UNIDAD 1: LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

ÍNDICE DE LA UNIDAD

1.- INTRODUCCIÓN.

La unidad que vamos a comenzar, junto con la de Derivadas e Integrales, forman el núcleo temático de ***Análisis matemático****, una amplia y compleja rama de la Matemática moderna que ocupó gran parte del trabajo de científicos desde el siglo XVII, tan ilustres como Wallis, Barrow,* ***Newton o Leibnitz.*** *A estos dos últimos se les considera los "padres" del Análisis moderno y se deben muchos de los avances futuros que se dieron.*

Esta rama de la matemática fue ya iniciada en tus estudios en 1º de Bachillerato, por lo que debes repasar los siguientes **contenidos previos**:

- Concepto de función. Operaciones con funciones, composición y función inversa.
- Características de las funciones: Dominio, recorrido, cortes con los ejes, asíntotas, simetrías, monotonía, extremos, curvatura, puntos de inflexión y periodicidad.
- Funciones elementales. Características gráficas de las mismas.

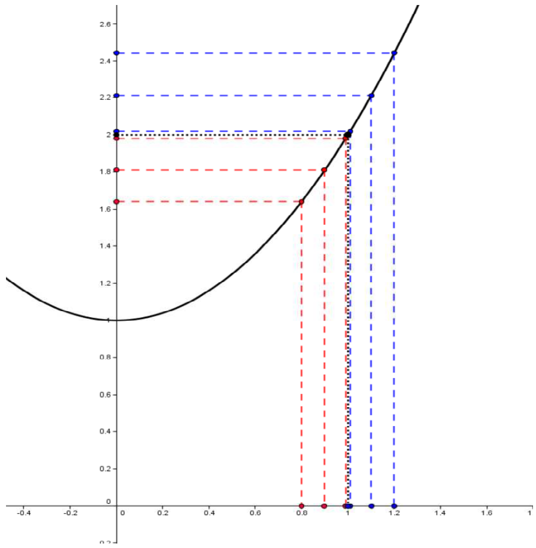
Para ello, se proponen las ***actividades de la 1 a la 8.***

2.- LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. LÍMITES LATERALES.

A lo largo del bloque de Análisis del curso pasado, se vio la idea intuitiva de límite de una función en un punto. Veamos un ejemplo que ilustre la situación:

Ejemplo 1: Consideremos la función $f(x)=x^2+1$ y veamos qué ocurre con las imágenes de valores del dominio cercanos, por ejemplo, al valor 1
La siguiente gráfica corresponde a los valores en los que hemos evaluado la función:

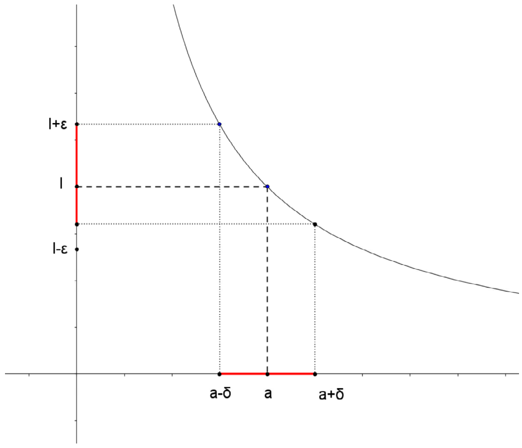
x	0,8	0,9	0,99	1,2	1,1	1,01
f(x)	1,64	1,81	1,9201	2,44	2,21	2,0201



Como podemos observar en la gráfica, es evidente que a medida que nos acercamos al valor de la abscisa x=1, sus correspondientes imágenes, se van aproximando cada vez más a la ordenada y=2. Además, es interesante observar también que esto ocurre tanto por valores menores (por la derecha) como por valores mayores (por la izquierda) de la abscisa x=1.

*De esta idea de "acercamiento" a un valor de la ordenada (y) a medida que nos aproximamos a una abscisa (x) concreta por la izquierda o derecha, se deriva la definición científica de **límite** que, a continuación formalizaremos.*

<u>Definición 1:</u> Sea $f(x)$ una función definida en un entorno reducido de $x=a$. Se dice que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a es l, o que converge a l,** si: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; / \;\; si \; |x-a| < \delta \;\Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ se aproxime a l tanto como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente próximos al valor $x=a$. Lo escribiremos $\underset{x \to a}{Lím} f(x) = l$



<u>Nota 1:</u> Hemos de tener en cuenta que la definición de límite no depende del valor de la función en $x=a$, es decir, no tiene porqué cumplirse que $f(x)=l$, de hecho, ni siquiera tiene que estar definida la función en $x=a$. La idea de límite analiza lo que ocurre con las imágenes cuando nos acercamos, sin llegar a alcanzar (en principio) el valor $x=a$.

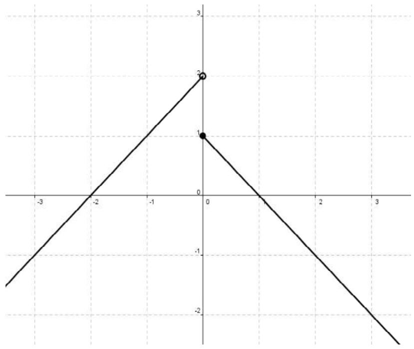
En determinadas funciones, como por ejemplo las definidas a trozos, los valores que toma alrededor de un punto, dependen si nos acercamos por la izquierda o por la derecha y el comportamiento puede ser muy distinto en ambas direcciones.

*Por ello, además de las definiciones de límite, conviene llevar a cabo definiciones que tengan en cuenta dicha circunstancia. Nos referimos a las definiciones de **límites laterales** que vamos ver a continuación.*

<u>Definición 2:</u> Sea $f(x)$ una función definida en un entorno reducido a la izquierda de $x=a$. Se dice que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a por la izquierda,** si: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; / \;\; si \; a-\delta < x < a \;\Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$,es decir, si podemos hacer que $f(x)$ se aproxime a l tanto como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente próximos al valor $x=a$, a través de valores menores que a. Lo escribiremos $\underset{x \to a^-}{Lím} f(x) = l$ **.**

<u>Definición 3:</u> Sea $f(x)$ una función definida en un entorno reducido a la izquierda de $x=a$. Se dice que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a por la derecha es l** si: $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ /\ si\ a<x<a+\delta\ \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$,es decir, si podemos hacer que $f(x)$ se aproxime a l tanto como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente próximos al valor $x=a$, a través de valores mayores que a. Lo escribiremos $\underset{x\to a^+}{Lím} f(x)=l$.

<u>Ejemplo 2:</u> Sea $f(x)=\begin{cases} x+2 & si\ \ x<0 \\ -x+1 & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$.



Es fácil ver que $\begin{cases} \underset{x\to 0^-}{Lím} f(x)=\underset{x\to 0^-}{Lím}(x+2)=2 \\ \underset{x\to 0^+}{Lím} f(x)=\underset{x\to 0^+}{Lím}(-x+1)=1 \end{cases}$

<u>Nota 2:</u> Una de las nociones fundamentales en esta unidad y que ya estudiamos durante el curso pasado es la de **continuidad**. Intuitivamente, se puede decir que una función es continua en un punto $x=a$ si su gráfica se puede trazar alrededor de dicho valor sin levantar el lápiz del papel, es decir, de un solo trazo. Como ya veremos más adelante, esto se traduce en que $\exists\underset{x\to a}{Lím} f(x)=f(a)$.

Ahora bien, la inmensa mayoría de las funciones elementales que ya conocemos son continuas en la mayoría de los puntos de su dominio, así pues, es evidente que un buen método para comenzar a calcular límites sencillos es empezar **sustituyendo x por a en la expresión de la función** ya que, cuando exista $f(a)$ será el valor del límite.

