (Ln denota logaritmo neperiano).

Actividad 30: (2007) Sea $I=\int \frac{2}{2-e^x}dx$.

a) Expresa I haciendo el cambio de variable $t=e^x$.
b) Calcula I.

Actividad 31: (2007) Calcula:

a) $\int \frac{3x+4}{x^2+1}dx$ b) $\int x\cos(2x)dx$

Actividad 32: (2007) Determina la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=x^2-1$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es la recta $y=1$.

Actividad 33: (2008) Considera las funciones $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow\mathbb{R}$ y $g:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}$ y $g(x)=x^3\ln x$ (ln denota logaritmo neperiano)

a) Halla la primitiva de f que toma el valor 1 cuando $x=\frac{\pi}{3}$ (se puede hacer el cambio de variable $t=\cos x$).

b) Calcula $\int g(x)dx$.

Actividad 34: (2009) Sea f función definida por $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$. Halla la primitiva F de f que cumple que $F(0)=3$. (Sugerencia: utiliza el cambio de variable $t=\frac{3}{2}x^2$)

Actividad 35: (2010) Sea $f:(-2,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln(x+2)$. Halla una primitiva F de f que verifique $F(0)=0$. (ln denota logaritmo neperiano).

Actividad 36: (2010) Sea $I=\int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}dx$.

a) Expresa I haciendo el cambio de variable $t^2=e^{-x}$.
b) Determina I.

Actividad 37: (2010) Sea la función f dada por $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$ para $x\neq 1$ y $x\neq 0$. Determina la primitiva F de f tal que $F(1)=1$.

Actividad 38: (2011) Sea $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x(1-\ln x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $P(1,1)$.

Actividad 39: (2011) Determina la función $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=\frac{1}{x}$ y su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,1)$.

Actividad 40: (2011) Calcula: $\int\frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}dx$

Actividad 41: (2011) Halla: $\int\frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}dx$. Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t=e^x$.

Actividad 42: (2012) Sea f la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\cos x$. Determina la primitiva de f que pasa por el punto $(\pi,0)$.

11.- SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES

Actividad 1:

a) $2x+C$ b) $\sqrt{2}x+C$ c) x^2+C d) $\frac{x^2}{2}+C$ e) $\frac{3x^2}{2}+C$ f) $\frac{x^2}{10}+C$

g) $\frac{x^2}{6}+C$ h) $\frac{-6x^5}{5}+C$ i) $\frac{-1}{2x^2}+C$ j) $\frac{7}{2x^2}+C$ k) $\frac{(x+2)^5}{5}+C$ l) $\frac{-5}{2(x-3)^2}+C$

m) $\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$ n) $2\sqrt{x-5}+C$ ñ) $6\sqrt{\frac{x}{5}}+C$ o) $\frac{5x\sqrt[5]{x^2}}{7}+C$ p) $\frac{1}{5}\ln|x|+C$

q) $\frac{1}{2}\ln|2x+6|+C$ r) $2\operatorname{sen}x+C$ s) $e^{x+1}+C$ t) $\frac{1}{2}e^{2x}+C$ u) $-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+C$

v) $\sec x+C$ w) $\frac{3^{x+1}}{\ln 3}+C$ x) $\frac{\operatorname{tg}2x}{2}-x+C$ y) $-\ln|\cos x|+C$

Actividad 2:

a) $\frac{3}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+2x^2-7x+C$ b) $\frac{7}{3}x^3-5x+3\ln|x|+\frac{4}{x}+C$ c) $\frac{-1}{x}-x+C$

d) $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+8\ln|x-2|+C$ e) $\sqrt[3]{x}+\frac{2}{9}x\sqrt{5x}+C$ f) $x+\ln|x|+C$

g) $\frac{3x^2}{2}-5\ln|\operatorname{sen}x|+C$ h) $-\operatorname{cotg}x-\operatorname{cosec}x+C$ i) $5\operatorname{sen}x+\frac{3^x}{\ln 3}+C$

j) $x-2\operatorname{arctg}x+C$ k) $\frac{3}{2}\ln(1+x^2)-\operatorname{arctg}x+C$ l) $\frac{1}{6}\ln|3x^2-6x+5|+C$

