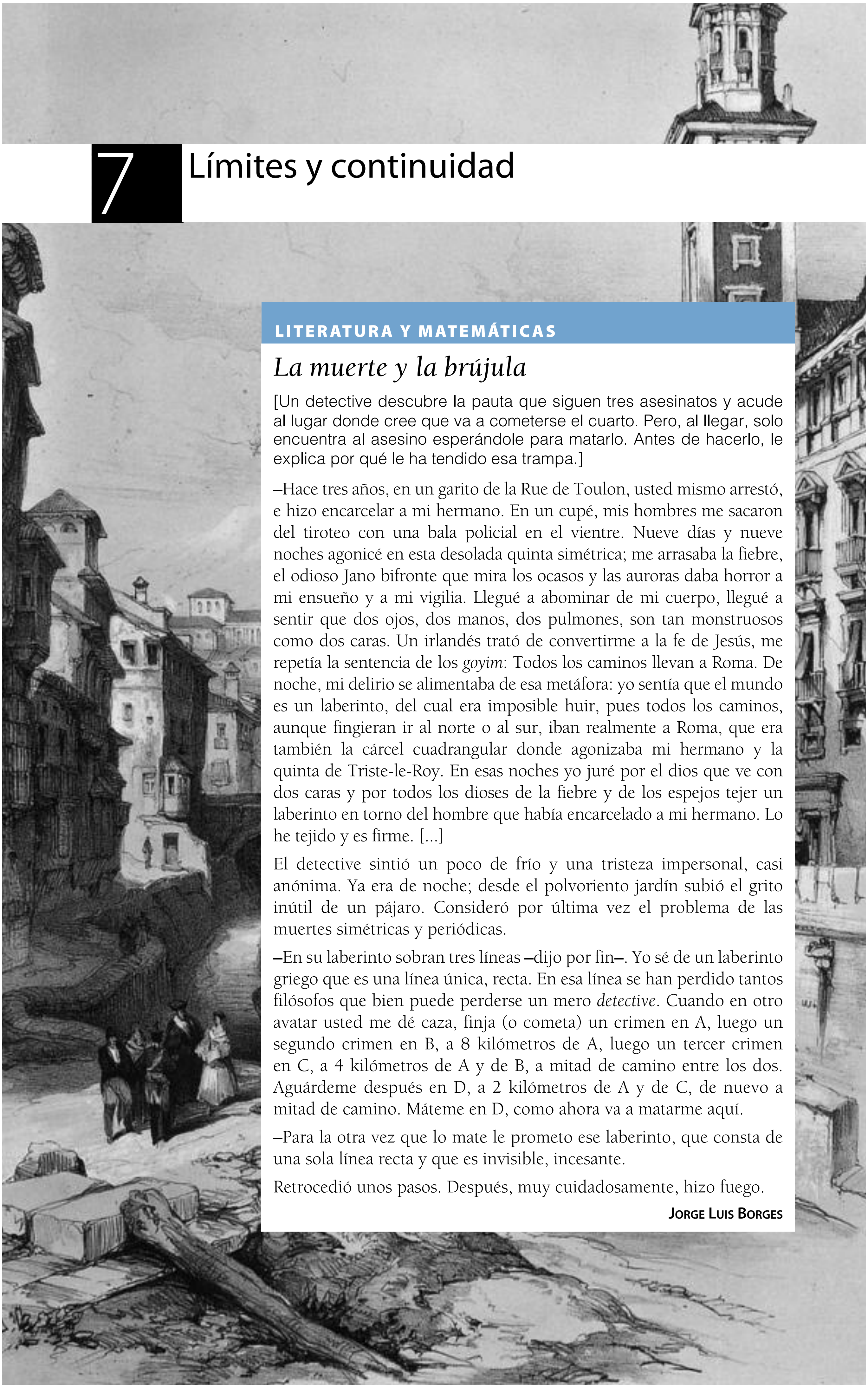


7 Límites y continuidad

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La muerte y la brújula

[Un detective descubre la pauta que siguen tres asesinatos y acude al lugar donde cree que va a cometerse el cuarto. Pero, al llegar, solo encuentra al asesino esperándole para matarlo. Antes de hacerlo, le explica por qué le ha tendido esa trampa.]

–Hace tres años, en un garito de la Rue de Toulon, usted mismo arrestó, e hizo encarcelar a mi hermano. En un cupé, mis hombres me sacaron del tiroteo con una bala policial en el vientre. Nueve días y nueve noches agonicé en esta desolada quinta simétrica; me arrasaba la fiebre, el odioso Jano bifronte que mira los ocasos y las auroras daba horror a mi ensueño y a mi vigilia. Llegué a abominar de mi cuerpo, llegué a sentir que dos ojos, dos manos, dos pulmones, son tan monstruosos como dos caras. Un irlandés trató de convertirme a la fe de Jesús, me repetía la sentencia de los *goyim*: Todos los caminos llevan a Roma. De noche, mi delirio se alimentaba de esa metáfora: yo sentía que el mundo es un laberinto, del cual era imposible huir, pues todos los caminos, aunque fingieran ir al norte o al sur, iban realmente a Roma, que era también la cárcel cuadrangular donde agonizaba mi hermano y la quinta de Triste-le-Roy. En esas noches yo juré por el dios que ve con dos caras y por todos los dioses de la fiebre y de los espejos tejer un laberinto en torno del hombre que había encarcelado a mi hermano. Lo he tejido y es firme. [...]

El detective sintió un poco de frío y una tristeza impersonal, casi anónima. Ya era de noche; desde el polvoriento jardín subió el grito inútil de un pájaro. Consideró por última vez el problema de las muertes simétricas y periódicas.

–En su laberinto sobran tres líneas –dijo por fin–. Yo sé de un laberinto griego que es una línea única, recta. En esa línea se han perdido tantos filósofos que bien puede perderse un mero *detective*. Cuando en otro avatar usted me dé caza, finja (o cometa) un crimen en A, luego un segundo crimen en B, a 8 kilómetros de A, luego un tercer crimen en C, a 4 kilómetros de A y de B, a mitad de camino entre los dos. Aguárdeme después en D, a 2 kilómetros de A y de C, de nuevo a mitad de camino. Máteme en D, como ahora va a matarme aquí.

–Para la otra vez que lo mate le prometo ese laberinto, que consta de una sola línea recta y que es invisible, incesante.

Retrocedió unos pasos. Después, muy cuidadosamente, hizo fuego.

JORGE LUIS BORGES

La muerte y la brújula
Jorge Luis Borges

Los protagonistas de este relato de crímenes son, además del asesino, un comisario de policía y un detective. El primer crimen ocurre la noche del 3 de diciembre en la habitación del Hotel du Nord donde se alojaba la víctima, Yarmolinsky, un profesor judío que asistía a un congreso Talmúdico.
En una hoja metida en su máquina de escribir, estaba escrita esta sentencia inconclusa: «La primera letra del Nombre ha sido articulada». Un mes más tarde, también de noche, aparece muerto en un suburbio occidental un delincuente, Azevedo, con fama de delator, que es también judío. En una pared cercana habían escrito con tiza: «La segunda letra del Nombre ha sido articulada». El tercer crimen, algo dudoso, pues no apareció el cadáver, ocurrió también un mes después, la noche del 3 de febrero, carnaval, en una taberna donde una persona extraña había alquilado unos días antes una habitación. Cuando llegaron el comisario y el detective, encontraron escrita en una pizarra esta frase: «La última de las letras del Nombre ha sido articulada». También vieron una mancha de sangre y un libro en latín sobre los judíos donde la presunta víctima había subrayado este pasaje: «El día hebreo empieza al anochecer y dura hasta el siguiente anochecer». La noche del primero de marzo, el comisario recibe un sobre con una carta donde le anuncian que el día 3 de ese mes no habrá un cuarto crimen porque, como se ve en el plano que le adjunta, los tres lugares de los crímenes forman ya un «triángulo equilátero y místico». Perplejo, le remitió la carta al detective quien, tras estudiarla minuciosamente, concluye que la serie de los crímenes no estaba regida por el número 3, sino por el 4. ¿Por qué? Porque, según el calendario hebreo, al cometerse por la noche, todos los crímenes habían ocurrido el día 4 de cada mes; además, las letras del nombre de Dios son 4 –el llamado Tetragrámaton: J H V H– y finalmente los puntos cardinales –tres de ellos señalados por los vértices del triángulo– son también 4. En consecuencia, el asesino con esta carta quería engañarles: realmente iba a cometer un cuarto crimen en un sitio al sur de la ciudad que formara un rombo perfecto con los lugares de los tres crímenes anteriores. El detective localiza ese lugar en el plano –una quinta llamada Triste-le-Roy– y se dirige hacia allí con la intención de adelantarse y pillar al asesino con las manos en la masa. Pero, al llegar, es el asesino quien lo está esperando, porque él, como le explica en el párrafo seleccionado, era la auténtica víctima de aquella trama.

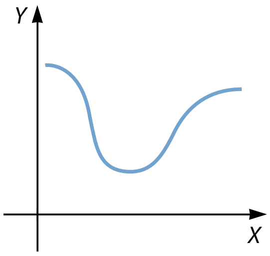
En el laberinto-trampa propuesto por el detective, las distancias de los lugares donde se cometen los crímenes con relación al primero son 8, 4 y 2.
Si continuamos indefinidamente, obtenemos la sucesión: 8, 4, 2, 1, 1/2…
Escribe el término general y calcula su límite.

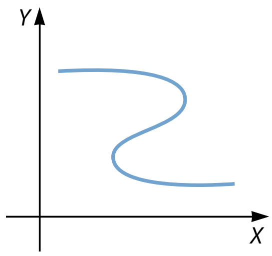
$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{8}{2^{n-1}} = 2^{4-n} \qquad \lim_{n \to \infty} 2^{4-n} = 0$$

Límites y continuidad

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Justifica si las siguientes gráficas corresponden a funciones.**

a) 

b) 

a) La gráfica corresponde a una función porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

b) La gráfica no corresponde a una función porque existen valores de x a los que les corresponden más de un valor de y.

002 **Obtén el término general de estas sucesiones.**

a) $\frac{3}{5}, \frac{7}{15}, \frac{11}{45}, \dots$ b) $\frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{9}, \frac{-3}{16}, \dots$

a) $a_n = \frac{3+4(n-1)}{5 \cdot 3^{n-1}} = \frac{4n-1}{5 \cdot 3^{n-1}}$ b) $a_n = \frac{3+(-2)(n-1)}{n^2} = \frac{5-2n}{n^2}$

ACTIVIDADES

001 **Con la ayuda de la calculadora, halla el límite de las siguientes sucesiones.**

a) $a_n = \frac{n+1}{n}$ b) $a_n = \frac{n}{n^2-1}$ c) $a_n = \frac{-2n+1}{n-2}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2-1} = 0$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2n+1}{n-2} = -2$

002 **Aplica la definición de límite y demuestra que:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-2} = 1$$

Compruébalo para $\varepsilon = 0{,}0001$.

Buscamos h tal que para cualquier $n > h$ se cumple que:

$$|a_n - 1| < 0{,}0001 \to \left|\frac{n}{n-2} - 1\right| < 0{,}0001 \to \left|\frac{2}{n-2}\right| < 0{,}0001$$

Si tomamos $h = 20.002 \to n = 20.003 \to \frac{2}{20.001} < 0{,}0001$

Obtenemos el mismo resultado para $n = 20.004$, $n = 20.005\dots$, es decir, para $n > h$.

003 **Determina el límite de las siguientes sucesiones de números reales.**

a) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$

b) $a_n = 2^{n+1}$

c) $a_n = -2n^2 + 3$

d) $a_n = sen\ n$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n} = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n+1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-2n^2+3) = -\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} sen\ n$ no existe.

004 **Escribe sucesiones de números reales que cumplan que su límite, cuando *n* tiende a infinito, es:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ no existe.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

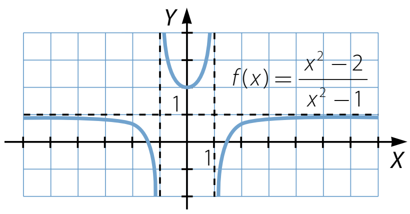
a) $a_n = \dfrac{3n-1}{n}$

b) $a_n = 1 - n$

c) $a_n = n + 4$

d) $a_n = cos\ n$

005 **Observa la gráfica y calcula los límites de la función en el infinito.**



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2}{x^2-1} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2}{x^2-1} = 1$$

006 **Aplica la definición de límite y demuestra que:**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-2} = 1$$

Compruébalo para $\varepsilon = 0{,}0001$.

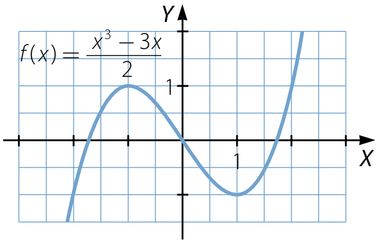
Buscamos x_0 tal que para cualquier $x > x_0$ se cumple que:

$$\left|f(x) - 1\right| < 0{,}0001 \rightarrow \left|\frac{x}{x-2} - 1\right| < 0{,}0001 \rightarrow \left|\frac{2}{x-2}\right| < 0{,}0001$$

Si tomamos $x_0 = 20.002 \rightarrow x = 20.003 \rightarrow \dfrac{2}{20.001} < 0{,}0001$

Obtenemos el mismo resultado para $x = 20.004$, $x = 20.005\ldots$, es decir, para todo $x > x_0$.