<u>Ejemplo 3:</u> Sea $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{2}$. Veamos algunos de sus límites puntuales:

a) $\underset{x\to 0}{Lím} f(x)=\dfrac{0-1}{2}=\dfrac{-1}{2}$

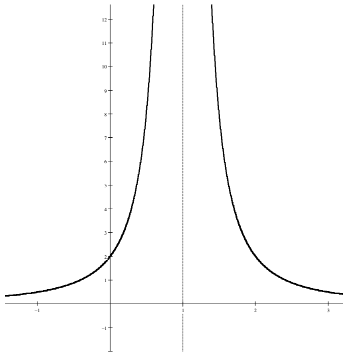
b) $\underset{x\to 1}{Lím} f(x)=\dfrac{3-1}{2}=1$

c) $\underset{x\to -2}{Lím} f(x)=\dfrac{12-1}{2}=\dfrac{11}{2}$

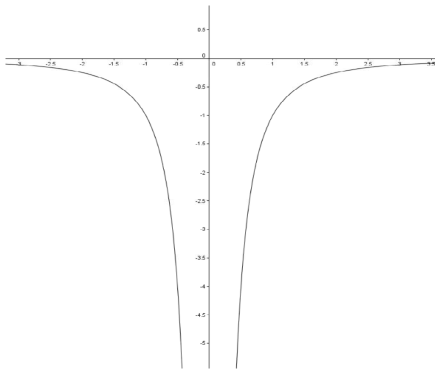
<u>Proposición 1:</u> Sea $f(x)$ una función definida en un entorno de $x=a$. Entonces, $f(x)$ tiene límite l cuando x tiende hacia a si, y solo sí, existen los dos límites laterales y ambos valen l. Abreviadamente: $\underset{x\to a}{Lím} f(x)=l \Leftrightarrow \underset{x\to a^-}{Lím} f(x)=l=\underset{x\to a^+}{Lím} f(x)$.

<u>Proposición 2:</u> **(unicidad del límite)** El límite de una función en un punto, en caso de existir, es único.

*Proponemos las **actividades de la 9 a la 11***



<u>Definición 4:</u> Sea $f(x)$ una función definida en un entorno reducido de $x=a$. Se dice que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a es más infinito, o que diverge a más infinito,** si: $\forall M>0\ \ \exists\delta>0\ /\ si\ |x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>M$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ tome valores positivos tan grandes como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente próximos al valor $x=a$. Lo escribiremos $\underset{x\to a}{Lím} f(x)=+\infty$



<u>Definición 5:</u> Sea $f(x)$ una función definida en un entorno reducido de $x=a$. Se dice que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a es menos infinito, o que diverge a menos infinito,** si: $\forall N<0\ \ \exists\delta>0\ /\ si\ |x-a|<\delta \Rightarrow f(x)<N$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ tome valores negativos tan pequeños como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente próximos al valor $x=a$. Lo escribiremos $\underset{x\to a}{Lím} f(x)=-\infty$

<u>Nota 3:</u> De la misma forma que en el límite puntual, el comportamiento del límite depende de lo que ocurra "alrededor" del punto y no del valor en el propio punto. También, de la misma forma que en el caso de límites finitos, se pueden definir los límites laterales y se obtienen resultados análogos a las proposiciones 1 y 2.

<u>Ejemplo 4:</u> Sin más que ir dando valores en la calculadora, podemos observar que:

a) $\underset{x\to 1}{Lím}\dfrac{2}{(x-1)^2}=+\infty$ b) $\underset{x\to 0}{Lím}\dfrac{-3}{x^4}=-\infty$

c) $\underset{x\to 1^-}{Lím}\dfrac{5}{x-1}=-\infty$; $\underset{x\to 1^+}{Lím}\dfrac{5}{x-1}=+\infty \Rightarrow \nexists\, \underset{x\to 1}{Lím}\dfrac{5}{x-1}$

Es interesante que observes que, a diferencia de los dos primeros apartados, en los que sí existe el límite, el tercer apartado carece de límite ya que no coinciden los límites laterales.

Este hecho está bastante relacionado con que el denominador no se encuentra elevado a exponente par, cosa que sí ocurre en los dos primeros casos. Recuerda que mientras que una potencia de exponente par resulta siempre un número positivo, las de exponente impar resultan positivas o negativas en función de la base.

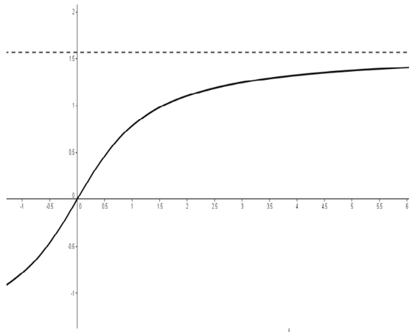
Es este el hecho que provoca la diferencia entre estos apartados y que es de vital importancia recordar para un futuro.

*Proponemos la **actividad 12***

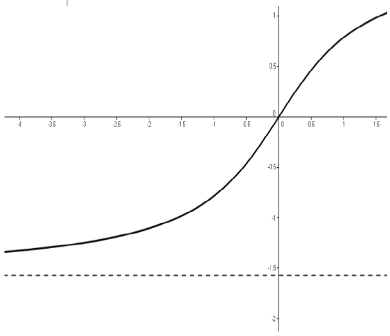
3.- LÍMITES EN EL INFINITO.

En este punto del tema vamos a definir los conceptos de límites en el infinito. Conviene tener en cuenta, antes de empezar, que ya no son límites puntuales como en el apartado anterior y, por tanto, ***no tiene sentido hablar de límites laterales.***

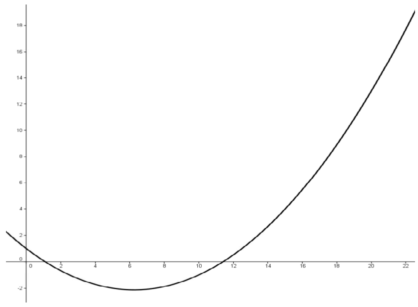
Definición 6: Se dice que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a más infinito es l, o que converge a l,** si: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists M > 0 \ / \ si \ x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ se aproxime a l tanto como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente grandes. Lo escribiremos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$



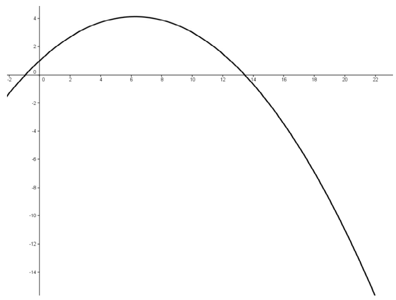
Definición 7: Se dice que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito es l, o que converge a l,** si: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N < 0 \ / \ si \ x < N \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ se aproxime a l tanto como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente pequeños. Lo escribiremos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.



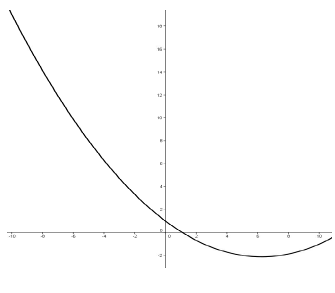
Definición 8: Se dice que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a más infinito es más infinito, o que diverge a más infinito,** si: $\forall M > 0 \ \ \exists N > 0 \ / \ si \ x > N \Rightarrow f(x) > M$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ sea tan grande como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente grandes. Lo escribiremos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

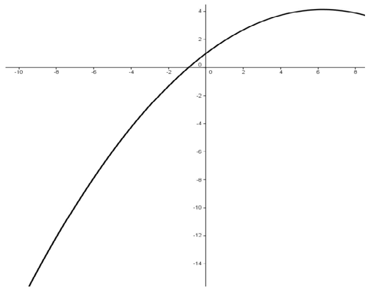


Definición 9: Se dice que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a más infinito es menos infinito, o que diverge a menos infinito,** si: $\forall M > 0 \ \ \exists N < 0 \ / \ si \ x > M \Rightarrow f(x) < N$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ sea tan pequeño como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente grandes. Lo escribiremos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.