Actividad 3:

a) $2\sqrt{x^3+2x+1}+C$ b) $\operatorname{arctg}x^2+C$ c) $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}3x+C$ d) $\frac{1}{3}e^{x^3-2}+C$

e) $\dfrac{\left(x^2-3x\right)^8}{8}+C$ f) $\dfrac{1}{2}\ln\left|x^4-2x^3+1\right|+C$ g) $\dfrac{-1}{\ln|x|}+C$ h) $\dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{4}+C$

i) $\dfrac{1}{6}\operatorname{sen}\left(3x^2-1\right)+C$ j) $\dfrac{5^{\ln|x|}}{\ln 5}+C$ k) $\dfrac{1}{2}e\left(1+e^x\right)^2+C$ l) $\dfrac{1}{2}\ln^2|x|+C$

m) $\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)+C$ n) $\dfrac{7}{2\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{3}x^2\right)+C$ ñ) $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}\left(x^4+1\right)+C$

o) $-\ln\left|\operatorname{sen} x+\cos x\right|+C$ p) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$ q) $\dfrac{(1+\operatorname{tg} x)^2}{2}+C$ r) $-2\cos\sqrt{x}+C$

s) $-\sqrt{1-x^2}+C$

Actividad 4:

a) $\cos x+x\operatorname{sen} x+C$ b) $\dfrac{x^4\ln|x|}{4}-\dfrac{x^4}{16}+C$ c) $\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\dfrac{x}{2}+C$

d) $\dfrac{e^x(\operatorname{sen} x-\cos x)}{2}+C$ e) $\dfrac{e^x(\operatorname{sen} x+\cos x)}{2}+C$ f) $-x^2\cos x+2x\operatorname{sen} x+2\cos x+C$

g) $x\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$ h) $x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$ i) $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$

Actividad 5:

a) $x+7\ln|x+2|+2\ln|x-3|-5\ln|x+1|+C$ b) $3\ln|x|+\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+C$ c) $\dfrac{-4x-11}{2(x+3)^2}+C$

d) $\ln|x-1|+\dfrac{1}{x-1}-\ln|x+1|+C$ e) $\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}\ln|x-1|+\dfrac{5}{2}\ln|x+1|+C$

f) $\dfrac{1}{4}\ln|x-1|-\dfrac{1}{4}\ln|x+1|-\dfrac{5}{2(x+1)}+C$ g) $\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{13}{8}\ln|x-1|-\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{35}{8}\ln|x+3|+C$

h) $\dfrac{1}{9}\ln|x|-\dfrac{1}{9}\ln|x+3|-\dfrac{2}{3(x+3)}+C$ i) $\dfrac{-1}{4}\ln|x+1|+\dfrac{1}{8}\ln|x-1|+\dfrac{1}{8}\ln|x+3|+C$

j) $-\ln|x-1|+\ln|x-2|+c$ k) $x+\ln|x-1|+4\ln|x-2|-\dfrac{8}{x-2}+C$

Actividad 6:

a) $\dfrac{\cos^5 x}{5}-\dfrac{\cos^3 x}{3}+C$ b) $\dfrac{\ln|1-\cos x|-\ln|1+\cos x|}{2}+C$ c) $\ln|\operatorname{sen} x|-\ln|\cos x|+\dfrac{\sec^2 x}{2}+C$

d) $\dfrac{-2}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)+3}+C$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|1+\sqrt{2}+\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|-\ln\left|1-\sqrt{2}+\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|\right)+C$

f) $\dfrac{1}{6}\left(\ln|3+\operatorname{tg} x|-\ln|-3+\operatorname{tg} x|\right)+C$ h) $\dfrac{-1}{4}\cos^4 x+C$ i) $\sec x+\cos x+C$

i) $3\ln|2+\cos x|+\dfrac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+C$ j) $-\cos x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\dfrac{1}{5}\cos^5+C$

k) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{8}\operatorname{sen}4x+\frac{1}{64}\operatorname{sen}8x+C$ l) $\frac{1}{8}\operatorname{sen}4x-\frac{1}{12}\operatorname{sen}6x+C$

m) $\frac{1}{20}\operatorname{sen}10x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+C$ n) $\frac{1}{4}\sec^4 x-\frac{1}{2}\sec^2 x+C$