007 Observa la gráfica y calcula los límites de la función en el infinito.



$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3x}{2} = +\infty$$

008 Busca funciones cuyos límites sean los siguientes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ no existe.

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existe.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $f(x) = x^2 - x + 1$

b) $f(x) = x - x^2$

c) $f(x) = x^2 + x - 4$

d) $f(x) = x^3 - x$

e) $f(x) = \cos x$

f) $f(x) = 1 - \operatorname{sen} 2x$

009 Determina el valor de las siguientes expresiones.

a) $2 + (+\infty)$

b) $2 + (-\infty)$

c) $2 \cdot (+\infty) + (+\infty)$

d) $2 \cdot (-\infty) \cdot (+\infty)$

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$

010 Halla el valor de estas expresiones.

a) $2^{+\infty} + (+\infty) \cdot (+\infty)$

b) $2^{-\infty} + (-\infty) \cdot (-\infty)$

c) $(+\infty)^2 + (+\infty)$

d) $(-\infty)^2 \cdot (+\infty)$

a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$

011 Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, calcula:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) \cdot g(x)]$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{g(x)}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{g(x)} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{f(x)} = -1$

012 Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -5$, halla:

a) $\lim_{x\to-\infty} [f(x)+g(x)]$

b) $\lim_{x\to-\infty} [f(x)-g(x)]$

c) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{g(x)}$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)^{g(x)}$

a) $\lim_{x\to-\infty} [f(x)+g(x)] = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} [f(x)-g(x)] = +\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{g(x)}$ no existe.

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)^{g(x)} = 0$

013 Halla los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty} x^7$

b) $\lim_{x\to-\infty} x^7$

c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[7]{x}$

d) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[7]{x}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^7}$

f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^7}$

a) $\lim_{x\to+\infty} x^7 = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} x^7 = -\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[7]{x} = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[7]{x} = -\infty$

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^7} = 0$

f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^7} = 0$

014 Calcula estos límites.

a) $\lim_{x\to+\infty} 7^x$

b) $\lim_{x\to-\infty} 7^x$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x$

d) $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x$

e) $\lim_{x\to+\infty} 7^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim_{x\to-\infty} 7^{\frac{1}{x}}$

a) $\lim_{x\to+\infty} 7^x = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} 7^x = 0$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x = 0$

e) $\lim_{x\to+\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

f) $\lim_{x\to-\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

015 Halla los límites en el infinito de cada una de estas funciones.

a) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{x-1}\right)^3$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{(3x+1)x^4}{(x^2-6)(2x-1)^3}$

a) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{x-1}\right)^3 = 8$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{(3x+1)x^4}{(x^2-6)(2x-1)^3} = \frac{3}{8}$

016 Completa $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\boxed{}}{2x^3 - x + 12}$, escribiendo en su numerador una función de modo que el resultado sea:

a) $+\infty$ b) 4 c) 0

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 + 5}{2x^3 - x + 12} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8x^3 - 3}{2x^3 - x + 12} = 4$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x}{2x^3 - x + 12} = 0$

017 Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 12x + 9}{\sqrt[3]{x^5 + 5x - 2}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x + 1} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 12x + 9}{\sqrt[3]{x^5 + 5x - 2}} = +\infty$

018 Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x + \sqrt{3x - 2}}{2x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - \sqrt{6 + x}}{2x + 4}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + 2x}{6x - 3}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + x}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x + \sqrt{3x - 2}}{2x} = \dfrac{7}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - \sqrt{6 + x}}{2x + 4} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + 2x}{6x - 3} = \dfrac{1}{2}$

019 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x} - \dfrac{1 + 2x^2}{2x - 1} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x \right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{1 + 4x} \right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 3x} - 3x \right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-\frac{1+2x^2}{2x-1}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-\frac{1+2x^2}{2x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-1)(2x-1)-(1+2x^2)x}{x(2x-1)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-3x+1}{2x^2-x}=-\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x}=-1$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+4x}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+4x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-1-4x}{2x+\sqrt{1+4x}}=+\infty$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+3x-9x^2}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}=\frac{1}{2}$$

020 Sustituye *a*, *b*, *c* y *d* por números de modo que:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+bx-3}-2x\right)=-\frac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-cx\right)=0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{dx^2+x-5}-2x\right)=+\infty$

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x}=$$
$$=\frac{a}{2}=1\to a=2$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+bx-3}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+bx-3-4x^2}{\sqrt{4x^2+bx-3}+2x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{bx-3}{\sqrt{4x^2+bx-3}+2x}=\frac{b}{4}=-\frac{1}{4}\to b=-1$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-cx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2+7-c^2x^2}{\sqrt{9x^2+7}+cx}=0\to c=3$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{dx^2+x-5}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{dx^2+x-5-4x^2}{\sqrt{dx^2+x-5}+2x}=+\infty\to d\neq 4$

021 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{6x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{3x+1}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-1}\to 1^{\infty}$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot(2x-1)\right]}=e^2$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{6x+2}\to 1^{\infty}$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{6x+2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(-\frac{3}{x}\right)\cdot(6x+2)\right]}=e^{-18}=\dfrac{1}{e^{18}}$$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}\to 1^{\infty}$

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(1-\frac{4x-1}{4x}\right)\cdot(3x+2)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{4x}}=e^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{e^3}$$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{3x+1}\to 1^{\infty}$

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{3x+1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x}{x+3}-1\right)\cdot(3x+1)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3(3x+1)}{x+3}}=e^{-9}=\dfrac{1}{e^9}$$

022 Halla estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}\right)^{x^2-3x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2} \right)^{x-1} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right)^{x-1} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{x^2+1}{x^2} - 1 \right) \cdot (x-1) \right]} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x^2} \cdot (x-1) \right]} = e^0 = 1$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2-x+2}{x^2+1} \right)^{x+6} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1} \right)^{x+6} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1} - 1 \right) \cdot (x+6) \right]} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^2-5x+6}{x^2+1}} =$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}$$

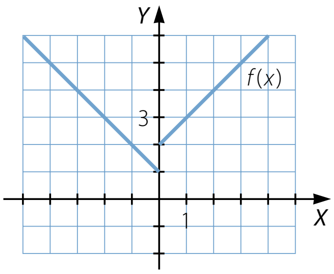
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{2x}} = 1^0 = 1$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+2}{2x^2+3x-2} \right)^{x^2-3x} = 0$

023 Observa la grafica y calcula:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

siendo $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \le 0 \\ x+2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

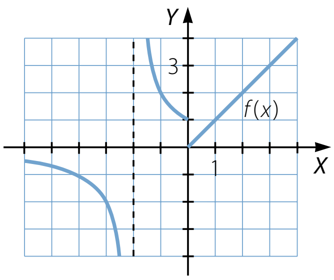


$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$

024 Observa la grafica y halla:

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$



$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

025 Calcula el límite de la función $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x+2}$ en $x=3$ y $x=-2$.

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\frac{6}{5}$$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\frac{1}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to -2} f(x).$$

026 Determina el límite de la función $f(x)=\dfrac{1}{sen\ x}$ en $x=\dfrac{\pi}{2}$ y $x=0$.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to 0} f(x).$$

027 Resuelve los siguientes límites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{3x+3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+2x}{x^2-3x}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{3x+3}\to\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{3(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+2x}{x^2-3x}\to\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x(x+1)}{x(x-3)}=\lim_{x\to 0}\frac{2(x+1)}{x-3}=-\frac{2}{3}$$

028 Calcula estos límites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{25-x^2}}{x-5}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{\sqrt{x^2-9}}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{25-x^2}}{x-5}\to\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{(5+x)(5-x)}}{-(5-x)}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{5+x}}{-\sqrt{5-x}}=\frac{5}{0}=\infty\to\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)\text{ no existe}\end{array}\right\}$$

$$\to \text{No existe } \lim_{x\to 5} f(x).$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{\sqrt{x^2-9}}\to\frac{0}{0}$ $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2(x^2-9)}{\sqrt{x^2-9}}=\lim_{x\to 3}\left(2\sqrt{x^2-9}\right)=0$

029 **Determina si la función $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-4}$ es continua en $x=-2$ y $x=2$.**

$f(-2)=\dfrac{1}{0} \rightarrow$ No existe $f(-2) \rightarrow$ La función no es continua en $x=-2$.

$f(2)=\dfrac{5}{0} \rightarrow$ No existe $f(2) \rightarrow$ La función no es continua en $x=2$.

030 **Halla si la función $f(x)=|x-3|$ es continua en $x=-3$ y $x=0$.**

$f(-3)=|-6|=6 \rightarrow$ Existe $f(-3)$.

$\lim\limits_{x\to -3}|x-3|=|-6|=6 \rightarrow$ Existe $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$.

$f(-3)=\lim\limits_{x\to -3} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x=-3$.

031 **Determina si esta función es continua.**

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\le -1 \\ x^2-3 & \text{si } x>-1 \end{cases}$$

- Si $x<-1 \rightarrow f(x)=x+1 \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty,-1)$.
- Si $x>-1 \rightarrow f(x)=x^2-3 \rightarrow f(x)$ es continua en $(-1,+\infty)$.
- Si $x=-1 \rightarrow f(-1)=-1+1=0 \rightarrow$ Existe $f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x+1)=0 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2-3)=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to -1} f(x).$$

La función no es continua en $x=-1$, tiene una discontinuidad de salto finito en este punto, por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$.

032 **Calcula a para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x\le -2 \\ -x^2+a & \text{si } x>-2 \end{cases}$$

- Si $x<-2 \rightarrow f(x)=\dfrac{x+1}{x} \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty,-2)$.
- Si $x>-2 \rightarrow f(x)=-x^2+a \rightarrow f(x)$ es continua en $(-2,+\infty)$.
- Si $x=-2 \rightarrow f(x)=\dfrac{-2+1}{-2}=\dfrac{1}{2} \rightarrow$ Existe $f(-2)$.

$$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{x+1}{x}=\frac{1}{2} \qquad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(-x^2+a)=-4+a$$

$f(x)$ es continua en $x=-2$ si:

$$f(-2)=\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)\rightarrow \frac{1}{2}=-4+a\rightarrow a=\frac{9}{2}$$

033 **Determina si la función:**

$$f(x) = sen\ x + cos\ x$$

se anula en algún punto del intervalo (0, 4).

$f(x)$ es la suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$, por lo tanto es continua en $\mathbb{R}$.
$f(x)$ es continua en [0, 4].

$f(0) = 1 > 0$

$f(4) = sen\ 4 + cos\ 4 = -1{,}41 < 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $c \in (0, 4)$ tal que $f(c) = 0$,
es decir, la función se anula en algún punto del intervalo (0, 4).

034 **Dada la función $f(x) = \dfrac{\ln x + 2x}{x - 2}$, halla si existe algún punto c en el intervalo (0, 1) tal que $f(c) = 0$.**

$f(x)$ está definida en $(0, 2) \cup (2, +\infty) \rightarrow f(x)$ es continua en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$,
luego, $f(x)$ no es continua en [0, 1], ya que no está definida en $x = 0$.

Para aplicar el teorema de Bolzano podemos considerar el intervalo (0,1; 1).

$f(x)$ es continua en [0,1; 1].

$f(0{,}1) = 1{,}106 > 0$

$f(1) = -2 < 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $c \in (0{,}1; 1)$ tal que $f(c) = 0$,
es decir, la función se anula en algún punto del intervalo (0,1; 1).
Por tanto, también podemos asegurar que existe algún punto c en el intervalo
(0, 1) tal que $f(c) = 0$.

035 **Dada la siguiente función:**

$$f(x) = sen\,x + cos\,x$$

demuestra que existe un punto $c \in (0, 4)$ tal que $f(c) = -1$.

$f(x)$ es la suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$, por lo tanto es continua en $\mathbb{R}$.
$f(x)$ es continua en [0, 4].

$f(0) = 1$

$f(4) = sen\ 4 + cos\ 4 = -1{,}41$

Como $f(0) > -1 > f(4)$ podemos aplicar el teorema de los valores
intermedios → Existe $c \in (0, 4)$ tal que $f(c) = -1$.

036 **Dada la función $f(x) = \dfrac{\ln x + 2x}{x - 2}$, demuestra que alcanza un máximo y un mínimo absolutos en un intervalo.**

$f(x)$ es continua en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$, por tanto, $f(x)$ es continua en [0,1; 1].
Entonces, por el teorema de Weierstrass, existe al menos un punto donde
la función alcanza su valor máximo absoluto y otro donde toma su valor mínimo
absoluto.