Definición 10: Se dice que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito es más infinito, o que diverge a más infinito,** si: $\forall M > 0 \ \ \exists N < 0 \ / \ si \ x < N \Rightarrow f(x) > M$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ sea tan grande como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente pequeños. Lo escribiremos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$





Definición 11: Se dice que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito es menos infinito, o que diverge a menos infinito,** si: $\forall M<0\ \ \exists N<0\ /\ si\ x<M\ \Rightarrow f(x)<N$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ sea tan pequeño como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente pequeños. Lo escribiremos $\underset{x\to-\infty}{Lím} f(x)=-\infty$.

4.- ÁLGEBRA DE LÍMITES. INDETERMINACIONES.

*En este epígrafe de la unidad vamos a analizar las **operaciones elementales con límites**, es decir, haremos una descripción de los resultados de sumas, restas, productos, divisiones y potencias (de base positiva) de funciones de los que se pueden calcular conocidos los resultados de los factores con los que operamos.*

La descripción matemática y las demostraciones de estos resultados, aunque sencillas, son extensas en su escritura, por lo que nos limitaremos a ofrecer los resultados de forma abreviada para su mejor asimilación.

Proposición 3: (Suma)

a) $a+b\to a+b$

b) $a\pm\infty\to\pm\infty$

c) $+\infty+\infty\to+\infty$

d) $-\infty-\infty\to-\infty$

e) $\pm\infty\mp\infty\to ¿?\ (IND)$

Proposición 4: (Producto)

a) $a\cdot b\to a\cdot b$

b) $a\cdot(\pm\infty)\to\pm\infty\ \ (regla\ de\ signos)\ con\ a\neq 0$

c) $0\cdot(\pm\infty)\to ¿?\ \ (IND)$

d) $\pm\infty\cdot(\pm\infty)\to\pm\infty\ \ (regla\ de\ signos)$

Proposición 5: (Cociente)

a) $\frac{a}{b}\to\frac{a}{b}\ \ con\ \ b\neq 0$

b) $\frac{a}{0}\to\pm\infty\ \ (regla\ de\ signos\,/\,laterales)\ con\ a\neq 0$

c) $\frac{0}{0}\to ¿?\ \ (IND)$

d) $\frac{a}{\pm\infty}\to 0$

e) $\frac{0}{\pm\infty}\to 0$

f) $\frac{\pm\infty}{a}\to\mp\infty\ \ (regla\ de\ signos)$

g) $\frac{\pm\infty}{0}\to\mp\infty\ \ (regla\ de\ signos\ /\ laterales)$

h) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\to ¿?\ (IND)$

<u>Proposición 6:</u> (Potencia de base positiva)

a) $a^b \to a^b \;\; con\; a \neq 0$

b) $0^b \to \begin{cases} 0 & si \;\; b>0 \\ +\infty & si \;\; b<0 \\ ¿?\;(IND) & si \;\; b=0 \end{cases}$

c) $a^{+\infty} \to \begin{cases} +\infty & si \;\; a>1 \\ 0 & si \;\; 0<a<1 \\ ¿?\;(IND) & si \;\; a=1 \end{cases}$

d) $a^{-\infty} \to \begin{cases} 0 & si \;\; a>1 \\ +\infty & si \;\; 0<a<1 \\ ¿?\;(IND) & si \;\; a=1 \end{cases}$

e) $+\infty^b \to \begin{cases} +\infty & si \;\; b>0 \\ 0 & si \;\; b<0 \\ ¿?\;(IND) & si \;\; b=0 \end{cases}$

f) $+\infty^{+\infty} \to +\infty$

g) $+\infty^{-\infty} \to 0$

*Según acabamos de ver, existen en total **7 indeterminaciones** que son:* $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0 , ∞^0 *y* 1^∞ *, de las que, entre el curso pasado y este, **abordaremos los métodos de resolución de las 4 primeras**. No obstante, veamos antes algunas actividades de repaso de los casos no indeterminados.*

*Proponemos la **actividad 13***

<u>Nota 4:</u> El límite en el infinito de un polinomio coincide con el límite en el infinito de su monomio líder, es decir, $\underset{x\to\pm\infty}{Lím}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_1 x + a_0\right) = \underset{x\to\pm\infty}{Lím}\; a_n x^n$.

*Durante las siguientes notas repasaremos los **métodos de resolución de las indeterminaciones*** $\infty-\infty$, $\frac{0}{0}$ *y* $\frac{\infty}{\infty}$*. El otro caso que abordaremos:* $0\cdot\infty$ *se resuelve transformándolo en un cociente.*

*Por simplificar la escritura, en el cálculo de límites se suele permitir la escritura de **expresiones que no existen** en el campo numérico, como por ejemplo* $\frac{3}{0}$ *ó* $\frac{+\infty}{7}$. Estas expresiones las escribiremos **entre corchetes** entendiendo que se trata de una aproximación en el límite y no de una operación en la que no tienen cabida.

<u>Nota 5:</u> (Resolución de la indeterminación $\frac{0}{0}$)

Este tipo de indeterminaciones aparece normalmente en expresiones del tipo: $\underset{x\to a}{Lím}\frac{f(x)}{g(x)}$ siendo $f(x)$ *y* $g(x)$ expresiones polinómicas o, eventualmente, expresiones con radicales, una de ellas o ambas. En el caso de las polinómicas, basta simplificar los factores del tipo $x-a$ mediante factorización. Si hay radicales, hay que transformarlos en expresiones sin radicales antes de llevar a cabo lo anterior. Esto se consigue multiplicando numerador y denominador por la expresión conjugada conveniente.

Ejemplo 5: Veamos un ejemplo de cada tipo:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{2x^2-8}{x^2+x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{IND}{=} \lim\limits_{x\to -2} \frac{2(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{2(x-2)}{(x-1)} = \frac{8}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-x}{\sqrt{x+4}-2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{IND}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x^2-x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{(\sqrt{x+4}-2)\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x-1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x+4-4} = -4$

Nota 6: (Resolución de la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$)

Para resolver este tipo de indeterminaciones, utilizaremos que el límite de un polinomio en el infinito coincide con el de su monomio líder (Nota 4).

En el caso concreto de los polinomios el resultado es:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots\ldots b_1 x + b_0} = \begin{cases} \pm\infty & si\ n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & si\ n = m \\ 0 & si\ n < m \end{cases}$$

Ejemplo 6: Veamos un ejemplo de cada tipo:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-3x^4+2x^2-5}{4x^4-7} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-3x^4}{4x^4} = \frac{-3}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-4x+1}{\sqrt{3x^4-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-4x}{\sqrt{3x^4}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-4x}{\sqrt{3}x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-4}{\sqrt{3}x} = \left[\frac{-4}{\infty}\right] = 0$

Nota 7: (Resolución de la indeterminación $\infty - \infty$)

Este tipo de indeterminaciones aparece normalmente en expresiones del tipo: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-g(x))$ siendo alguna de las dos funciones expresiones radicales. Para resolverlas, se transforma en una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada $(f(x)+g(x))$ y procediendo como en la nota 6.

Ejemplo 7:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right)\left(\sqrt{x^2+5}+(x+2)\right)}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+5-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-4x+1}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-4x}{\sqrt{x^2}+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-4x}{2x} = -2$$

*Proponemos la **actividad 14***

Aunque forma parte de la unidad siguiente, un eficaz y muy utilizado resultado en el cálculo de límites es la llamada ***Regla de L'Hôpital*** *o Reglas de L'Hôpital (porque son varias). Como ya se vio en el curso pasado el cálculo de derivadas, podemos utilizar dicha regla en lo que sigue. Veamos su enunciado.*

<u>Proposición 7:</u> (Regla de L'Hôpital): Sean $f(x)$ *y* $g(x)$ funciones derivables en un entorno reducido de $x=a$ tales que $\underset{x\to a}{Lím}\frac{f(x)}{g(x)}$ presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$ *o bien* $\frac{\infty}{\infty}$. Si existe $\underset{x\to a}{Lím}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\underset{x\to a}{Lím}\frac{f(x)}{g(x)}$ y coincide con el anterior. El resultado también es válido para límites en el infinito.

En la práctica, esto supone que en la mayoría de las situaciones en las que se nos presenten indeterminaciones de tipo cociente, podemos derivar numerador y denominador y ver si el límite resultante existe, ya que, en tal caso, coincidirá con el anterior.