Actividad 7:

a) $\frac{1}{4}\operatorname{arcsen}x-\frac{1}{16}\operatorname{sen}\left(4\operatorname{arcsen}x\right)+C$ b) $\frac{\ln\left|\sqrt{3+2x^2}-\sqrt{3}\right|-\ln\left|\sqrt{3+2x^2}+\sqrt{3}\right|}{2\sqrt{3}}+C$

c) $\frac{-\sqrt{2x^2+3}}{3x}+C$ d) $\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{8}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+C$ e) $\sqrt{x^2-4}-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+C$

f) $\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right|-\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right|+(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C$ g) $\frac{2}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-9x^2}+C$

h) $\ln\left|\sqrt{1-x}+1\right|-\ln\left|\sqrt{1-x}-1\right|+C$ i) $\frac{2x\sqrt{x}}{3}-x+4\sqrt{x}-4\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C$

Actividad 8:

a) $\ln\left|x^5+3x^2+1\right|+C$ b) $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arcsen}x}\cdot\left(x-\cos\left(\operatorname{arcsen}x\right)\right)+C$ c) $\operatorname{arctg}\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$

d) $\frac{-1}{2}\cos\left(x^2+4\right)+C$ e) $3e^x\left(x-1\right)+C$ f) $\frac{1}{9}\left(1+3x^2\right)\sqrt{1+3x^2}+C$

g) $\frac{x}{8}-\frac{1}{32}\cos\left(4x+4\right)+C$ h) $\operatorname{sen}\left(\ln x\right)+C$ i) $\frac{1}{4}e^{2x+1}\left(\operatorname{sen}\left(2x+1\right)-\cos\left(2x+1\right)\right)+C$

j) $\frac{1}{4}\left(e^x+1\right)^4+C$ k) $\frac{-1}{12}\cos 9x-\frac{1}{6}\cos 3x+C$ l) $\frac{2x\sqrt{x}}{3}+x+C$

m) $\frac{10}{11}x\sqrt[10]{x}+\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C$ n) $\frac{2}{5}\left(x-1\right)^2\sqrt{x-1}+C$ ñ) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$

o) $\frac{1}{2}\sec^2\left(\ln x\right)+C$ p) $\left(x-1\right)\ln\left|x-1\right|-\left(x+1\right)\ln\left|x+1\right|+C$ q) $\sqrt{2}\operatorname{sen}x+C$

r) $\frac{1}{3}(\ln\left|e^x-3\right|-x)+C$ s) $3\left(x^2-2\right)\operatorname{sen}\left(x-3\right)+\left(6x-x^3\right)\cos\left(x-3\right)+C$

t) $\frac{7\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$ u) $\frac{1}{4}\left(\ln\left|\sqrt{4+x^2}-2\right|-\ln\left|\sqrt{4+x^2}+2\right|\right)+C$ v) $-\operatorname{cotg}\left(\ln x\right)+C$

w) $\frac{-1}{6}\ln|x|+\frac{3}{10}\ln|x-2|-\frac{2}{15}\ln|x+3|+C$ x) $-3e^x+4\ln\left(1+e^x\right)+C$

y) $\frac{1}{2}\left(x-1\right)^2\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x-\ln\left(x^2+1\right)+C$ z) $\frac{2\sqrt{x+1}}{3}\left(x-8\right)+C$

Actividad 9:

a) $f\left(x\right)=\frac{2+e^{3x}}{3}$ b) $g\left(x\right)=\frac{\left(x-1\right)^3+1}{3}$

Actividad 10: $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x-\frac{2}{\pi}x+1$

Actividad 11: $\frac{x^2-3}{2}-\frac{1}{x}+2\ln|x|-2\ln|x-1|$

Actividad 12: $f(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{3}$

Actividad 13: De la 1ª forma sale $\frac{\sec^2 x}{2}+C$ mientras que de la 2ª forma se obtiene $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+C$. No se obtiene el mismo resultado, cosa que es totalmente normal ya que existen infinitas primitivas y es evidente que estas dos se diferencian en una constante ya que $\frac{\sec^2 x}{2}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}=\frac{1+\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{2}=\frac{1}{2}$