037 Determina el término general de las siguientes sucesiones, y calcula su límite.

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$

b) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

c) $1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \dots$

d) $-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}, -\frac{32}{243}, \dots$

e) $64, 32, 16, 8, 4, 2, \dots$

a) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$

b) $a_n = \frac{n-1}{n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$

c) $a_n = \frac{3+2(n-1)}{3} = \frac{2n+1}{3}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3} = +\infty$

d) $a_n = \frac{(-2)^n}{3^n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$ no existe.

e) $a_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^6}{2^{n-1}} = 2^{7-n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} 2^{7-n} = 0$

038 Halla el límite de estas sucesiones expresadas por su término general.

a) $a_n = 3n+1$

b) $b_n = \frac{5}{n+1}$

c) $c_n = n^2 - 5n + 6$

d) $d_n = 3 - n + n^2 - n^3$

e) $e_n = 3 - \frac{n-4}{2}$

f) $f_n = (n+3)(2n-3)$

g) $g_n = 2^{n-1}$

h) $h_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n^2}$

i) $i_n = 3^{\frac{2}{3n-1}}$

j) $k_n = \frac{n^2+3n-2}{n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (3n+1) = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - 5n + 6) = +\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (3 - n + n^2 - n^3) = -\infty$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3 - \frac{n-4}{2}\right) = -\infty$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} [(n+3)(2n-3)] = +\infty$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n-1} = +\infty$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n^2} = 0$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{2}{3n-1}} = 3^0 = 1$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-2}{n} = +\infty$

039 Calcula los siguientes límites de sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^3 + 8n^2 - n + 8)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{2n^3 + 1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 - 3n - 2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 8n + 16}{35}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n - 2}{3n^3 - 7n + 1}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 - 2n + 3n^2 - n^3}{2n^2 - 5n - 4}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^3 + 8n^2 - n + 8) = -\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{2n^3 + 1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 - 3n - 2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 8n + 16}{35} = +\infty$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n - 2}{3n^3 - 7n + 1} = 0$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 - 2n + 3n^2 - n^3}{2n^2 - 5n - 4} = -\infty$

040 Calcular razonadamente el límite de la sucesión:

$$\frac{(n-2)^2}{(n+1)^3 - (n-1)^3}$$

(Aragón. Septiembre 2005. Opción B. Cuestión 3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^2}{(n+1)^3 - (n-1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 4n + 4}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 4n + 4}{6n^2 + 2} = \frac{1}{6}$$

041 Determina los límites de estas sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^2 - 1}{5n} \cdot \dfrac{6n}{n^3 + 1} \right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2 + 5}{1 - 2n} : \dfrac{5n^3}{n^2 + 12} \right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2 + 3}{5n} + \dfrac{6n - n^2}{3n} \right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n + 2}{6n^2} \right)(8n - 1)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^2 - 1}{5n} \cdot \dfrac{6n}{n^3 + 1} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{24n^2 - 6}{5n^3 + 5} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2 + 5}{1 - 2n} : \dfrac{5n^3}{n^2 + 12} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2 + 5)(n^2 + 12)}{5n^3(1 - 2n)} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 17n^2 + 60}{5n^3 - 10n^4} = -\frac{1}{10}$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+3}{5n}+\dfrac{6n-n^2}{3n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+9+30n-5n^2}{15n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+30n+9}{15n}=+\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{3n+2}{6n^2}\right)(8n-1)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{24n^2+13n-2}{6n^2}=4$

042 Dejamos caer una pelota desde una altura de 4 metros y, tras cada rebote, la altura alcanzada se reduce a la mitad de la altura anterior.
¿Qué altura alcanzará la pelota después de cada uno de los cinco primeros rebotes? ¿Y tras el vigésimo rebote? ¿Y tras el rebote n-ésimo? Si a_n denota la altura alcanzada tras el n-ésimo rebote, obtén una cota superior y otra inferior de esta sucesión.
Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(Galicia. Septiembre 2004. Bloque 4. Pregunta 1)

$a_1=2$ m $\qquad a_2=1$ m $\qquad a_3=\dfrac{1}{2}$ m $\qquad a_4=\dfrac{1}{4}$ m $\qquad a_5=\dfrac{1}{8}$ m

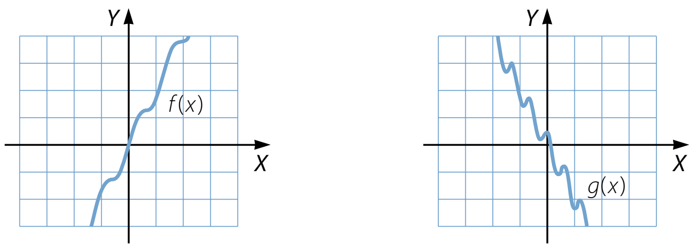
$a_{20}=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{19}=\dfrac{2}{2^{19}}=\dfrac{1}{262.144}$ m

$a_n=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{2}{2^{n-1}}=\dfrac{1}{2^{n-2}}=2^{-(n-2)}$

Una cota superior de la sucesión es 4 y una inferior es 0.

$\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-(n-2)}=0$

043 Observa las gráficas de estas funciones, y calcula los siguientes límites.



a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\qquad$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\qquad$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\qquad$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $\qquad$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

044 Halla estos límites de funciones.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^4}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^x$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^x$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{x^2}$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^x = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^x = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{x^2} = +\infty$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{x^2} = +\infty$

045 Calcula los siguientes límites de funciones.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{3x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{3x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5}$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5}$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{16}{x-2}$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{16}{x-2}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x-3} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{x-3} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = 1$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = 1$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5} = 0$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5} = 0$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{16}{x-2} = 0$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{16}{x-2} = 0$

046 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(Baleares. Septiembre 2008. Opción A. Cuestión 3)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

047 Halla el límite: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

(Navarra. Septiembre 2005. Grupo 2. Opción C)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{x(x-1)}}{(x^2+x)-(x^2-x)} = 1$$

048 Determina los siguientes límites de funciones.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3-12x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-0{,}001x^2)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 0{,}6^{2x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-3)^x$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3-12x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-0{,}001x^2) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 0{,}6^{2x-1} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-3)^x = +\infty$

049 Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 4x} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{1-x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 4x} \right)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{1-x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 4x} \right) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 4x} \right) \to -\infty + \infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 4x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 4x}{x - \sqrt{x^2 - 4x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{x - \sqrt{x^2 - 4x}} = 2$$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{1-x} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{1-x} = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x} - 1 \right) \cdot (1-x) \right]} = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2-2x}{x}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{1-x} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{1-x} = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x} - 1 \right) \cdot (1-x) \right]} = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2+2x}{x}} = e^{2}$$

050 Calcula el límite: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x-2)}{x-2}$

(La Rioja. Septiembre 2005. Propuesta A. Ejercicio 5)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x-2)}{x-2} \to \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x-2)}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x - (x-2)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + (x-2) \right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 4}{(x-2)\sqrt{x^2 - 2x} + (x-2)^2} = 0$$

051 Calcula el límite: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$

(Navarra. Junio 2008. Grupo 1. Opción C)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} \to \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1-x+1)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{(x+2-x+2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{4\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{1}{2}$$

052 Halla el límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-\dfrac{2x^4+3x}{x^2-1}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{2x^4+3x}{x^2-1}\right)\to\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{2x^4+3x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-1-2x^5-3x^2}{x(x^2-1)}=-\infty$$

053 Determina el límite: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3+2x^2-3}{x^2-2}+\dfrac{2x^2-x}{x-1}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-3}{x^2-2}+\frac{2x^2-x}{x-1}\right)\to-\infty+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-3}{x^2-2}+\frac{2x^2-x}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+x^3-2x^2-3x+3+2x^4-x^3-4x^2+2x}{(x^2-2)(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-6x^2-x+3}{x^3-x^2-2x+2}=-\infty$$

054 Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right)$.

(Aragón. Septiembre 2008. Bloque 3. Opción A)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right)\to\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+1-(4x^2-3x+2)}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}}=\frac{3}{4}$$

055 Calcula el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right)$.

(Navarra. Junio 2004. Grupo 2. Opción C)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right) \to \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = 1$$

056 Calcula el límite: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

(Navarra. Septiembre 2004. Grupo 2. Opción C)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \to \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

057 Calcula: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

(Asturias. Septiembre 2006. Bloque 5)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \to 1^\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\left(1 + \frac{2}{x} - 1\right)\cdot x\right]} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x}} = e^2$$

058 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2 + 5x}{1 + 5x}\right)^{2x - 12}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x}\right)^{2x + 2}$

a) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2 + 5x}{1 + 5x}\right)^{2x - 12} \to 1^\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2 + 5x}{1 + 5x}\right)^{2x - 12} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\left(\frac{2+5x}{1+5x} - 1\right)\cdot(2x - 12)\right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(2 + 5x - 1 - 5x)(2x - 12)}{1 + 5x}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 12}{1 + 5x}} = e^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{e^2}$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x}\right)^{2x + 2} \to 1^\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x}\right)^{2x + 2} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x} - 1\right)\cdot(2x + 2)\right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x^2 + 2x - 3 - x^2 - 3x)(2x + 2)}{x^2 + 3x}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^2 - 8x - 6}{x^2 + 3x}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

059 Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}$.

(Aragón. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 3)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}} \to 1^\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x+5}{x-1}-1\right)\cdot\frac{x^2}{x+3}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+5-x+1)\cdot x^2}{(x-1)(x+3)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{x^2+2x-3}} = e^6$$

060 Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x$

(Navarra. Septiembre 2004. Grupo 2. Opción C)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x \to 1^\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{3x+1}{3x-1}-1\right)\cdot x\right]} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(3x+1-3x+1)\cdot x}{3x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x-1}} = e^{\frac{2}{3}}$$

061 Calcula: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x-8}{2^{x+1}}\right)$

(Asturias. Junio 2007. Bloque 4)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x-8}{2^{x+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x}{2^{x+1}}-\frac{2^3}{2^{x+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{2^2}{2^x}\right) = \frac{1}{2}$$

062 Expresa las funciones siguientes como funciones definidas a trozos y, después, halla sus límites cuando x tiende a $-\infty$ y a $+\infty$.

a) $f(x) = |x+2| - |x-2|$

b) $f(x) = x - |3-2x|$

c) $f(x) = \left|\frac{2x+3}{x-2}\right|$

d) $f(x) = \left|\frac{x-3}{1-x}\right|$

a) $f(x) = \begin{cases} -x-2-(-x+2) & \text{si } x<-2 \\ x+2-(-x+2) & \text{si } -2\le x<2 \\ x+2-(x-2) & \text{si } x\ge 2\end{cases} \to f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x<-2 \\ 2x & \text{si } -2\le x<2 \\ 4 & \text{si } x\ge 2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-4) = -4$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4 = 4$

b) $f(x) = \begin{cases} x - (3 - 2x) & \text{si } x < \dfrac{3}{2} \\ x - (-3 + 2x) & \text{si } x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si } x < \dfrac{3}{2} \\ -x + 3 & \text{si } x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3x - 3) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x + 3) = -\infty$

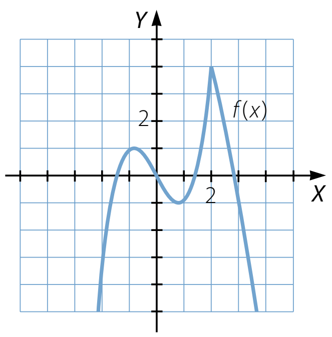
c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x-2} & \text{si } x < -\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{2x+3}{x-2} & \text{si } -\dfrac{3}{2} \leq x < 2 \\ \dfrac{2x+3}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+3}{x-2} = 2$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+3}{x-2} = 2$

d) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } 1 < x < 3 \\ -\dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\dfrac{x-3}{1-x}\right) = 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{x-3}{1-x}\right) = 1$

063 La siguiente representación es la gráfica de la función $f(x)$.



Da un valor aproximado a estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -0,9$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

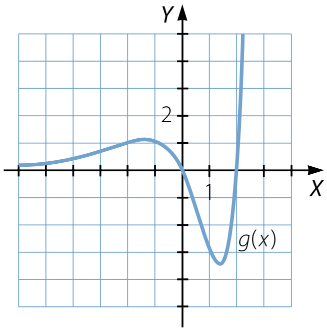
c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

d) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -1$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

064 Esta es la gráfica de la función $g(x)$.



Da un valor aproximado de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to -3} g(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

a) $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = 0{,}7$ c) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = -2{,}9$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ d) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 0$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

065 Si $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$, calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{9}{\sqrt{10}} = \dfrac{9\sqrt{10}}{10}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{2}} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

066 Dada $f(x) = 2^{\ln x}$, determina:

a) $\lim\limits_{x \to e} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to e} f(x) = 2^1 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$ no existe porque no podemos calcular logaritmos de números negativos.

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe ya que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ no existe.

067 Si tenemos la función $f(x)=\dfrac{6x-12}{x^2-3x-4}$, ¿cuáles serán sus límites cuando x tienda a 0, -1, 1 y 4?

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=3$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=\frac{-18}{0}=\infty\to\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to -1} f(x).$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=1$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=\frac{12}{0}=\infty\to\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to 4} f(x).$$

068 Siendo la función $g(x)=\log(x^2-4)$, determina sus límites cuando x tienda a 5, -5, -2 y 1.

$$\lim_{x\to 5}\log(x^2-4)=\log 21=1{,}32 \qquad \lim_{x\to -5}\log(x^2-4)=\log 21=1{,}32$$

$$\lim_{x\to -2}\log(x^2-4)=\log 0\to\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+} g(x)\text{ no existe}\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to -2} g(x).$$

$$\lim_{x\to 1}\log(x^2-4)\text{ no existe.}$$

069 Si sabemos que $\lim\limits_{x\to 5} m(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 5} n(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 5} p(x)=+\infty$, calcula, si es posible, el límite cuando x tiende a 5 de las funciones.

a) $m(x)+n(x)+p(x)$
b) $m(x)\cdot n(x)-p(x)$
c) $m(x)\cdot p(x)$
d) $\dfrac{n(x)}{m(x)}$
e) $\dfrac{m(x)}{n(x)}$
f) $n(x)\cdot p(x)$
g) $\dfrac{p(x)}{m(x)}$
h) $\dfrac{n(x)}{p(x)}$
i) $\left(m(x)\right)^{n(x)}$
j) $\left(m(x)\right)^{p(x)}$
k) $\left(n(x)\right)^{p(x)}$
l) $\left(p(x)\right)^{n(x)}$

a) $\lim\limits_{x\to 5}[m(x)+n(x)+p(x)]=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 5}[m(x)\cdot n(x)-p(x)]=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 5}[m(x)\cdot p(x)]=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\left[\dfrac{n(x)}{m(x)}\right]=0$

e) $\lim\limits_{x\to 5}\left[\dfrac{m(x)}{n(x)}\right]=\dfrac{4}{0}\to$ No se puede calcular el límite.