<u>Ejemplo 8:</u> Veamos como ejemplo la resolución de los límites ya hechos anteriormente en la unidad:

a) $\underset{x\to -2}{Lím}\frac{2x^2-8}{x^2+x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L'H}{=}\underset{x\to -2}{Lím}\frac{4x}{2x+1}=\frac{-8}{-3}=\frac{8}{3}$

b) $\underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{-3x^4+2x^2-5}{4x^4-7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{L'H}{=}\underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{-12x^3+4x}{16x^3}\overset{L'H}{=}=\underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{-36x^2+4}{48x^2}\overset{L'H}{=}\underset{x\to +\infty}{Lím}\frac{-72x}{96x}=\frac{-72}{96}=\frac{-3}{4}$

Proponemos como actividad la resolución de los límites de la ***actividad 14*** *utilizando la Regla de L'Hôpital.*

<u>5.- ASÍNTOTAS.</u>

El estudio de las asíntotas de una función, que abordaremos a continuación, está íntimamente relacionado tanto con el concepto de ***límite*** *como con la* ***representación gráfica*** *de funciones que trataremos en unidades futuras. Se trata de un aspecto* ***fundamental*** *a la hora de representar funciones y analizar su comportamiento por lo que habrá que prestarle especial atención. Veamos su definición y cálculo.*

<u>Definición 12:</u> Llamamos **asíntota** de una función a toda recta vertical, horizontal u oblicua a la que se acerca indefinidamente la gráfica de la función para puntos indefinidamente alejados del origen de coordenadas.

<u>Proposición 8:</u> (Determinación de asíntotas)

a) **<u>Verticales</u>**: $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=a$ cuando alguno de sus límites laterales en $x=a$ es infinito, es decir, cuando $\underset{x\to a^{\pm}}{Lím}f(x)=\pm\infty$.

b) **<u>Horizontales</u>**: $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y=b$ cuando alguno de sus límites en el infinito es finito, es decir, cuando $\underset{x\to\pm\infty}{Lím}f(x)=b$.

c) **Oblicuas**: $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = mx + n$ cuando:

- $m = \underset{x\to\pm\infty}{Lím}\frac{f(x)}{x}$ es finito y no nulo
- $n = \underset{x\to\pm\infty}{Lím}(f(x) - mx)$ es finito

Ejemplo 9: Sin más que observar su gráfica, podemos ver que la 1ª función de la actividad 6 tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ mientras que la 2ª función de dicha actividad tiene dos asíntotas verticales en $x = -1 \quad y \ en \quad x = 1$ y una oblicua en $y = x$

Nota 8: Antes de continuar hagamos algunas aclaraciones sobre el número de asíntotas que puede tener una función:

- Una función puede tener infinitas asíntotas verticales y el acercamiento a ellas puede ser por la izquierda, por la derecha o por ambas direcciones. Además, los puntos en los que se encuentran las asíntotas suelen ser valores en los que no está definida la función.
- Una función puede tener, como máximo dos asíntotas entre horizontales y oblicuas.
- No puede haber simultáneamente asíntotas horizontales y oblicuas en $+\infty$ ni en $-\infty$. Lo que sí puede darse es que haya una horizontal en un lado y una oblicua en otro. En resumen, sí puede haber simultáneamente horizontal y oblicua pero no en el mismo lado.

Ejemplo 10: Vamos a determinar las asíntotas de las siguientes función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

Verticales: *Sin más que mirar el denominador, observamos que la función no está definida para* $x = -1$ *ni para* $x = 1$. *Son pues, estos puntos, los candidatos a presentar asíntotas verticales. Veamos si, en efecto, la tienen:*

$\underset{x\to-1^-}{Lím}\frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$ mientras que $\underset{x\to-1^+}{Lím}\frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = +\infty$, así pues, tiene una A.V. en $x = -1$

$\underset{x\to1^-}{Lím}\frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$ mientras que $\underset{x\to1^+}{Lím}\frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$, así pues, tiene una A.V. en $x = 1$

Horizontales: Veamos los límites en el infinito:

$\underset{x\to\pm\infty}{Lím}\frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \underset{x\to\pm\infty}{Lím}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1-0}$=0, así pues, tiene una AH en $y = 0$ en +∞ y en -∞

Oblicuas: No puede tener ya que tiene horizontales en ambos lados.

Ejemplo 11: Vamos a determinar las asíntotas de las siguientes función $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x+2}$

Verticales: *Sin más que mirar el denominador, observamos que la función no está definida para $x=-2$. Es pues, este punto, el candidato a presentar asíntota vertical. Veamos si, en efecto, la tiene:*

$\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2}{x+2}=\left[\dfrac{4}{0^-}\right]=-\infty$ mientras que $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2}{x+2}=\left[\dfrac{4}{0^+}\right]=+\infty$, así pues, tiene una A.V. en $x=-2$

Horizontales: Veamos los límites en el infinito:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x+2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\dfrac{1}{0^\pm}=\pm\infty$, así pues, no tiene A.H.

Oblicuas: Veamos los límites correspondientes a las oblicuas:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{x+2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f\left(x\right)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2-2x}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{1+\frac{2}{x}}=\frac{-2}{1+0}=-2$$

Así pues, presenta una A.O. en $y=x-2$

Nota 1: A la vista de los ejemplos anteriores conviene tener en cuenta las siguientes observaciones sobre las asíntotas en el caso de funciones racionales:

- Presentan asíntotas verticales en las raíces del denominador (salvo cuando dicha raíz lo es también del numerador).
- Presentan asíntotas horizontales cuando el grado del numerador es menor o igual que el del denominador.
- Presentan asíntotas oblicuas cuando el grado del numerador es una unidad más que el del denominador.

Proponemos la ***actividad 15***

6.- CONTINUIDAD. DISCONTINUIDADES.

En el curso pasado vimos una definición gráfica intuitiva del concepto de continuidad que decía, como ya vimos en la nota 2, algo así que una función era continua en un punto si se podía trazar alrededor del punto sin levantar el lápiz del papel. Esto, desde el punto de vista matemático se formaliza con la siguiente definición.

Definición 13: Sea $f\left(x\right)$ una función definida en un entorno de $x=a$. Se dice que $f\left(x\right)$ es **continua** en $x=a$ si $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=f\left(a\right)$. En caso de que no sea continua, diremos que es **discontinua o que presenta una discontinuidad en** $x=a$.

<u>Nota 9:</u> La definición anterior lleva implícita algunas condiciones derivadas de la existencia del límite puntual. Para que la función sea continua han de cumplirse:

- Que $\exists f(a)$.
- Que $\exists \underset{x \to a^-}{Lím} f(x)$ y $\exists \underset{x \to a^-}{Lím} f(x)$, que ambos sean finitos y que coincidan.
- Finalmente que dicho valor común coincida con $f(a)$.

<u>Definición 14:</u> Sea $f(x)$ una función definida en un entorno de $x = a$. Se dice que $f(x)$ es **continua por la izquierda** en $x = a$ si $\underset{x \to a^-}{Lím} f(x) = f(a)$.

<u>Definición 15:</u> Sea $f(x)$ una función definida en un entorno de $x = a$. Se dice que $f(x)$ es **continua por la derecha** en $x = a$ si $\underset{x \to a^+}{Lím} f(x) = f(a)$.

<u>Nota 10:</u> En vista de lo anterior, es evidente que una función es continua en un punto si y solo si lo es por la izquierda y por la derecha.

<u>Definición 16:</u> Una función se dice que es **continua en un intervalo** si lo es en cada uno de los puntos del intervalo, considerando continuidad lateral en los extremos incluidos en el mismo.

<u>Nota 11:</u> Las **funciones elementales**: polinómicas, valor absoluto, racionales, raíces, exponenciales, logarítmica, trigonométricas y las inversas de las trigonométricas **son continuas en sus respectivos dominios.**

<u>Proposición 9:</u> La composición de funciones continuas es continua en su dominio correspondiente.