Actividad 14: La familia de curvas es $f(x)=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+C$ y la que pasa por el punto A es $f(x)=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+\frac{9}{4}$

Actividad 15: $F(x)=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x-\frac{1}{4}x^2+x-\frac{9}{4}$

Actividad 16: $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2} & si\ \ 0<x\le 2\\ \frac{-x^2}{2}+3x-\frac{7}{2} & si\ \ 2<x<3\end{cases}$

Actividad 17: $F(x)=x\ln\left(1-x^2\right)-2x+\ln|x+1|-\ln|x-1|+1$

Actividad 18: $f(x)=\frac{x^4}{4}+2x+1$

Actividad 19: $F(x)=\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)e^{2x}+\frac{5}{4}e^2$

Actividad 20:

a) $f(x)=\frac{-3}{x+1}+1$ b) $F(x)=-3\ln(x+1)+x+1$

Actividad 21: $\frac{3x^2}{2}+4x+3\ln|x-2|-3\ln|x+1|+C$

Actividad 22:

a) $\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5x+1)+C$ b) $\frac{-2}{\sqrt{x+2}}+C$ c) $-\frac{3x+1}{9e^{3x}}+C$

Actividad 23: $F(x)=\frac{1}{4}\left(\left(1-2x^2\right)\cos 2x+2x\operatorname{sen}2x+3\right)$

Actividad 24:

a) $5x-4\ln|x-5|+3\ln|x+5|+C$ b) $-\ln\left|\cos\left(x^2-3x\right)\right|+C$

Actividad 25: $f(x)=2x^3-3x^2-8x+13$

Actividad 26: $-e^{-x}(x+1)^2+C$

Actividad 27:

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{3}+5 & si\ \ 0<x<3\\ -x^2+8x-7 & si\ \ 3\le x\le 4\end{cases}$ b) $2x-3y+14=0$

Actividad 28: $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+\frac{71}{4}$

Actividad 29: $f(x)=x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2\operatorname{arctg}x$

Actividad 30:

a) $I=\int\frac{2t\,dt}{t(2-t)}$ b) $I=x-\ln\left|2-e^x\right|+C$

Actividad 31:

a) $\frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right)+4\operatorname{arctg}x+C$ b) $\frac{x\operatorname{sen}2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}+C$

Actividad 32: $f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{2}+1$

Actividad 33:

a) $F(x)=\frac{1}{2\cos^2 x}-1$ b) $\frac{x^4\ln x}{4}-\frac{x^4}{16}+C$

Actividad 34: $F(x)=\frac{1}{6}\operatorname{arcsen}\frac{3x^2}{2}+3$

Actividad 35: $F(x)=(x+2)\ln(x+2)-x-2\ln 2$

Actividad 36:

a) $I = \int \frac{-10}{t(t+1)} dt$

b) $I = -10 \ln \sqrt{e^{-x}} + 10 \ln\left(1 + \sqrt{e^{-x}}\right) + C$

Actividad 37: $F(x) = \ln|x| - \ln|x+1| + 1 + \ln 2$

Actividad 38: $F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{1}{4}$

Actividad 39: $f(x) = x \ln x - x + 2$

Actividad 40: $\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{4}{3} \ln|x+2| + C$

Actividad 41: $\frac{1}{4} \ln|e^x - 1| - \frac{1}{4} \ln\left(e^x + 1\right) + \frac{1}{2\left(e^x + 1\right)} + C$

Actividad 42: $F(x) = \left(x^2 - 2\right) \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2\pi$

NOTA IMPORTANTE: Las actividades de la 15 a la 42 son de Selectividad. En las dos páginas web siguientes se encuentran las soluciones de todos los exámenes de forma detallada:

- ***http://emestrada.wordpress.com/2010/02/20/matematicas-ii-problemas-selectividad-resueltos/***
- ***http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/***