f) $\lim\limits_{x\to 5} [n(x)\cdot p(x)] \to 0\cdot +\infty$ Indeterminación

g) $\lim\limits_{x\to 5}\left[\dfrac{p(x)}{m(x)}\right] = +\infty$

h) $\lim\limits_{x\to 5}\left[\dfrac{n(x)}{p(x)}\right] = 0$

i) $\lim\limits_{x\to 5} [(m(x))^{n(x)}] = 4^0 = 1$

j) $\lim\limits_{x\to 5} [(m(x))^{p(x)}] = +\infty$

k) $\lim\limits_{x\to 5} [(n(x))^{p(x)}] = 0$

l) $\lim\limits_{x\to 5} [(p(x))^{n(x)}] \to +\infty^0$ Indeterminación

070 **Si $h(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, calcula su límite en los puntos 6, −5, 1 y 0.**

$\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{\ln 6} = 0{,}56$

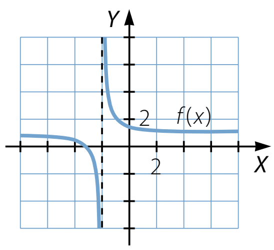
$\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{1}{\ln x}$ no existe.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to 1} h(x).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\ln 0} \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) \text{ no existe}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to 0} h(x).$$

071 **Observa la gráfica y determina los siguientes límites.**

a)



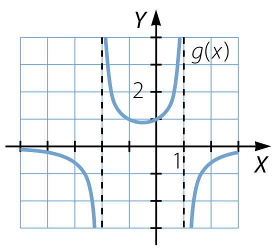
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b)

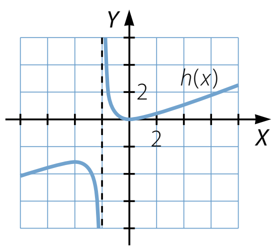


$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)$ $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

c)



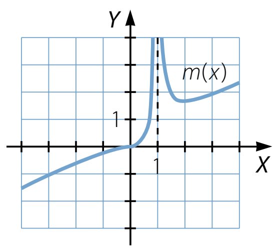
$\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$

$\lim\limits_{x\to -2^-} h(x)$

$\lim\limits_{x\to -2^+} h(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$

d)



$\lim\limits_{x\to -\infty} m(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} m(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} m(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} m(x)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} h(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} m(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} m(x) = +\infty$

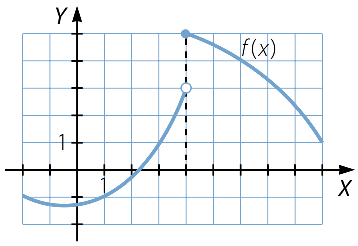
$\lim\limits_{x \to 1^-} m(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} m(x) = +\infty$

072 Observa la gráfica de la función $f(x)$, y calcula los límites.

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

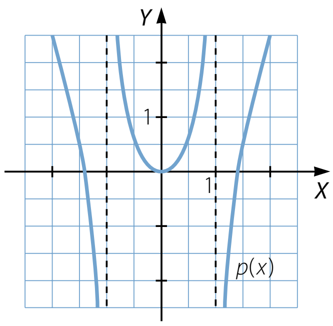
b) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$



a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$ b) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 3$ c) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 5$

073 Esta es la gráfica de la función $p(x)$.



Determina los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} p(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -1^+} p(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 1^+} p(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} p(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 1^-} p(x)$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x)$

a) $\lim\limits_{x \to 0} p(x) = 0$ c) $\lim\limits_{x \to -1^+} p(x) = +\infty$ e) $\lim\limits_{x \to 1^+} p(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} p(x) = -\infty$ d) $\lim\limits_{x \to 1^-} p(x) = +\infty$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$

074 Resuelve estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$ $\quad\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$ $\quad\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$

c) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 9}$ $\quad\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 9}$

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$ $\quad\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = -1$ $\quad\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = -1$

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = -\infty$ $\quad\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 9} = -\infty$ $\quad\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 9} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2(x+3)} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$

075 Calcula $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$.

(Navarra. Junio 2001. Opción D. Pregunta 1)

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty$$

076 Determina los límites siguientes y, en caso de resultar infinito, halla los límites laterales.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 2}$ $\quad\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$ $\quad\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^3 - 18x^2 + 27x}{5x^2 - 20x + 15}$ $\quad\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x^3 - 18x^2 + 27x}{5x^2 - 20x + 15}$

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(2x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{3}{5}$

$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 2} = 0$

b) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = \lim_{x\to -2} \frac{x(x+2)(x+3)}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{-2}{0} = \infty$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = \lim_{x\to -2^-} \frac{x(x+3)}{(x-3)(x+2)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = \lim_{x\to -2^+} \frac{x(x+3)}{(x-3)(x+2)} = +\infty$$

$\lim_{x\to -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = 0$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - 18x^2 + 27x}{5x^2 - 20x + 15} = \frac{12}{0} = \infty$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3x^3 - 18x^2 + 27x}{5x^2 - 20x + 15} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x^3 - 18x^2 + 27x}{5x^2 - 20x + 15} = -\infty$$

$\lim_{x\to 3} \frac{3x^3 - 18x^2 + 27x}{5x^2 - 20x + 15} = \lim_{x\to 3} \frac{3x(x-3)^2}{5(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{3x(x-3)}{5(x-1)} = 0$

077 Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Calcula $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

(Baleares. Septiembre 2008. Opción B. Cuestión 3)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to 1} f(x).$$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$

078 Obtén los resultados de estos límites.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}}$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

e) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

f) $\lim_{x\to 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[6]{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}} = \dfrac{1}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}} \text{ no existe} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}.$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)(x-1)}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{x-1}} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = -\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{1}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \lim\limits_{x\to 9} (\sqrt{x}+3) = 6$

079 Si $f(x) = \dfrac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2}$, determina:

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -7} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2} = \dfrac{240}{90} = \dfrac{8}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2} = \lim\limits_{x\to -7} \dfrac{(x+1)(x+3)(x+7)}{x^2(x+7)} =$

$= \lim\limits_{x\to -7} \dfrac{(x+1)(x+3)}{x^2} = \dfrac{24}{49}$

c) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2} = \dfrac{21}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2} = 1$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2} = 1$

080 Si $f(x) = \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21}$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$
c) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$
e) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
b) $\lim\limits_{x\to -7} f(x)$
d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
f) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = \dfrac{108}{60} = \dfrac{9}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = \lim\limits_{x\to -7} \dfrac{x(x+3)^2}{(x+3)(x+7)} = \lim\limits_{x\to -7} \dfrac{x(x+3)}{x+7} = \dfrac{28}{0} = \infty$

$$\to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -7^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -7^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to -7} f(x).$$

c) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x(x+3)}{x+7} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = -\infty$

081 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$. Calcula $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

(Baleares. Junio 2008. Opción A. Cuestión 3)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{(x-1)^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{(x-1)^2} = +\infty \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0$$

082 Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2008. Bloque 1. Pregunta A)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)(x-7)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0} (x-7) = -7$$

083 Se considera la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$. Calcula $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

(Baleares. Junio 2008. Opción B. Cuestión 3)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{x^2-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to -1} f(x).$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x^2-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to 1} f(x).$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$

084 Sea $f(x)=\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{12}{x^2-9}$. Calcular el límite de la función cuando x tiende a -3.

(Asturias. Septiembre 2002. Bloque 3)

$$\lim_{x\to -3}\left(\frac{2}{x-3}-\frac{12}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to -3}\frac{2x^2-12x+18}{(x-3)(x^2-9)}=\lim_{x\to -3}\frac{2(x-3)^2}{(x-3)^2(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{2}{x+3}=\frac{2}{0}=\infty\to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to -3} f(x).$$

085 Calcula $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{x}}$.

(La Rioja. Septiembre 2005. Propuesta A. Ejercicio 5)

$$\lim_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{x}}\to 1^{\infty}\qquad \lim_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[(2x+1-1)\cdot\frac{1}{x}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}}=e^2$$

086 Calcula $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\text{sen}^2 x}}$.

(Navarra. Junio 2001. Opción D. Pregunta 1)

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\text{sen}^2 x}}\to 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\text{sen}^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\frac{1}{\text{sen}^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\text{sen}^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{1-\cos^2 x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{(1-\cos x)(1+\cos x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{1+\cos x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{e}$$

087 Calcula el límite de esta función si $x \to +\infty$: $f(x) = \left(\dfrac{x^2-2}{1+x^2}\right)^{x+2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2}{1+x^2}\right)^{x+2} \to 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2}{1+x^2}\right)^{x+2} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x^2-2}{1+x^2}-1\right)\cdot(x+2)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^2-2-1-x^2)(x+2)}{1+x^2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x-6}{1+x^2}} = e^0 = 1$$

088 Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$.

(Madrid. Junio 2003. Opción A. Ejercicio 1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{4+x-(4-x)}{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)} = \frac{1}{8}$$

089 Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

(Andalucía. Año 2001. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}$$

090 Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$, halla:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right) = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}\right)=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)=0$

091 Si $g(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<3 \\ \dfrac{3}{x+5} & \text{si } x\geq 3\end{cases}$, determina los límites:

a) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$
c) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$
e) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$
b) $\lim\limits_{x\to -5} g(x)$
d) $\lim\limits_{x\to 6} g(x)$
f) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$

a) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x^2-1)=0$

b) $\lim\limits_{x\to -5} g(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x^2-1)=24$

c) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-1)=8\\ \lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{3}{x+5}=\dfrac{3}{8}\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to 3^-} g(x)\neq \lim\limits_{x\to 3^+} g(x)\to$ No existe $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$.

d) $\lim\limits_{x\to 6} g(x)=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{3}{x+5}=\dfrac{3}{11}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3}{x+5}=0$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2-1)=+\infty$

092 Sea la función: $h(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x-2} & \text{si } x<-2\\ x^2+4x+4 & \text{si } -2\leq x<3\\ 2^{x+1}+9 & \text{si } x>3\end{cases}$. Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to -5} h(x)$
c) $\lim\limits_{x\to 5} h(x)$
e) $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$
b) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$
d) $\lim\limits_{x\to -2} h(x)$
f) $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$

a) $\lim_{x\to -5} h(x) = \lim_{x\to -5} \frac{4}{x-2} = -\frac{4}{7}$

b) $\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} (x^2 + 4x + 4) = 16$

c) $\lim_{x\to 5} h(x) = \lim_{x\to 5} (2^{x+1} + 9) = 73$

d) $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -2^-} h(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{4}{x-2} = -1 \\ \lim_{x\to -2^+} h(x) = \lim_{x\to -2^+} (x^2 + 4x + 4) = 0 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to -2^-} h(x) \neq \lim_{x\to -2^+} h(x)$$
$\to$ No existe $\lim_{x\to -2} h(x)$.

e) $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} h(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2 + 4x + 4) = 25 \\ \lim_{x\to 3^+} h(x) = \lim_{x\to 3^+} (2^{x+1} + 9) = 25 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 3^-} h(x) = \lim_{x\to 3^+} h(x)$$
$\to \lim_{x\to 3} h(x) = 25$

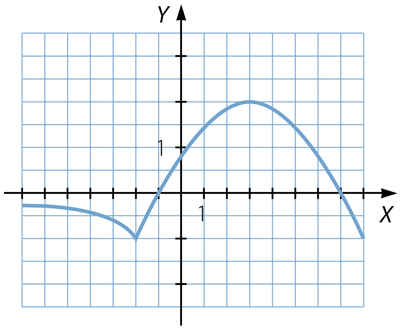
f) $\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} (2^{x+1} + 9) = +\infty$

093 **Dibuja la gráfica aproximada de una función que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:**

$\lim_{x\to 3} f(x) = 2$ $\quad$ $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$

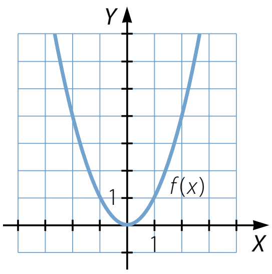
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

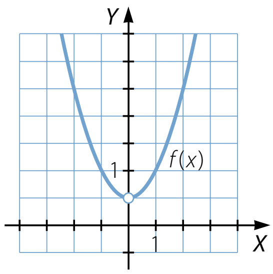


094 **Decide si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican. En caso de no serlo, determina el tipo de discontinuidad existente.**

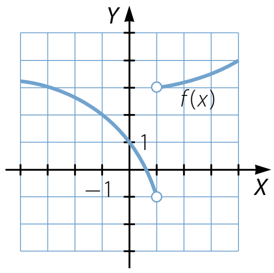
a) En $x = 0$ y $x = 2$.



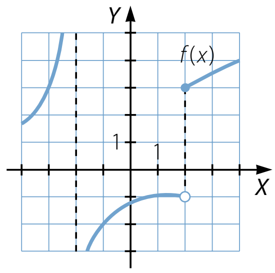
b) En $x = 0$ y $x = 2$.



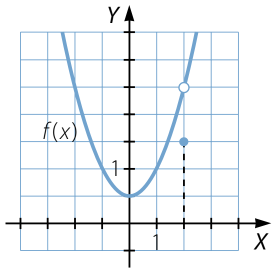
c) En $x = 1$.



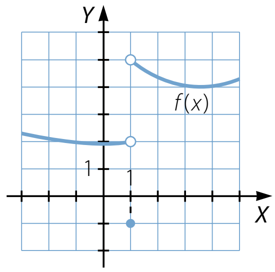
e) En $x = -2$ y $x = 2$.



d) En $x = -1$ y $x = 2$.



f) En $x = 1$.



a) • $f(0) = 0 = \lim\limits_{x \to 0} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = 0$.

• $f(2) = 4 = \lim\limits_{x \to 2} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = 2$.

b) • No existe $f(0)$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0{,}5 \rightarrow$ Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0{,}5$.

La función no es continua en $x = 0$, tiene una discontinuidad evitable.