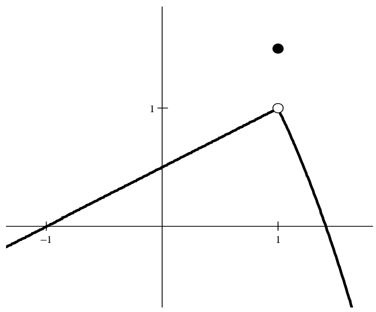
<u>Nota 12:</u> Como consecuencia de la proposición 9 tenemos, por ejemplo, los siguientes resultados:

a) El valor absoluto de una función continua es continua en su dominio correspondiente.
b) La raíz de una función continua es continua en su dominio correspondiente.

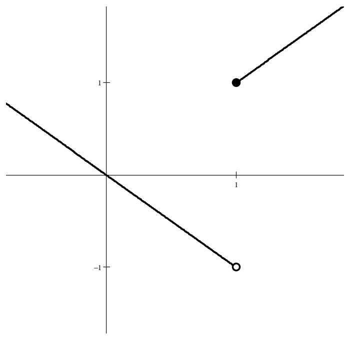
Como es evidente, no todas las funciones son continuas en todos sus puntos y no siempre por el mismo motivo. Clasifiquemos las discontinuidades.

<u>Definición 17:</u> Sea $f(x)$ una función discontinua en $x = a$. Diremos que es una **discontinuidad:**

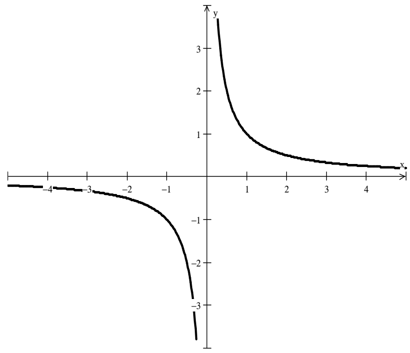
a) **Evitable** si $\nexists f(a)$ o bien si $\exists f(a) \neq \underset{x \to a}{Lím} f(x)$



b) **De 1ª especie con salto finito** si los dos límites laterales existen y son finitos pero no coinciden. Al valor absoluto de la diferencia de dichos límites lo llamaremos **salto**.



c) **De 1ª especie con salto infinito** si los dos límites laterales existen pero, al menos uno de ellos es infinito.



d) **De 2ª especie** cuando no existe alguno de los límites laterales.

__Ejemplo 12:__ Consideremos la función $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & si \;\; x<-2 \\ x^2-5 & si \;\; -2\le x<0 \\ 3 & si \;\; x\ge 0 \end{cases}$. Es evidente que la función es continua de partida en $\mathbb{R}-\{-2,0\}$ por ser polinomios. Veamos qué ocurre en estos dos puntos:

$\boxed{x=-2}$ $\quad f(-2)=-1$

- $\underset{x\to -2^-}{Lím}(2x+3)=-1$ $\quad$ Así pues, es continua en $x=-2$
- $\underset{x\to -2^+}{Lím}(x^2-5)=-1$

$\boxed{x=0}$ $\quad f(0)=3$

- $\underset{x\to 0^-}{Lím}(x^2-5)=-5$ $\quad$ Así pues, no es continua en $x=0$ (salto finito 8)
- $\underset{x\to 0^+}{Lím}\, 3=3$

Resumiendo:
f es continua en $\mathbb{R}$-$\{0\}$ presentando en $x=0$ una discontinuidad de salto finito

__Ejemplo 13:__ Consideremos la función $g(x)=\begin{cases} x^3+2 & si \;\; x\le -1 \\ \dfrac{1}{x+1} & si \;\; -1<x<2 \\ 3^{x-3} & si \;\; x>2 \end{cases}$.

Es evidente que la función es continua de partida en $\mathbb{R}-\{-1,2\}$ por ser funciones elementales continuas en el dominio en el que están definidas. Veamos qué ocurre en estos dos puntos:

$\boxed{x=-1}$ $\qquad f(-1)=1$

- $\underset{x\to -1^-}{Lím}\left(x^3+2\right)=1$ $\qquad$ Así pues, no es continua en $x=-1$ (salto infinito)
- $\underset{x\to -1^+}{Lím}\dfrac{1}{x+1}=\left[\dfrac{1}{0^+}\right]=+\infty$

$\boxed{x=2}$ $\qquad f(2)$ no existe

- $\underset{x\to 2^-}{Lím}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{3}$ $\qquad$ *Así pues, no es continua en $x=2$ (evitable)*
- $\underset{x\to 2^+}{Lím}3^{x-3}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

Resumiendo: f es continua en $\mathbb{R}$-$\{-1,2\}$, presentando una discontinuidad de salto infinito en $x=-1$ y una evitable en $x=2$

Ejemplo 14: Determina el valor de a para que sea continua: $f(x)=\begin{cases}2x+a & si\ x\le 1\\ x^2-ax+2 & si\ x>1\end{cases}$

Para que sea continua, debe serlo en x=1, luego han de coincidir los siguientes límites:

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x\to 1^-}{Lím}(2x+a)=2+a\\ \underset{x\to 1^-}{Lím}\left(x^2-ax+2\right)=3-a\end{array}\right\}\Rightarrow\ 2+a=3-a\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

*Proponemos las **actividades 16 y 17.***

7.- ACTIVIDADES.

ACTIVIDADES INTERCALADAS EN LA TEORÍA

Actividad 1: Siendo $f(x)=5-x$, $g(x)=3x-a$, calcula el valor de a para que la composición de ambas funciones sea conmutativa, es decir, que $f\circ g=g\circ f$.

Actividad 2: Halla las funciones inversas de las siguientes:

a) $f(x)=x^3-1$ $\qquad$ b) $g(x)=-5x+4$

Actividad 3: El radio de un círculo mide 10 cm. Expresa el área del rectángulo inscrito en el mismo en función de la medida x, de la base. ¿Cuál es el dominio de la función obtenida?

Actividad 4: Dadas las funciones: $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$ y $g(x)=2x-1$, obtén:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $f^{-1}(x)$ c) $g^{-1}(x)$

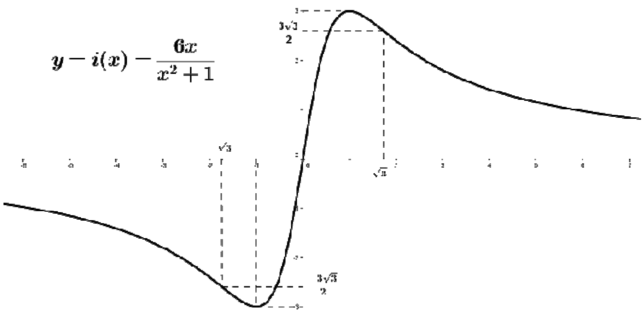
Actividad 5: Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}$ b) $g(x)=\sqrt{x^2-16}$ c) $h(x)=\sqrt{\dfrac{-3x+1}{x+2}}$

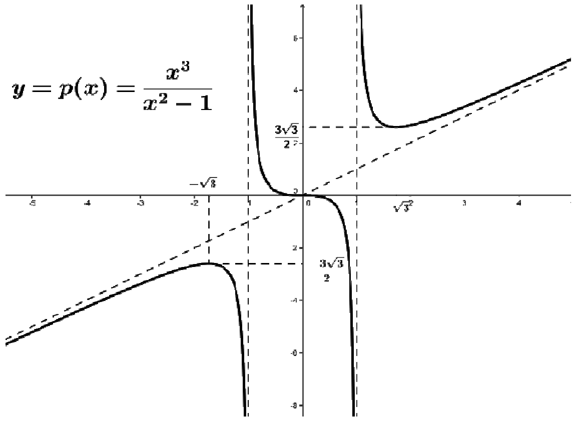
d) $j(x)=\dfrac{\sqrt{2x-3}}{x-4}$ e) $k(x)=\ln(x^2-4)$

Actividad 6: Analiza todas las características que conozcas de las funciones cuyas gráficas se adjuntan:

a)



b



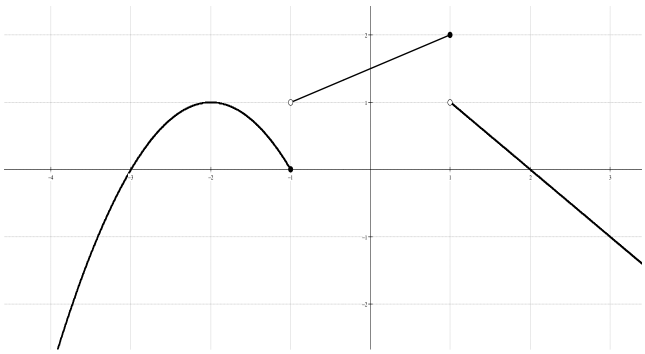
Actividad 7: Representa gráficamente las funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}-2 & si \;\; x<0\\ x-2 & si \;\; 0\le x<4\\ 2 & si \;\; x\ge 4\end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases}-x-1 & si \;\; x\le 1\\ 2x^2-2 & si \;\; -1<x<1\\ x-1 & si \;\; x\ge 1\end{cases}$

Actividad 8: Representa gráficamente las funciones:

a) $f(x)=|2x+5|$ b) $g(x)=|-x^2+x+6|$ c) $h(x)=|x+1|-|x-2|$

Actividad 9: Determina los límites siguientes de la función representada a continuación:



a) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ h) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ i) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Actividad 10: Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-5}{3}$ b) $\lim\limits_{x\to -3} (x^3-2)$ c) $\lim\limits_{x\to -2} |-x^2+x+3|$ d) $\lim\limits_{x\to 1/2} e^{1-x}$

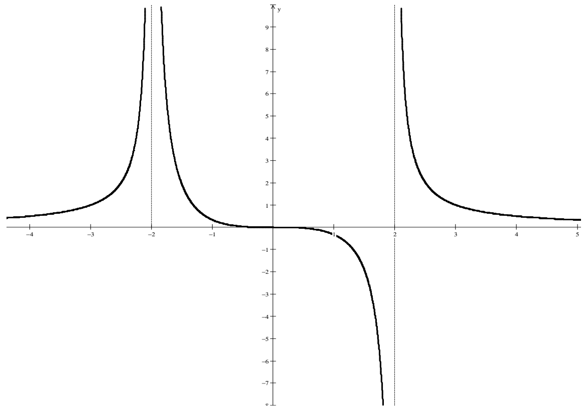
Actividad 11: Calcula los límites laterales de las funciones en los puntos indicados:

a) $f(x)=\begin{cases} 2x-2 & si \;\; x<3 \\ 2x & si \;\; x\geq 3 \end{cases} \quad en \;\; x=3$ b) $g(x)=\begin{cases} x^2+3x-1 & si \;\; x<1 \\ x+2 & si \;\; x\geq 1 \end{cases} \quad en \;\; x=1$

Actividad 12: Determina los límites siguientes de la función representada a continuación:

a) $\underset{x\to -2^-}{Lím}\, f(x)$ b) $\underset{x\to -2^+}{Lím}\, f(x)$ c) $\underset{x\to -2}{Lím}\, f(x)$

d) $\underset{x\to 2^-}{Lím}\, f(x)$ e) $\underset{x\to 2^+}{Lím}\, f(x)$ f) $\underset{x\to 2}{Lím}\, f(x)$



Actividad 13: Determina razonadamente el valor de los límites siguientes:

a) $\underset{x\to -2^-}{Lím}\dfrac{3x}{(x+2)^3}$ b) $\underset{x\to -2^+}{Lím}\dfrac{3x}{(x+2)^3}$ c) $\underset{x\to -2}{Lím}\dfrac{3x}{(x+2)^3}$ d) $\underset{x\to 0}{Lím}\dfrac{2}{x^4}$ e) $\underset{x\to 3}{Lím}\dfrac{5x^2}{(x-3)^2}$

f) $\underset{x\to 1}{Lím}\dfrac{-7x}{x-1}$ g) $\underset{x\to +\infty}{Lím}\left(3x^5-\sqrt{x}+1\right)$ h) $\underset{x\to -\infty}{Lím}\, 0{,}5^x$ i) $\underset{x\to +\infty}{Lím}\, \log x$ j) $\underset{x\to -\infty}{Lím}\left(-4^x\right)$

k) $\underset{x\to +\infty}{Lím}\dfrac{1}{x^3+1}$ l) $\underset{x\to -\infty}{Lím}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ m) $\underset{x\to 2^-}{Lím}\, e^{\frac{1}{x-2}}$ n) $\underset{x\to 2^+}{Lím}\, e^{\frac{1}{x-2}}$ ñ) $\underset{x\to 2}{Lím}\, e^{\frac{1}{x-2}}$

Actividad 14: Determina razonadamente el valor de los límites siguientes:

a) $\underset{x\to 1}{Lím}\dfrac{x^3-x^2}{x^2+2x-3}$ b) $\underset{x\to -\infty}{Lím}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+2}$ c) $\underset{x\to 1}{Lím}\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ d) $\underset{x\to +\infty}{Lím}\dfrac{3x-1}{\sqrt{4x^2-x}}$

e) $\underset{x\to +\infty}{Lím}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}\right)$ f) $\underset{x\to 4}{Lím}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$ g) $\underset{x\to +\infty}{Lím}\left(\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right)$ h) $\underset{x\to 0}{Lím}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2+x}$

Actividad 15: Calcula los siguientes límites:

a) $\underset{x\to +\infty}{Lím}\left(\dfrac{4x-2}{3x}\right)^{2x-1}$ b) $\underset{x\to +\infty}{Lím}(\log x)^{1-3x}$ c) $\underset{x\to +\infty}{Lím}\left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}}$ d) $\underset{x\to 3}{Lím}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$

Actividad 16: Calcula $\underset{x\to +\infty}{Lím}\, f(x)$ en los siguientes casos:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+5}$ b) $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ c) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

Actividad 17: Determina el valor de a para el cual: $\underset{x\to+\infty}{Lím}\left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)=1$

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

Actividad 18: Calcula el valor de k, de modo que sean ciertas las siguientes igualdades:

a) $\underset{x\to+\infty}{Lím}\dfrac{2kx^2-7x+5}{7x^2-3}=-1$ b) $\underset{x\to-1}{Lím}\dfrac{kx^2-k}{x^2+3x+2}=4$

Actividad 19: Determina razonadamente las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$ b) $g(x)=\dfrac{2x^3+x}{x^2-3x}$

Actividad 20: Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x^3+5x}{x^3+1}$ b) $g(x)=x^2-\sqrt{x^4-x^3}$

Actividad 21: Estudia las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

a) $f(x)=Ln\left(x^2-4\right)$ b) $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$

Actividad 22: Obtén las asíntotas de la función $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Actividad 23: Calcula a y b para que la función: $f(x)=\dfrac{ax-3}{x+b}$ tenga como asíntotas: $y=2$ y $x=-2$

Actividad 24: (S) Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} e^x & si\ x<1 \\ \ln x & si\ x\geq 1 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} 1/x & si\ \ x<1 \\ 2x-1 & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$

Actividad 25: Calcula el valor de a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & si\ x\leq -1 \\ b & si\ -1<x<3 \\ 2x+4 & si\ \ x\geq 3 \end{cases}$$

Actividad 26: Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x-1 & si\ \ x<1 \\ 1/2 & si\ \ x=1 \\ -(x-1)^2+1 & si\ \ 1<x \end{cases}$ b) $g(x)=\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2}$

Actividad 27: Estudia la continuidad y halla los límites en el infinito de la función:

$f(x)=\begin{cases} 2^x & si\ \ x<1 \\ 2 & si\ \ 1\le x\le 2 \\ -x^2+4x & si\ \ x>2 \end{cases}$. Representa, después, la función $y=f(x)$

Actividad 28: Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{x}{|x|} & si\ \ x\neq 0 \\ 1 & si\ \ x=0 \end{cases}$ $en\ x=0$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2} & si\ \ x\neq -2 \\ -2 & si\ \ x=2 \end{cases}$ $en\ x=-2$

Actividad 29: Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro a.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & si\ \ x\le 2 \\ a-x^2 & si\ \ x>2 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & si\ \ x\le 0 \\ x+2a & si\ \ x>0 \end{cases}$

Actividad 30: Halla los valores de a y b para que sea continua:

$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & si\ \ x<0 \\ ax+b & si\ \ 0\le x\le 2 \\ x^3-1 & si\ \ 2<x \end{cases}$

Actividad 31: Halla los valores de los parámetros para que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2(x-3)^a}{x^2-6x+9} & si\ \ x\neq 3 \\ 9 & si\ \ x=3 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} x^2-6x+9 & si\ 2\le x\le 5 \\ -x^2+ax+b & si\ x<2\ \ ó\ \ x>5 \end{cases}$

Actividad 32: El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función: $P(t)=\dfrac{15+t^2}{(t+1)^2}$, donde t se mide en años transcurridos desde $t=0$. Calcula:

a) La población inicial.
b) El tamaño de la población a largo plazo.