• $f(2) = 2{,}5 = \lim\limits_{x \to 2} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = 2$.

c) No existe $f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3\end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 1} f(x).$$

La función no es continua en $x = 1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

d) • $f(-1) = 1 = \lim\limits_{x \to -1} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = -1$.

• $f(2) = 1{,}5$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2{,}5 \rightarrow$ Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2{,}5$.

$f(2) \neq \lim\limits_{x \to 2} f(x) \rightarrow$ La función no es continua en $x = 2$, tiene una discontinuidad evitable.

e) • No existe $f(-2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to -2} f(x).$$

La función no es continua en $x = -2$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

- $f(2) = 3$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 2} f(x).$$

La función no es continua en $x = 2$, tiene una discontinuidad de salto finito.

f) $f(1) = -1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 5\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 1} f(x).$$

La función no es continua en $x = 1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

095 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones.**

a) $y = x^2 - 5x + 6$

b) $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

d) $y = \sqrt{4 - x^2}$

e) $y = \ln|x|$

f) $y = \log(2 - x)$

a) La función es polinómica, por tanto es continua en $\mathbb{R}$.

b) $x^2 - 5x + 6 = 0 \to \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Dominio $= \mathbb{R} - \{2, 3\}$

- No existe $f(2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 2} f(x).$$

- No existe $f(3)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3} f(x).$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{2, 3\}$, tiene discontinuidades de salto infinito en $x = 2$ y en $x = 3$.

c) $x^2 - 4 \geq 0 \to (x + 2)(x - 2) \geq 0 \to \left\{\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{array}\right.$

La función está definida en $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, por tanto, es continua en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

d) $4 - x^2 \geq 0 \to (2 + x)(2 - x) \geq 0 \to -2 \leq x \leq 2$

La función está definida en $[-2, 2]$, por tanto, es continua en $(-2, 2)$.

e) No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

f) $2 - x > 0 \to x < 2$

La función está definida en $(-\infty, 2)$, por tanto es continua en $(-\infty, 2)$.

096 **¿En qué puntos presentan una discontinuidad estas funciones y de qué tipo son?**

a) $y = \dfrac{5}{x-2}$

b) $y = \dfrac{6x}{x^2 - 2x + 3}$

c) $y = \dfrac{3x-6}{x^2 - 2x + 1}$

d) $y = \dfrac{2x+2}{x^2 - 2x - 3}$

e) $y = \dfrac{x^2 - x}{2x^2 + 4x - 6}$

f) $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 6}{x^2 - x}$

a) No existe $f(2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 2} f(x)$$

La función tiene en $x = 2$ una discontinuidad de salto infinito.

b) $x^2 - 2x + 3 \neq 0$ para cualquier valor de x, así no hay puntos de discontinuidad.

c) $x^2 - 2x + 1 = 0 \to x = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

La función tiene en $x = 1$ una discontinuidad de salto infinito.

d) $x^2 - 2x - 3 = 0 \to \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

- No existe $f(-1)$.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to -1} \frac{2}{x-3} = -\frac{1}{2}$$

- No existe $f(3)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3} f(x)$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$, tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$ y una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

e) $2x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$

- No existe $f(-3)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to -3} f(x).$$

- No existe $f(1)$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{2(x-1)(x+3)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{2(x+3)} = \frac{1}{8}$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$, tiene una discontinuidad evitable en $x = -3$ y una discontinuidad evitable en $x = 1$.

f) $x^2 - x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

- No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 0} f(x).$$

- No existe $f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 1} f(x).$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, tiene discontinuidades de salto infinito en $x = 0$ y en $x = 1$.

097 **Sea $f(x) = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{x^2-9}$. Comprobar si la función es continua en $x = 3$.**

(Asturias. Septiembre 2002. Bloque 3)

No existe $f(3)$.

$$\lim_{x \to 3}\left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}\right) = \lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 12x + 18}{(x-3)(x^2-9)} = \lim_{x \to 3} \frac{2(x-3)^2}{(x-3)^2(x+3)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{2}{x+3} = \frac{1}{3}$$

La función no es continua en $x = 3$, tiene una discontinuidad evitable.

098 **Si $f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$, indica de forma razonada en qué valor $x = a$ no está definida $f(x)$.**

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 1. Pregunta A)

La función no está definida para los valores que anulan el denominador, es decir, para $x = 0$.

099 La función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ no está definida para $x = 0$. Definir $f(0)$ de modo que $f(x)$ sea una función continua en ese punto.

(Aragón. Septiembre 2006. Opción B. Cuestión 2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

La función es continua si: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

100 Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ y clasificar sus diferentes tipos de discontinuidad.

(Murcia. Septiembre 2006. Bloque 3. Cuestión A)

$$x^2+3x+2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

- No existe $f(-2)$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to -2} f(x).$$

- No existe $f(-1)$.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+2} = -2$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-2, -1\}$, tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = -2$ y una discontinuidad evitable en $x = -1$.

101 ¿Cuáles son las diferencias entre las funciones $y = 2x - 1$ e $y = \dfrac{(2x-1)(x+2)}{x+2}$. ¿Son las dos funciones continuas?

Si tienen alguna discontinuidad, decide de qué tipo es.

Escribe, si es posible, la segunda función como función definida a trozos utilizando la primera.

Las funciones tienen la misma gráfica salvo en el punto $x = -2$. La primera es una recta y es continua, la segunda está formada por dos semirrectas y no es continua en este punto.

$$\lim_{x\to -2} \frac{(2x-1)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} (2x-1) = -5$$

La discontinuidad de la segunda función en $x = -2$ es evitable.

Así, la segunda función es: $f(x) = 2x - 1 \quad \text{si } x \neq -2$

102 Estudia la continuidad en $x = -1$ y $x = 2$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 4x - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 11 + \ln(x - 1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Clasifica los tipos de discontinuidades.

- $f(-1) = -4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -5 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -4 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to -1} f(x).$$

La función no es continua en $x = -1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

- $f(2) = 11$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 11 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 11 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 11 = f(2)$$

La función es continua en $x = 2$.

103 Estudia la continuidad de la siguiente función en los puntos $x = 0$ y $x = 3$.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x - 4} & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x - 3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- No existe $g(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -1 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 0} g(x) = -1$$

La función no es continua en $x = 0$, tiene una discontinuidad evitable.

- $g(3) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 3} g(x).$$

La función no es continua en $x = 3$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

104 Estudia si la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 2$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2005. Bloque 1. Pregunta A)

- $f(-1) = -1$

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

  La función no es continua en $x = -1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

- $f(2) = -3$

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -3\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 2} f(x) = -3 = f(2)$

  La función es continua en $x = 2$.

105 **Estudiar la continuidad de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

en el punto $x = 3$.

(Galicia. Junio 2000. Bloque 1. Pregunta 2)

$f(3) = 6$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} (x+3) = 6 = f(3)$

La función es continua en $x = 3$.

106 **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

determina k para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2001. Bloque 3. Pregunta A)

La función es continua si: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = 7$

Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 7 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 + k\end{array}\right\} \to 7 = 1 + k \to k = 6$

107 **¿Qué valor debe tomar a en la siguiente función para que sea continua en el punto $x = 4$?**

$$h(x) = \begin{cases} \cos(x - 4) & \text{si } x < 4 \\ 2^{x-2a} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

La función es continua si: $\lim\limits_{x \to 4} h(x) = h(4)$

$h(4) = 2^{4-2a}$

Existe $\lim\limits_{x \to 4} h(x)$ si $\lim\limits_{x \to 4^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} h(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} h(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} h(x) = 2^{4-2a} \end{array}\right\} \to 2^{4-2a} = 1 \to 4 - 2a = 0 \to a = 2$$

108 **Completa la función para que sea continua en $x = 2$.**

$$p(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ \boxed{} & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función es continua si: $\lim\limits_{x \to 2} p(x) = p(2)$

Existe $\lim\limits_{x \to 2} p(x)$ si $\lim\limits_{x \to 2^-} p(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} p(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} p(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} p(x) = -1 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 2} p(x) = -1$$

Entonces la función es continua si: $p(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

109 **Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

¿En qué puntos es continua la función?

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2003. Bloque 2. Pregunta A)

La función está formada por dos funciones polinómicas, por tanto, continuas en los intervalos en los que están definidas. Estudiamos qué ocurre en el punto $x = 3$:

$f(3) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 3} f(x).$$

Luego la función no es continua en $x = 3$, tiene una discontinuidad de salto finito.

110 **Estudia la continuidad de esta función, y especifica los tipos de discontinuidades que presente.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{8}{3 - x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

- $f(x) = 1 + x^2$ es una función polinómica, por tanto, $f(x)$ es continua en $(-\infty, -1)$.
- $f(-1) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) \to f(x)$ es continua en $x = 2$.

- $f(x) = \dfrac{8}{3 - x}$ está definida en $\mathbb{R} - \{3\}$, por tanto, $f(x)$ es continua en $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$.
- No existe $f(3)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 3} f(x).$$

Luego la función no es continua en $x = 3$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

111 **Estudia la continuidad de la función:**

$$g(x) = \begin{cases} 3 \ln(x + 2) & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

- $g(x) = 3 \ln(x + 2)$ está definida en $(-2, +\infty)$, por tanto, $g(x)$ es continua en $(-2, -1)$.
- $g(-1) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to -1} g(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to -1} g(x) \neq g(-1) \to g(x)$ no es continua en $x = -1$, tiene una discontinuidad evitable.

- $g(x) = x^2 - 1$ es una función polinómica, por tanto, $g(x)$ es continua en $(-1, +\infty)$.

112 **Estudia la continuidad de esta función:**

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x+3} & \text{si } x<-2\\ x^2+2x+4 & \text{si } -2\le x<1\\ \dfrac{3}{x+7} & \text{si } x>1\end{cases}$$

- $h(x)=\dfrac{4}{x+3}$ está definida en $\mathbb{R}-\{-3\}$, por tanto, $h(x)$ es continua en $(-\infty,-3)\cup(-3,-2)$.

  No existe $h(-3)$.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} h(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -3^+} h(x)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim\limits_{x\to -3} h(x).$$

  Luego la función no es continua en $x=-3$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

- Estudiamos qué ocurre en el punto $x=-2$:

  $h(-2)=4$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} h(x)=4\\ \lim\limits_{x\to -2^+} h(x)=4\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to -2} h(x)=4$$

  $\lim\limits_{x\to -2} h(x)=h(-2)\to h(x)$ es continua en $x=-2$.

- $h(x)=x^2+2x+4$ es una función polinómica, por tanto, $h(x)$ es continua en $(-2, 1)$.

- $h(x)=\dfrac{3}{x+7}$ está definida en $\mathbb{R}-\{-7\}$, por tanto, $h(x)$ es continua en $(1,+\infty)$.

- Estudiamos qué ocurre en el punto $x=1$:

  No existe $h(1)$.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=7\\ \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=\dfrac{3}{8}\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 1} h(x).$$

  Luego la función no es continua en $x=1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

113 **Estudiar la continuidad de la función:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x} & \text{si } x\le 1\\ -x^2+4x-2 & \text{si } x>1\end{cases}$$

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2000. Bloque 3. Pregunta A)

- $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ está definida en $\mathbb{R} - \{2\}$, por tanto, $f(x)$ es continua en $(-\infty, 1)$.
- $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ es una función polinómica, por tanto, $f(x)$ es continua en $(1, +\infty)$.
- Estudiamos qué ocurre en el punto $x = 1$:

  $f(1) = 1$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$$

  $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \to f(x)$ es continua en $x = 1$.

114 **Se considera la función real de variable real definida por:**

$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$. **Estudiar su continuidad.**

(Madrid. Septiembre 2002. Opción A. Ejercicio 2)

- $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ está definida en $\mathbb{R}$, por tanto, $f(x)$ es continua en $(2, +\infty)$.
- $f(x) = x(x-2)$ es una función polinómica, por tanto, $f(x)$ es continua en $(-\infty, 2)$.
- Estudiamos qué ocurre en el punto $x = 2$:

  $f(2) = 0$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$$

  $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) \to f(x)$ es continua en $x = 2$.

115 **Expresa estas funciones como funciones definidas a trozos, y estudia su continuidad.**

a) $y = |x|$

b) $y = |x+5|$

c) $y = |3 - 2x|$

d) $y = |x^2 - x - 6|$

e) $y = |6 - x^2|$

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- $f(0) = 0$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$$

  $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \to f(x)$ es continua en $x = 0$.

- La función está formada por funciones polinómicas, por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x \geq -5 \\ -x-5 & \text{si } x < -5 \end{cases}$

- $f(-5) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -5^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -5^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to -5} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to -5} f(x) = f(-5) \to f(x)$ es continua en $x = -5$.

- La función está formada por funciones polinómicas, por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{si } x \leq \dfrac{3}{2} \\ 2x-3 & \text{si } x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$

- $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) \to f(x)$ es continua en $x = \dfrac{3}{2}$.

- La función está formada por funciones polinómicas, por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

d) $x^2 - x - 6 = 0 \to \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + x + 6 & \text{si } -2 < x \leq 3 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- $f(-2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) \to f(x)$ es continua en $x = -2$.

- $f(3) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) \to f(x)$ es continua en $x = 3$.

- La función está formada por funciones polinómicas, por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

e) $6 - x^2 = 0 \to x = \pm\sqrt{6}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{si } x \le -\sqrt{6} \\ 6 - x^2 & \text{si } -\sqrt{6} < x \le \sqrt{6} \\ x^2 - 6 & \text{si } x > \sqrt{6} \end{cases}$$

- $f\left(-\sqrt{6}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to (-\sqrt{6})^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to (-\sqrt{6})^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to -\sqrt{6}} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to -\sqrt{6}} f(x) = f\left(-\sqrt{6}\right) \to f(x)$ es continua en $x = -\sqrt{6}$.