<u>Actividad 33:</u> Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que: $T(x)=\begin{cases}\dfrac{300}{x+30} & si\ \ 0\le x\le 30\\[2ex] \dfrac{1125}{(x-5)(x-15)}+2 & si\ \ x>30\end{cases}$

a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.
b) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿Y en menos de 2?

ACTIVIDADES DE SELECTIVIDAD

<u>Actividad 34:</u> (2003) Calcula $\underset{x\to 0}{Lím}\left(\dfrac{Ln(1+x)-senx}{x\cdot senx}\right)$, siendo $Ln(1+x)$ la función logaritmo neperiano de $1+x$.

<u>Actividad 35:</u> (2003) Considera la función definida para $x\neq -2$ por $f(x)=\dfrac{2x^2+2}{x+2}$

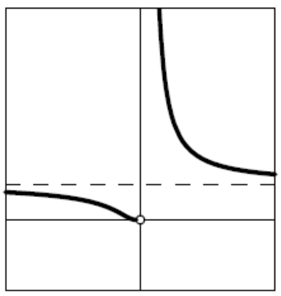
a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.
b) Estudia la posición relativa de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

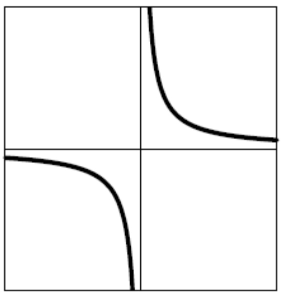
<u>Actividad 36:</u> (2004) Se sabe que $\underset{x\to 0}{Lím}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{a}{2x}\right)$ es finito. Determina el valor de a y calcula el límite.

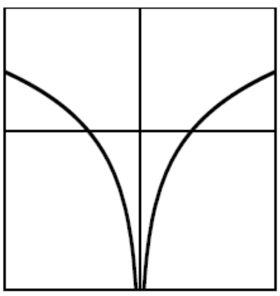
<u>Actividad 37:</u> (2005) Se sabe que $\underset{x\to 0}{Lím}\dfrac{x-\alpha senx}{x^2}$ es finito. Determina el valor de α y calcula el límite.

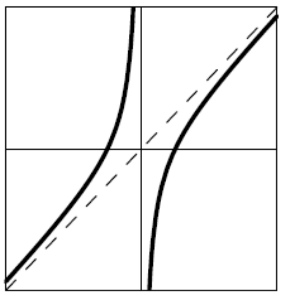
<u>Actividad 38:</u> (2005) Considera las tres funciones cuyas expresiones respectivas vienen dadas, para $x\neq 0$, por $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$, $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$ y $h(x)=Ln|x|$.

a) Halla las ecuaciones de las asíntotas de las gráficas de f, g y h.
b) Identifica, entre las que siguen, la gráfica de cada función, justificando la respuesta.


Gráfica 1


Gráfica 2


Gráfica 3


Gráfica 4

Actividad 39: (2006) Calcula $\underset{x\to 1}{Lím}\left(\frac{1}{Lnx}-\frac{1}{x-1}\right)$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

Actividad 40: (2006) Sea $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=\frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2}$, siendo ln la función logaritmo neperiano. Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, hállala.

Actividad 41: (2008) Sea f la función definida para $x\neq 0$ por $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$. Determina las asíntotas de la gráfica de f.

Actividad 42: (2008) Dada la función definida para $x\neq 0$ por $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$, determina las asíntotas de su gráfica.

Actividad 43: (2009) Calcula $\underset{x\to 1}{Lím}\left(\frac{1}{Lnx}-\frac{2}{x^2-1}\right)$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

Actividad 44: (2009) Se considera la función $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$. Determina la asíntota de la gráfica de f.

Actividad 45: (2009) Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}-\frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} & si\ x\neq 1\\ a & si\ x=1\end{cases}$.

a) Sabiendo que f es continua, calcula a (ln denota logaritmo neperiano).
b) Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, determina su ecuación.

Actividad 46: (2010) Calcula $\underset{x\to 0}{Lím}\frac{e^x-e^{senx}}{x^2}$

8.- SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

Actividad 1: $a=5$

Actividad 2: a) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$ b) $g^{-1}(x)=\frac{-x+4}{5}$

Actividad 3: $A(x)=x\sqrt{400-x^2}$, *siendo* $Dom(A)=[0,20]$

Actividad 4: a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{2x+2}{2x-3}$ b) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ c) $g^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

Actividad 5:

a) $Dom(f) = \Re - \{2,3\}$ b) $Dom(g) = (-\infty,-4] \cup [4,+\infty)$ c) $Dom(h) = \left(-2, \dfrac{1}{3}\right]$

d) $Dom(j) = \left[\dfrac{3}{2}, 4\right) \cup (4,+\infty)$ e) $Dom(k) = (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

Actividad 6:

a)

1) Dominio y recorrido: $Dom(i) = \Re$ *e* $\text{Im}(i) = [-3,3]$.
2) Puntos de corte con los ejes y signo: El único punto de corte con los ejes es $(0,0)$.
   $i(x) > 0 \ \ \forall x \in (0,+\infty)$
   $i(x) < 0 \ \ \forall x \in (-\infty,0)$
3) Continuidad: i es continua en todo $\Re$.
4) Asíntotas: i tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.
5) Simetrías: i es impar.
6) Periodicidad: i no es periódica.
7) Monotonía:
   i es estrictamente creciente en : $(-1,1)$
   i es estrictamente decreciente en : $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$
8) Extremos relativos: i presenta un máximo relativo en $(1,3)$ y un mínimo relativo en $(-1,-3)$.
9) Acotación y extremos absolutos: i está acotada, presentando un máximo absoluto en $(1,3)$ y un mínimo absoluto en $(-1,-3)$.
10) Curvatura:
   i es convexa en : $(-\sqrt{3},0) \cup (\sqrt{3},+\infty)$
   i es cóncava en : $(-\infty,-\sqrt{3}) \cup (0,\sqrt{3})$
11) Puntos de inflexión: i tiene tres puntos de inflexión en $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0,0)$ *y* $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

b)

1) Dominio y recorrido: $Dom(p) = \Re - \{-1,1\}$ *e* $\text{Im}(p) = \Re$.
2) Puntos de corte con los ejes y signo: El único punto de corte con los ejes es $(0,0)$.
   $p(x) > 0 \ \ \forall x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$
   $p(x) < 0 \ \ \forall x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$
3) Continuidad: p es continua en $\Re - \{-1,1\}$, presentando discontinuidades de salto infinito para $x = -1$ *y* $x = 1$
4) Asíntotas: p tiene dos asíntotas verticales en $x = -1$ *y* $x = 1$, y una oblicua en $y = x$.
5) Simetrías: p es impar.

6) Periodicidad: p no es periódica.

7) Monotonía:

p *es estrictamente creciente en* : $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$

p *es estrictamente decreciente en* : $\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup\left(-1,1\right)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$

8) Extremos relativos: p presenta un mínimo relativo en $\left(\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y un máximo relativo en $\left(-\sqrt{3},\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$.