- $f\left(\sqrt{6}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to (\sqrt{6})^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to (\sqrt{6})^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to \sqrt{6}} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to \sqrt{6}} f(x) = f\left(\sqrt{6}\right) \to f(x)$ es continua en $x = \sqrt{6}$.

- La función está formada por funciones polinómicas, por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

116 **Se considera la función $f(x) = \left| sen\, 4x - \dfrac{1}{2} \right|$. Estudia su continuidad en el intervalo $(0, \pi)$.**

(Cantabria. Junio 2001. Bloque 1. Opción B)

$$sen\, 4x - \frac{1}{2} = 0 \to sen\, 4x = \frac{1}{2} \to \begin{cases} 4x = \dfrac{\pi}{6} \to x = \dfrac{\pi}{24} \\ 4x = \dfrac{5\pi}{6} \to x = \dfrac{5\pi}{24} \end{cases} \text{en el intervalo } (0, \pi)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - sen\, 4x & \text{si } 0 < x < \dfrac{\pi}{6} \\ sen\, 4x - \dfrac{1}{2} & \text{si } \dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{5\pi}{6} \\ \dfrac{1}{2} - sen\, 4x & \text{si } \dfrac{5\pi}{6} < x < \pi \end{cases}$$

- $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} f(x) = 0$$

$$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) \to f(x) \text{ es continua en } x = \frac{\pi}{6}.$$

- $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{6}^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{6}^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{6}} f(x) = 0$$

$$\lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{6}} f(x) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) \to f(x) \text{ es continua en } x = \frac{5\pi}{6}.$$

La función es continua en $(0, \pi)$.

117 **Encontrar el valor de k para el cual la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6-x}{2} & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ es continua.**

(Aragón. Junio 2008. Bloque 3. Opción B)

- La función está formada por funciones polinómicas, por tanto, es continua en los intervalos en los que están definidas. Estudiamos el punto en el que cambia su expresión algebraica.
- La función es continua en $x = 2$ si: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

  $f(2) = 4 + 2k$

  Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4 + 2k\end{array}\right\} \to 2 = 4 + 2k \to 2k = -2 \to k = -1$$

118 **Se sabe que la función $f\colon (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2 + a}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

es continua en $(-1, +\infty)$. Halla el valor de a.

(Andalucía. Junio 2004. Opción B. Ejercicio 1)

Como las funciones son continuas en los intervalos en los que están definidas, $f(x)$ es continua en $(-1, +\infty)$ si es continua en $x = 0$, es decir, si $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

$f(0) = a$

Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ si $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = a \end{array}\right\} \rightarrow a = 3$$

119 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 5 + 2\ sen\ x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de los parámetros a y b es continua la función $f(x)$?

(Canarias. Junio 2000. Opción A. Cuestión 1)

Para cualquier valor de los parámetros a y b las funciones son continuas en los intervalos en los que están definidas.

Estudiamos qué ocurre en el punto $x = 0$:

$f(0) = 5$

Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ si $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = 5 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = b \end{array}\right\} \rightarrow b = 5$$

Luego $f(x)$ es continua si $b = 5$, independientemente del valor de a.

120 Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax^2 + bx & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ x - 4 & \text{si } 4 < x \end{cases}$, determina a y b de modo que sea continua.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2001. Bloque 2. Pregunta A)

- Como las funciones son continuas en los intervalos en los que están definidas, $f(x)$ es continua si es continua en $x = -2$ y en $x = 4$.
- La función es continua en $x = -2$ si: $\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2)$.

  $f(-2) = -3$

  Existe $\lim_{x\to -2} f(x)$ si $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -2^-} f(x) = -3 \\ \lim_{x\to -2^+} f(x) = 4a - 2b \end{array}\right\} \rightarrow 4a - 2b = -3$$

- La función es continua en $x = 4$ si: $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4)$

  $f(4) = 16a + 4b$

  Existe $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 16a + 4b \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \to 16a + 4b = 0$$

Entonces: $\left.\begin{array}{r} 4a - 2b = -3 \\ 16a + 4b = 0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases}$

121 **Calcular los valores de los parámetros *a* y *b* para que la función siguiente resulte continua en todos los puntos.**

$$f(x) = \begin{cases} ax - b & \text{si } x < -1 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -bx^3 + a & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Canarias. Junio 2003. Opción B. Cuestión 1)

Como las funciones son continuas en los intervalos en los que están definidas, $f(x)$ es continua si es continua en $x = -1$ y en $x = 2$.

- La función es continua en $x = -1$ si: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

  $f(-1) = a + b + 3$

  Existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -a - b \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = a + b + 3 \end{array}\right\} \to -a - b = a + b + 3 \to 2a + 2b = -3$$

- La función es continua en $x = 2$ si: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

  $f(2) = 4a - 2b + 3$

  Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4a - 2b + 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -8b + a \end{array}\right\} \to 4a - 2b + 3 = -8b + a \to 3a + 6b = -3$$

Entonces: $\left.\begin{array}{r} 2a + 2b = -3 \\ 3a + 6b = -3 \end{array}\right\} \to \begin{cases} a = -2 \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

122 **Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} |2 - x| & \text{si } x < a \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \ge a \end{cases}$$

donde *a* es un número real. Determina *a*.

(Andalucía. Año 2003. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 2)

- Si $a \leq 2$, entonces la función es de la forma: $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < a \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \geq a \end{cases}$

  Al ser funciones continuas en los intervalos en los que están definidas, $f(x)$ es continua si es continua en $x = a$, es decir, si: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

  $f(a) = a^2 - 5a + 7$

  Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = 2 - a \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = a^2 - 5a + 7 \end{array}\right\} \to 2 - a = a^2 - 5a + 7 \to a^2 - 4a + 5 = 0$$

  $\to$ No tiene solución.

- Si $a > 2$ la expresión de la función es: $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq 2 \\ -2 + x & \text{si } 2 < x < a \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \geq a \end{cases}$

  Como las funciones son continuas en los intervalos en los que están definidas, $f(x)$ es continua si es continua en $x = 2$ y en $x = a$.

  La función es continua en $x = 2$ porque $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$.

  Estudiamos la función en $x = a$:

  $f(a) = a^2 - 5a + 7$

  Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = a^2 - 5a + 7 \end{array}\right\} \to -2 + a = a^2 - 5a + 7 \to a^2 - 6a + 9 = 0 \to a = 3$$

123 **Para cualquier valor real de a, se considera la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } -\infty < x \leq 0 \\ \text{sen } ax & \text{si } 0 < x < \pi \\ (x - \pi)^2 + 1 & \text{si } \pi \leq x < +\infty \end{cases}$$

Determinar los valores de a para los cuales $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

(Cantabria. Septiembre 2000. Bloque 1. Opción B)

Para cualquier valor de a las funciones son continuas en los intervalos en los que están definidas. Por tanto, $f(x)$ es continua si lo es en $x = 0$ y en $x = \pi$.

- $f(0) = 0$

  Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

  $f(x)$ es continua en $x = 0$ para cualquier valor de a.

- La función es continua en $x = \pi$ si: $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = f(\pi)$

$f(\pi) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = sen\ a\pi \\ \lim\limits_{x \to \pi^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \to sen\ a\pi = 1 \to a\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \to a = \frac{1}{2} + 2k, \text{ siendo } k \in \mathbb{Z}$$

124 **Considera la función $f: (-\infty, 10) \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si } x < 2 \\ |x - 5| & \text{si } 2 \leq x < 10 \end{cases}$$

Determina el valor de $a > 0$ sabiendo que f es continua.

(Andalucía. Año 2001. Modelo 6. Opción A. Ejercicio 1)

Como $f(x)$ está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas, es continua en $(-\infty, 10)$ si lo es en $x = 2$, es decir, si: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

$f(2) = 3$

Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = a^2 - 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \to a^2 - 6 = 3 \to a^2 = 9 \to a = \pm 3$$

Como $a > 0$ la función es continua si $a = 3$.

125 **Demuestra que la función $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 3}{2x + 1}$ se anula en el intervalo [1, 3].**
Menciona los resultados teóricos en que te apoyas para hacer tus afirmaciones.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, luego es continua en [1, 3].

$f(1) = -1 < 0$

$f(3) = \dfrac{15}{7} > 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano $\to$ Existe $c \in (1, 3)$, tal que $f(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo (1, 3).

126 **Sea $f(x) = 2 - x + \ln x$ con $x \in (0, +\infty)$. Probar que existe un punto $c \in \left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$ tal que $f(c) = 0$.**

(Castilla y León. Septiembre 2008. Prueba B. Problema 2)

$f(x)$ es continua en $(0, +\infty)$, luego es continua en $\left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$.

$f\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = -\dfrac{1}{e^2} < 0$

$f(1) = 1 > 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $c \in \left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$, tal que $f(c) = 0$,

es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $\left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$.

127 **Demuestra que existe al menos un número real x para el que se verifica $sen\, x = x - 2$.**

(Baleares. Septiembre 2001. Opción B. Cuestión 1)

Consideramos la función $f(x) = sen\, x - x + 2$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, luego es continua en $[2, 3]$.

$f(2) = sen\, 2 = 0{,}909 > 0$

$f(3) = sen\, 3 - 1 = -0{,}858 < 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $c \in (2, 3)$, tal que $f(c) = 0$,
es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(2, 3)$,
por tanto, la ecuación tiene al menos una solución en este intervalo.

128 **Determinar si el polinomio $x^4 - 4x^2 - 1$ tiene alguna raíz real negativa.**

(Extremadura. Junio 2003. Repertorio B. Ejercicio 1)

Consideramos la función $f(x) = x^4 - 4x^2 - 1$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, luego es continua en $[-3, -2]$.

$f(-3) = 44 > 0$

$f(-2) = -1 < 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $c \in (-3, -2)$, tal que $f(c) = 0$,
es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(-3, -2)$,
luego el polinomio tiene alguna raíz real negativa.

129 **Se considera la ecuación $x^3 + x^2 + mx - 6 = 0$. Utilizando el teorema de Bolzano, demuestra:**

a) Si $m > -3$ entonces la ecuación tiene al menos una raíz real menor que 2.

b) Si $m < -3$ entonces la ecuación tiene al menos una raíz real mayor que 2.

(Baleares. Junio 2003. Opción B. Cuestión 3)

a) Consideramos la función $f(x) = x^3 + x^2 + mx - 6$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, luego $f(x)$ es continua en $[0, 2]$.

$f(0) = -6 < 0$

$f(2) = 2m + 6 > 0 \rightarrow 2m > -6 \rightarrow m > -3$

Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $c \in (0, 2)$, tal que $f(c) = 0$,
es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(0, 2)$,
por tanto, la ecuación tiene al menos una raíz real menor que 2.

b) Consideramos la función $f(x) = x^3 + x^2 + mx - 6$ continua en $\mathbb{R}$.

$f(2) = 2m + 6 < 0 \rightarrow 2m < -6 \rightarrow m < -3$

Al ser $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$ Existe un valor $b > 2$, tal que $f(x)$ es continua en $[2, b]$ y $f(b) > 0$.

Entonces, aplicando el teorema de Bolzano, tenemos que existe $c \in (2, b)$,
tal que $f(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(2, b)$
con $b > 2$, por tanto, la ecuación tiene al menos una raíz real mayor que 2.

130 **Probar que la ecuación $x = cos\, x$ tiene solución positiva.**

(Extremadura. Septiembre 2004. Repertorio B. Ejercicio 1)

Consideramos la función $f(x) = x - cos\, x$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, luego $f(x)$ es continua en $[0, 1]$.

$f(0) = -1 < 0$

$f(1) = 1 - cos\, 1 = 0{,}459 > 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $c \in (0, 1)$, tal que $f(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(0, 1)$, por tanto, la ecuación tiene al menos una solución positiva.

131 **¿Puede asegurarse, utilizando el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = tg\, x$ tiene una raíz en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$? Razona la respuesta.**

(Galicia. Junio 2003. Bloque 3. Pregunta 2)

Consideramos la función $f(x) = tg\, x$.

$f(x)$ no está definida en $x = \frac{\pi}{2}$, por tanto, la función no es continua en $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ y no puede aplicarse el teorema de Bolzano, así que no puede asegurarse que la función tenga una raíz en este intervalo.

132 **Calcular, con un error menor que una décima, una raíz positiva del polinomio $x^3 + x - 1$.**

(Extremadura. Septiembre 2001. Repertorio A. Ejercicio 1)

Consideramos la función $f(x) = x^3 + x - 1$ continua en $\mathbb{R}$.

$f(0) = -1 < 0$

$f(1) = 1 > 0$

Como $f(x)$ es continua en $[0, 1]$ podemos aplicar el teorema de Bolzano → Existe $c \in (0, 1)$, tal que $f(c) = 0$.

$f(0{,}5) = -0{,}375 < 0$

Como $f(x)$ es continua en $[0{,}5; 1]$ podemos aplicar el teorema de Bolzano → Existe $c \in (0{,}5; 1)$, tal que $f(c) = 0$.

$f(0{,}9) = 0{,}629 > 0$

Como $f(x)$ es continua en $[0{,}5; 0{,}9]$ podemos aplicar el teorema de Bolzano → Existe $c \in (0{,}5; 0{,}9)$, tal que $f(c) = 0{,}184$.

$f(0{,}6) = -0{,}184 < 0$

Como $f(x)$ es continua en $[0{,}6; 0{,}9]$ podemos aplicar el teorema de Bolzano → Existe $c \in (0{,}6; 0{,}9)$, tal que $f(c) = 0$.