9) Acotación y extremos absolutos: p no está acotada inferior ni superiormente.

10) Curvatura:

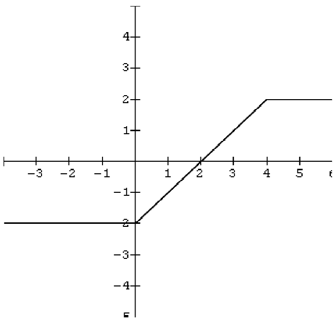
p *es convexa en* : $\left(-1,0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

p *es cóncava en* : $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(0,1\right)$

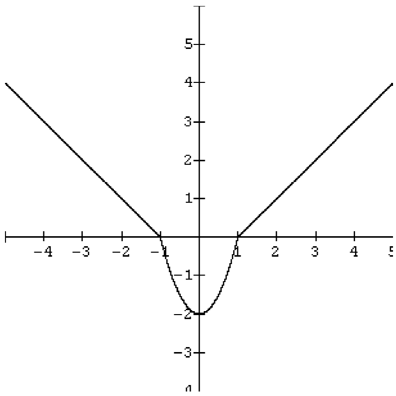
11) Puntos de inflexión: p tiene un punto de inflexión en $\left(0,0\right)$.

Actividad 7:

a)

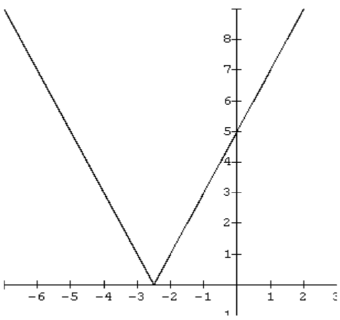


b)

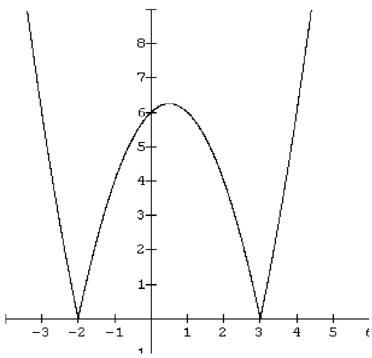


Actividad 8:

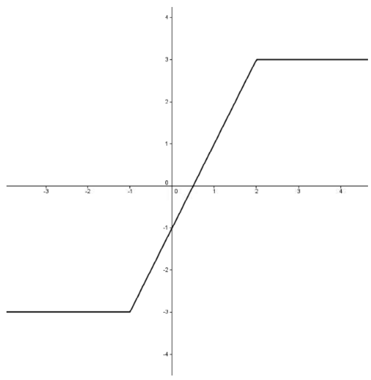
a)



b)



c)



Actividad 9:

a) -3 b) 3/2 c) 0 d) 0 e) 1 f) $\nexists$ g) 2 h) 1 i) $\nexists$

Actividad 10:

a) -4/3 b) -29 c) -3 d) $\sqrt{e}$

Actividad 11:

a) $\underset{x\to 3^-}{Lím} f(x)=4$; $\underset{x\to 3^+}{Lím} f(x)=6$ b) $\underset{x\to 1^-}{Lím} f(x)=3$; $\underset{x\to 1^+}{Lím} f(x)=3$

Actividad 12:

a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) $\nexists$

Actividad 13:

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $\exists$ d) $+\infty$ e) $+\infty$

f) $\nexists$ g) $+\infty$ h) $+\infty$ i) $+\infty$ j) 0

k) 0 l) $+\infty$ k) 0 l) $+\infty$ m) $\nexists$

Actividad 14:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 0 d) $\frac{3}{2}$ e) 0 f) 32 g) 3 h) 0

Actividad 15:

a) $+\infty$ b) 0 c) 0 d) 3/2

Actividad 16:

a) 0 b) 1 c) 0

Actividad 17: $a=-4$

Actividad 18:

a) $k=\frac{-7}{2}$ b) $k=-2$

Actividad 19:

a) $x=-2$, $x=2$, $y=1$ b) $x=3$, $y=2x+6$

Actividad 20:

a) $x=-1$; $y=2$ b) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$

Actividad 21:

a) $x=2$; $x=-2$ b) $x=0$

Actividad 22: $x=1$, $x=-1$, $y=x$

Actividad 23: $a=2$ y $b=2$

Actividad 24:

a) f es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$, presentando en $x=1$ un salto finito

b) f es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$, presentando en $x=0$ un salto infinito

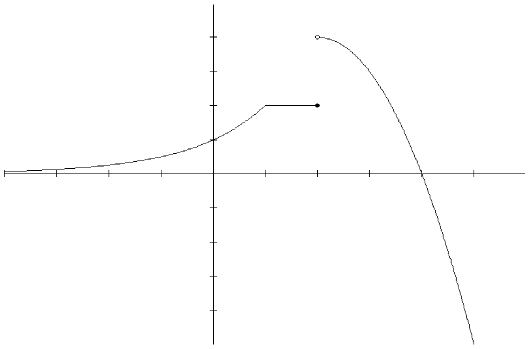
Actividad 25: Debe ser $a=-9$ y $b=10$

Actividad 26:

a) f es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$, presentando una discontinuidad de salto finito en $x=1$.

b) g es continua en $\mathbb{R}-\{-1,2\}$, presentando una discontinuidad de salto infinito en $x=-1$ y una evitable en $x=2$

Actividad 27: La función es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$, presentando una discontinuidad de salto finito para $x=2$.



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

Actividad 28:

a) Salto finito en $x=0$

b) Salto finito en $x=-2$

Actividad 29:

a)
Caso1: si $a=-8$, es continua en $\mathbb{R}$
Caso 2: si $a\neq-8$, es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$, presentando en $x=2$ una discontinuidad de salto finito.
b)
Caso 1: si $a=1/2$, es continua en $\mathbb{R}$
Caso 2: si $a\neq 1/2$, es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$, presentando en $x=0$ una discontinuidad de salto finito.

Actividad 30: $a=2$ y $b=3$

Actividad 31:

a) $a=2$

b) $a=8$, $b=-11$

Actividad 32:

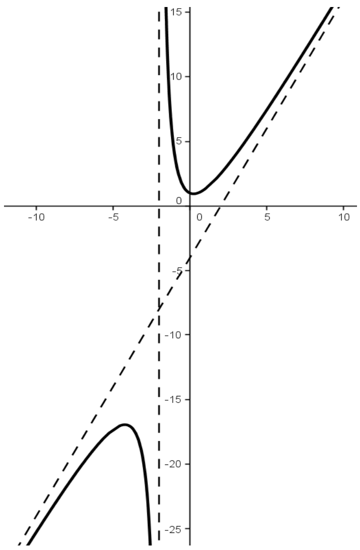
a) 15 millones de individuos.
b) 1 millón de individuos.

Actividad 33:

a) Basta hacer los límites.
b) No. Tampoco

Actividad 34: -1/2

Actividad 35:



a) $x=-2$; $y=2x-4$

b) En la asíntota vertical: la gráfica tiende a $-\infty$ por la izquierda y a $+\infty$ por la derecha. En la asíntota oblicua la gráfica está por encima de la asíntota en $-\infty$ y por debajo en $+\infty$.

Actividad 36: $a=2$ y el límite es -1/2

Actividad 37: $\alpha=1$ y el límite es 0

Actividad 38:
La gráfica de f tiene asíntotas $x=0$ *e* $y=x$ y se corresponde con la gráfica 4.
La gráfica de g tiene $x=0$ *e* $y=1$ y se corresponde con la gráfica 1.
La gráfica de h tiene $x=0$ y se corresponde con la gráfica 3.

Actividad 39: 1/2

Actividad 40: $y=0$

Actividad 41: $x=0$ *e* $y=x$

Actividad 42: $x=0$; $y=1$ *e* $y=-1$

Actividad 43: 1

Actividad 44: $y=2x-\dfrac{1}{2}$

Actividad 45:

a) $a=-1$
b) $y=0$

Actividad 46: 0