$f(0{,}7) = 0{,}043 > 0$

Como $f(x)$ es continua en $[0{,}6; 0{,}7]$ podemos aplicar el teorema de Bolzano → Existe $c \in (0{,}6; 0{,}7)$, tal que $f(c) = 0$.

133 **Demuestra que existe un punto $x = c$ en el que la función $f(x) = x^2 + x \cdot 2^x$ toma el valor 2. Encuéntralo, aproximando su expresión hasta las centésimas.**

Si $f(c) = 2 \rightarrow f(c) - 2 = 0$

Consideramos la función $g(x) = x^2 + x \cdot 2^x - 2$.

$g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, luego $g(x)$ es continua en $[0, 1]$.

$g(0) = -2 < 0$

$g(1) = 1 > 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $c \in (0, 1)$, tal que $g(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(0, 1)$, por tanto, $f(c) - 2 = 0 \rightarrow f(c) = 2$.

$g(0,5) = -1,043 < 0$ $\quad$ $g(0,7) = -0,372 < 0$

$g(0,9) = 0,489 > 0$ $\quad$ $g(0,75) = -0,176 < 0$

$g(0,6) = -0,73 < 0$ $\quad$ $g(0,79) = -0,009 < 0$

$g(0,8) = 0,032 > 0$

Como $g(x)$ es continua en $[0,79; 0,8]$ podemos aplicar el teorema de Bolzano → Existe $c \in (0,79; 0,8)$, tal que $g(c) = 0$, por tanto, $f(x)$ toma el valor 2 en algún punto del intervalo $(0,79; 0,8)$.

134 **Dadas las funciones $f(x) = x \text{ sen } x$ y $g(x) = \ln x$, justifica que existe un punto del intervalo $[2, 3]$ donde ambas funciones toman el mismo valor.**

Consideramos la función $h(x) = x \text{ sen } x - \ln x$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y $g(x)$ es continua en $(0, +\infty)$, por tanto, $h(x)$ es continua en $[2, 3]$.

$h(2) = 1,125 > 0$

$h(3) = -0,675 < 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $c \in (2, 3)$, tal que $h(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(2, 3)$, por tanto, $h(c) = f(c) - g(c) = 0 \rightarrow f(c) = g(c)$.

135 **Demuéstrese que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$ se cortan en un punto $x > 0$.**

(Castilla y León. Junio 2004. Prueba A. Cuestión 2)

Consideramos la función $h(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y $g(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, por tanto, $h(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$h(0,5) = -0,351 < 0$

$h(1) = 1,718 > 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $c \in (0,5; 1)$, tal que $h(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(0,5; 1)$, por tanto, $h(c) = f(c) - g(c) = 0 \rightarrow f(c) = g(c)$, es decir, las funciones se cortan en un punto de este intervalo.

136 Dada la función $f(x) = x\ sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)$, demuestra que existe $\alpha \in (0, 4)$ tal que $f(\alpha) = f(\alpha + 1)$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

(Navarra. Junio 2007. Grupo 2. Opción C)

Consideramos la función $g(x) = x\ sen\left(\frac{\pi}{4}x\right) - (x+1)\,sen\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right)$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, por tanto, $g(x)$ es continua en [0, 4].

$g(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ $\qquad$ $g(4) = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $\alpha \in (0, 4)$, tal que $g(\alpha) = 0$,
es decir, la función se anula en algún punto del intervalo (0, 4),
por tanto: $g(\alpha) = f(\alpha) - f(\alpha + 1) = 0 \rightarrow f(\alpha) = f(\alpha + 1)$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Calcula:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5}$

(Madrid. Año 2008. Modelo. Opción A. Ejercicio 2)

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n} \rightarrow 1^{\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{2+n}{1+n}-1\right)\cdot(1-5n)\right]} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2+n-1-n)(1-5n)}{1+n}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-5n}{1+n}} = e^{-5} = \frac{1}{e^5}$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5} \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}\right)\left(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n}\right)}{(n+5)\left(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+2n^3-3-n^4+n}{(n+5)\left(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3+n-3}{(n+5)\left(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n}\right)} = 1$$

2 Calcule:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n-8}{2^{n+1}}$

(Galicia. Septiembre 2005. Bloque 4. Pregunta 1)

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}+n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-5n+4}+n\right)\left(\sqrt{n^2-5n+4}+n\right)}{\sqrt{n^2-5n+4}+n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-5n+4-n^2}{\sqrt{n^2-5n+4}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-5n+4}{\sqrt{n^2-5n+4}+n}=-\frac{5}{2}$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2^n-8}{2^{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2^n}{2^{n+1}}-\dfrac{2^3}{2^{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2^2}{2^n}\right)=\dfrac{1}{2}$

3 Determina el valor de a para el cual:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)=1$$

(La Rioja. Junio 2000. Propuesta A. Ejercicio 4)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2+ax+1}\right)}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-4x^2-ax-1}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-ax-1}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}}=$$

$$=-\frac{a}{4}=1\to a=-4$$

4 Determina el valor de a para el cual:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax}=e$$

(La Rioja. Junio 2001. Propuesta A. Ejercicio 4)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax}\to 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x+3}{x}-1\right)\cdot ax\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+3-x)\cdot ax}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3ax}{x}}=$$

$$=e^{3a}=e\to 3a=1\to a=\frac{1}{3}$$

5 Estudia si la función:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\leq -1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1<x\leq 2 \\ -3 & \text{si } 2<x \end{cases}$$

es continua en los puntos $x=-1$ y $x=2$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2005. Bloque 1. Pregunta A)

- $f(-1)=-1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to -1} f(x) \to f(x) \text{ no es continua en } x=-1.$$

La función tiene una discontinuidad de salto finito en el punto $x=-1$.

- $f(2)=-3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-3 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 2} f(x)=-3=f(2) \to f(x) \text{ es continua en } x=2.$$

6 Determinar los valores de a y b para que la función siguiente sea continua en todos los puntos.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si } x<0 \\ x-a & \text{si } 0\leq x<1 \\ \dfrac{a}{x}+b & \text{si } 1\leq x \end{cases}$$

(Canarias. Junio 2004. Opción A. Cuestión 1)

$f(x)$ está formada por dos funciones polinómicas, por tanto, continuas, y una función racional que no está definida en $x=0$, pero que es continua en el intervalo $(1,+\infty)$. Así la función es continua en todos los puntos si lo es en los puntos en los que cambia su expresión algebraica.

- La función es continua en $x=0$ si: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$f(0)=-a$ y existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ si $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-a \end{array}\right\} \to b=-a$$

- La función es continua en $x=1$ si: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$f(1)=a+b$ y existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ si $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1-a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a+b \end{array}\right\} \to 1-a=a+b$$

Entonces: $\left.\begin{array}{r} b=-a \\ 2a+b=1 \end{array}\right\} \to \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

7 **Busca algún criterio que te permita afirmar que la ecuación:**

$$x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$$

tiene al menos una solución en el intervalo (0, 1). ¿Qué te dice ese criterio para el intervalo (−1, 0)? Razona la respuesta.

(La Rioja. Septiembre 2007. Propuesta A. Ejercicio 3)

Consideramos la función $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, luego $f(x)$ es continua en [0, 1].

$f(0) = 1 > 0$

$f(1) = -4 < 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (0, 1)$, tal que $f(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo (0, 1), luego la ecuación tiene alguna solución en este intervalo.

$f(-1) = 8 > 0 \rightarrow$ No podemos aplicar el teorema de Bolzano en (−1, 0) porque $f(0)$ y $f(-1)$ no tienen signos distintos.

8 **Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo (1, 2).**

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba B. Cuestión 3)

Consideramos la función $f(x) = x^3 + x - 5$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, luego $f(x)$ es continua en [1, 2].

$f(1) = -3 < 0$

$f(2) = 5 > 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano $\rightarrow$ Existe $c \in (1, 2)$, tal que $f(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo (1, 2), por tanto, la ecuación tiene al menos una solución en este intervalo.

8 Derivada de una función

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La libreta amarilla

Pocas semanas antes, Alexis [un piloto de cincuenta y dos años] había coincidido en el aeropuerto de Barcelona con un viejo compañero de juventud, Joaquín Subirós, jefe de marketing de un grupo editorial. Subirós recordaba que en un tiempo Alexis se había sentido seriamente atraído por las matemáticas. Así que aprovechando el encuentro casual, le recomendó con vehemencia un libro singular que su empresa tenía en fase de producción. Subirós insistió en que de ninguna de las maneras debía perdérselo y se ofreció, tan pronto como saliera, a enviarle un ejemplar.

El título original de la obra era *Fermat's Last Theorem,* de un tal Simon Singh, británico de origen punjabi, doctorado en Física por la Universidad de Cambridge. […]

Quince días más tarde adquiría la edición inglesa en la Gotham Book Mark de la calle 47 Oeste, el santuario librero que solía visitar cuando paraba en Nueva York. Después pidió que le subieran una cena fría a la habitación. Sabía perfectamente qué le aguardaba. No pudo interrumpir ni un solo momento la lectura compulsiva. Hasta que sobre las once, con un intenso escozor en los ojos, cerró lentamente el libro.

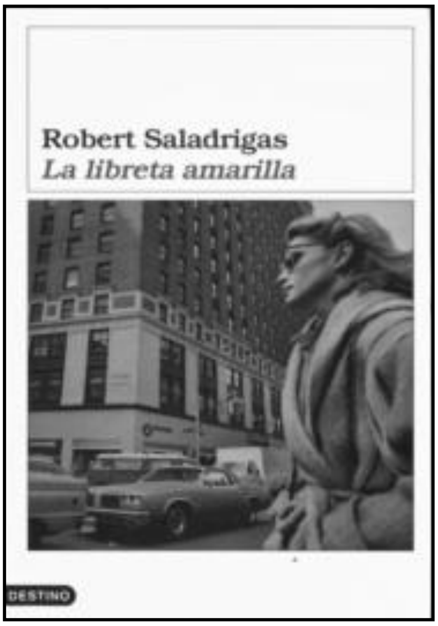
Estaba trastornado.

Lo poseía una antigua y oxidada emoción [por haber leído que un matemático de nombre Wiles, después de siete años de intenso trabajo, había conseguido demostrar por fin el último teorema de Fermat, algo que desde el siglo XVII nadie había logrado. También él, siendo adolescente, cuando conoció este *misterioso* teorema a través de un tío y de un profesor de matemáticas] se convenció de que estaba predestinado a triunfar donde las más grandes inteligencias del planeta habían fracasado. […] Pero es sabido que en el segmento de la adolescencia las prioridades mudan con los climas de las estaciones. De manera que sin ninguna aspereza ni violencia, entre la candidez de Alexis y la vieja astucia de Fermat se interpuso la pasión de volar. Alexis sustituyó gradualmente la voluntad de indagación por el afán de experimentación. […]

El conocimiento de la proeza de Wiles no lo llevaba a dolerse por una hipotética pérdida, sino a verse reflejado en su ejemplaridad con una determinación que de inmediato caló en las honduras de su conciencia: no cometería nuevamente el error o la cobardía de renunciar por nada del mundo a la consecución de un ideal (por llamarlo de alguna manera) que, cosa más que probable, sería el último sueño turbador de su vida.

ROBERT SALADRIGAS

La libreta amarilla
Robert Saladrigas



Al protagonista de esta novela, Alexis Casas, siendo niño, un tío suyo –que era un comerciante con alma aventurera– le había contado la *historia* de Pierre de Fermat, un magistrado del Ayuntamiento de Toulouse, casado y padre de cinco hijos, que dedicaba sus ratos libres a leer libros de matemáticas. En el margen de uno de los libros que estaba leyendo, Fermat escribió: «Es imposible encontrar la forma de convertir un cubo en suma de dos cubos, una potencia cuarta en suma de dos potencias cuartas, o en general cualquier potencia más alta que el cuadrado en suma de dos potencias de la misma clase; para este hecho he encontrado una demostración excelente. El margen es demasiado pequeño para que dicha demostración quepa en él». El magistrado nunca publicó sus ideas matemáticas. Fue uno de los hijos quien, después de su muerte, tomándolas de aquí y de allá, las recopiló en un libro donde curiosamente no aparece ninguna prueba del enunciado anterior, mal llamado «teorema de Fermat», porque, mientras no se descubra una demostración, sólo es una conjetura. Cuando el tío le contó esta historia a Alexis (hacia 1955), nadie había conseguido demostrarlo. Más adelante, cuando un profesor de matemáticas le confirmó la historia de aquel juez, cuya imagen Alexis confundía con la del mosquetero Aramis, sintió el deseo de dedicarse a resolver esa conjetura. Pero, sobre ese sueño, se impuso la pasión de volar. A los cincuenta y dos años, después de más de veinte trabajando como piloto, un día un amigo le habla de un libro titulado *El enigma de Fermat*. Leyéndolo se entera de que un joven matemático, de nombre Wiles, acababa de cumplir, en 1994, el sueño que ambos habían tenido en la infancia. Y esto le hace cambiar de vida.

La novela es el relato de esta transformación y, en ella aparecen numerosas referencias a las matemáticas que dan pie para plantear diversas actividades didácticas.

Pese a su aislamiento, a Marc le suceden algunas cosas interesantes como la visita del gran escritor Julio Cortázar, convertido por el autor de la novela en un personaje de ficción.

Fermat también contribuyó al desarrollo del cálculo infinitesimal con resultados interesantes, como este: «Si una función derivable tiene un extremo relativo en un punto, su derivada en ese punto debe ser nula». Justifica este teorema.

Si x_0 es un extremo relativo de una función derivable, ya sea un máximo o un mínimo, la recta tangente a dicha función por este punto es una recta horizontal, es decir, una recta cuya pendiente es igual a cero. Como la derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente en dicho punto tenemos que: $f'(x_0) = 0$

Derivada de una función

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Estudia la continuidad de estas funciones.

a) $f(x) = -\dfrac{x}{x^2-1}$ b) $g(x) = \sqrt{x^2+7}$ c) $h(x) = \ln 3x$

a) Continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ b) Continua en $\mathbb{R}$ c) Continua en $(0, +\infty)$

002 Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^9$ b) $f(x) = 7^x$ c) $f(x) = \log_5 x$ d) $f(x) = \sqrt{x}$

a) $f'(x) = 9x^8$ b) $f'(x) = 7^x \ln 7$ c) $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 5}$ d) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ACTIVIDADES

001 Halla la tasa de variación media de las funciones: $f(x) = x^2 + 1$ $g(x) = x^3 + 7$ en los intervalos $[0, 1]$ y $[-2, -1]$.

a) $T.V.M.([0, 1]) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1-0} = \dfrac{2-1}{1} = 1$

$T.V.M.([-2, -1]) = \dfrac{f(-1) - f(-2)}{-1-(-2)} = \dfrac{2-5}{1} = -3$

b) $T.V.M.([0, 1]) = \dfrac{g(1) - g(0)}{1-0} = \dfrac{8-7}{1} = 1$

$T.V.M.([-2, -1]) = \dfrac{g(-1) - g(-2)}{-1-(-2)} = \dfrac{6-(-1)}{1} = 7$

002 El espacio, en metros, que recorre un móvil en función del tiempo, en segundos, viene descrito por la fórmula $e = \dfrac{1}{3}t^2 + t$. Halla su velocidad media en $[1, 5]$.

$$T.V.M.([1, 5]) = \frac{e(5) - e(1)}{5-1} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 25 + 5 - \frac{1}{3}\cdot 1 - 1}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ m/s}$$

003 Calcula la derivada de estas funciones en $x = 2$.

a) $f(x) = 7x + 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

a) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{7(2+h) + 1 - 15}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{7h}{h} = 7$

b) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4 - (4 + 4h + h^2)}{4h(2+h)^2} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-4h - h^2}{4h(2+h)^2} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-4-h}{4(2+h)^2} = -\dfrac{1}{4}$

004 Halla la derivada de las funciones en los puntos $x = 1$ y $x = 2$.

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \sqrt{x}$

a) $$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h+3h^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3+3h+h^2) = 3$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{12h+6h^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(12+6h+h^2) = 12$$

b) $$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{2}$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{2+h}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}{h\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{2+h-2}{h\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

005 Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 6x^2 + 1$ en $x = 1$.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6(1+h)^2+1-7}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{12h+6h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(12+6h) = 12$$

006 ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en $x = 1$?

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h+3h^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3+3h+h^2) = 3$$

007 Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3$ en el punto $P(-1, 4)$.
¿Cuál es la ecuación de la recta normal?

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2+3-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(-2+h) = -2$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = -2(x + 1) \rightarrow y = -2x + 2$

La ecuación de la recta normal es: $y - 4 = \frac{1}{2}(x + 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

008 **Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = 2x^3 + 3$ en los puntos $x = 1$ y $x = -1$.**

Comprueba que son paralelas a la recta $y = 6x$.

$f(1) = 5$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)^3+3-5}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6h+6h^2+2h^3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}(6+6h+2h^2) = 6$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 5 = 6(x-1) \rightarrow y = 6x - 1$

$f(-1) = 1$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(-1+h)^3+3-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6h-6h^2+2h^3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}(6-6h+2h^2) = 6$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = 6(x+1) \rightarrow y = 6x + 7$

Las rectas son paralelas a la recta $y = 6x$ porque su pendiente es 6.

009 **Calcula las derivadas laterales de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.**

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 2 \\ x+3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(2^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{(2+h)+3-5}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h} = 1$$

$$f'(2^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{2(2+h)+1-5}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{2h}{h} = 2$$

Las derivadas laterales no son iguales $\rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

010 **Halla las derivadas laterales de las siguientes funciones en el punto de abscisa $x = 0$.**

a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

b) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

a) $$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = -\infty$$

Las derivadas laterales no son iguales $\rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

b) $$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt[4]{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[4]{h^3}} = +\infty$$

$f'(0^-)$ no existe, ya que h es un número negativo y la función no está definida para números negativos $\rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

011 **Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función en el punto $x = 2$.**

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 2^+} (x+1) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3 = f(2) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 2$.

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(2+h)^2 - 1 - 3}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{4h + h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0^+} (4 + h) = 4$$

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(2+h) + 1 - 3}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Las derivadas laterales existen pero son distintas, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

012 **Decide si la función $f(x) = |x + 2|$ es continua y derivable en los siguientes puntos.**

a) $x = 0$ **b)** $x = -2$ **c)** $x = 3$ **d)** $x = -5$

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x+2) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+2) = 2 = f(0) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$.

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(0+h) + 2 - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(0+h) + 2 - 2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) $\lim\limits_{x \to -2^+} (x+2) = \lim\limits_{x \to -2^-} (-x-2) = 0 = f(-2) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = -2$.

$$f'(-2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(-2+h) + 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(-2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(-2+h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales existen pero no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = -2$.

c) $\lim\limits_{x \to 3^+} (x+2) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x+2) = 5 = f(3) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 3$.

$$f'(3^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(3+h) + 2 - 5}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(3^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(3+h) + 2 - 5}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 3$.

d) $\lim\limits_{x \to -5^+} (-x-2) = \lim\limits_{x \to -5^-} (-x-2) = 3 = f(-5) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = -5$.

$$f'(-5^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-5+h) - f(-5)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-(-5+h) - 2 - 3}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'(-5^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-5+h) - f(-5)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(-5+h) - 2 - 3}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = -5$.

Derivada de una función

013 **Halla la función derivada de $f(x) = 3x^2 + 1$ aplicando la definición. A partir del resultado, calcula la derivada de $f(x)$ en estos puntos.**

a) $x = 1$

b) $x = 2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 + 1 - (3x^2 - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6hx + 3h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}(6x + 3h) = 6x$$

a) $f'(1) = 6$

b) $f'(2) = 12$

014 **Utiliza la definición para calcular la función derivada de la función $f(x) = x^3 + x^2$. Calcula, después, las derivadas sucesivas. ¿Existen todas hasta la derivada n-ésima?**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 + (x+h)^2 - (x^3 + x^2)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 + 2hx + h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3hx + h^2 + 2x + h) = 3x^2 + 2x$$

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 + 2(x+h) - (3x^2 + 2x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{6hx + 3h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0}(6x + 3h + 2) = 6x + 2$$

$$f'''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6(x+h) + 2 - (6x + 2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h}{h} = 6$$

$$f^{IV)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'''(x+h) - f'''(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6 - 6}{h} = 0$$

A partir de la cuarta derivada todas las funciones derivadas son iguales a 0.

015 **Calcula la derivada de estas funciones, y comprueba que se cumple que el resultado es igual a la suma de las derivadas de las funciones que las forman.**

a) $f(x) = x - x^2$

b) $f(x) = x^3 + 2x$

a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - (x+h)^2 - (x - x^2)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h - 2hx - h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(1 - 2x - h) = 1 - 2x$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} =$$
$$= 1 - \lim_{h\to 0}(2x + h) = 1 - 2x$$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3 + 2(x+h) - (x^3+2x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 + 2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(3x^2 + 3hx + h^2 + 2) = 3x^2 + 2$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h} + \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(x+h)-2x}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} + \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(3x^2 + 3hx + h^2) + 2 = 3x^2 + 2$

016 **Halla las derivadas de $f(x) = 6x^2$ y $g(x) = -x$. ¿Cuál es la derivada de su producto? ¿Y de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$?**

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{6(x+h)^2 - 6x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{12hx + 6h^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}(12x + 6h) = 12x$

$g'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(x+h)-(-x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{h} = -1$

$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) = 12x(-x) + 6x^2(-1) = -18x^2$

$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2} = \dfrac{12x(-x) - 6x^2(-1)}{(-x)^2} = -6$

017 **Utiliza las definiciones de composición de funciones y de derivada para comprobar que se cumple la regla de la cadena.**

$[(g\circ f)(x)]' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h)-f(x)} \cdot \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h)-f(x)} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = g'(f(x))\cdot f'(x)$

018 **Halla la derivada de la función $k(x) = \sqrt{2x+5}$ utilizando la definición de derivada, y comprueba que el resultado es el mismo que si aplicas la regla de la cadena.**

$k'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{k(x+h)-k(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{2(x+h)+5} - \sqrt{2x+5}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{2(x+h)+5} - \sqrt{2x+5}\right)\left(\sqrt{2(x+h)+5} + \sqrt{2x+5}\right)}{h\left(\sqrt{2(x+h)+5} + \sqrt{2x+5}\right)} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2x+2h+5-2x-5}{h\left(\sqrt{2(x+h)+5} + \sqrt{2x+5}\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2}{\sqrt{2(x+h)+5} + \sqrt{2x+5}} =$

$= \dfrac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$

Si $f(x) = 2x + 5 \rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(x+h) + 5 - (2x+5)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h}{h} = 2$

Si $g(x) = \sqrt{x} \rightarrow g'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Como $k(x) = (g \circ f)(x)$ aplicando la regla de la cadena:

$k'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x+5}} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$

019 Calcula la derivada de esta función, indicando los pasos que sigues para hallarla.

$$f(x) = 5x^4 + 3x^2$$

Aplicando la derivada de las funciones potenciales:

$(x^4)' = 4x^3$ $\qquad$ $(x^2)' = 2x$

Teniendo en cuenta las operaciones con derivadas:

$f'(x) = 5 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 2x = 20x^3 + 6x$

020 Halla la derivada de la siguiente función.

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x^5}\right)^4$$

$f'(x) = 4\left(\dfrac{x-2}{x^5}\right)^3 \cdot \dfrac{1 \cdot x^5 - (x-2)5x^4}{(x^5)^2} = \dfrac{4(x-2)^3}{x^{15}} \cdot \dfrac{x^5 - 5x^5 + 10x^4}{x^{10}} =$

$= \dfrac{(x-2)^3(-16x+40)}{x^{21}}$

021 Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 5\ln x + e^{4x}$ $\qquad$ **b)** $f(x) = \log_3(-6x^2 \ln x)$

a) $f'(x) = 5 \cdot \dfrac{1}{x} + e^{4x} \cdot 4$ $\qquad$ b) $f'(x) = \dfrac{-12x \ln x + (-6x^2)\dfrac{1}{x}}{-6x^2 \ln x \ln 3} = \dfrac{2\ln x + 1}{x \ln x \ln 3}$

022 Obtén la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = e^x \log_4 x^5$ $\qquad$ **b)** $f(x) = \ln(3x^2 - x)^{-7}$

a) $f'(x) = e^x \log_4 x^5 + e^x \cdot \dfrac{5x^4}{x^5 \ln 4} = e^x \log_4 x^5 + e^x \cdot \dfrac{5}{x \ln 4}$

b) $f'(x) = \dfrac{-7(3x^2 - x)^{-8}(6x-1)}{(3x^2-x)^{-7}} = \dfrac{-7(6x-1)}{3x^2 - x}$

023 Decide de qué tipo son las siguientes funciones, y halla la derivada de cada una de ellas.

a) $f(x) = cos\ (sen\ 2x)$
b) $f(x) = sen\ (\ln 2x)$
c) $f(x) = arc\ tg\ \sqrt{x^3 + 2}$
d) $f(x) = tg\ (x^4 + 3x)$

a) $f'(x) = -sen(sen\ 2x) \cdot cos\ 2x \cdot 2$

b) $f'(x) = cos(\ln 2x) \cdot \frac{2}{2x} = \frac{cos(\ln 2x)}{x}$

c) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x^3+2)^{-\frac{1}{2}}3x^2}{1+\left(\sqrt{x^3+2}\right)^2} = \frac{3x^2}{2(x^3+2)\sqrt{x^3+2}}$

d) $f'(x) = (1 + tg^2(x^4 + 3x))(4x^3 + 3)$

024 Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = cos\ \sqrt{x^2 + x}$
b) $f(x) = sen\ x^2 + 3cos^2 x$
c) $f(x) = tg\ \frac{1+x}{1-x}$
d) $f(x) = arc\ tg\ \sqrt{x}$

a) $f'(x) = -sen\left(\sqrt{x^2+x}\right)\frac{1}{2}(x^2+x)^{-\frac{1}{2}}(2x+1) = -\frac{(2x+1)sen\left(\sqrt{x^2+x}\right)}{2\sqrt{x^2+x}}$

b) $f'(x) = cos\ x^2 \cdot 2x + 6cos\ x(-sen\ x) = 2xcos\ x^2 - 6sen\ x\ cos\ x$

c) $f'(x) = \left(1 + tg^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)\frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \left(1 + tg^2\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{2}{(1-x)^2}$

d) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

025 Calcula la derivada de las siguientes funciones utilizando la derivación logarítmica.

a) $f(x) = (x^2 - 4x + 3)^{sen\ x}$
b) $f(x) = x^{8x + cos\ x}$

a) $\ln f(x) = \ln\ (x^2 - 4x + 3)^{sen\ x}$

$\ln f(x) = sen\ x \cdot \ln\ (x^2 - 4x + 3)$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = cos\ x \cdot \ln\ (x^2 - 4x + 3) + sen\ x \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+3}$

$f'(x) = \left(cos\ x \cdot \ln\ (x^2 - 4x + 3) + sen\ x \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+3}\right)(x^2 - 4x + 3)^{sen\ x}$

b) $\ln f(x) = \ln x^{8x + cos\ x}$

$\ln f(x) = (8x + cos\ x)\ln x$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = (8 - sen\ x)\ln x + (8x + cos\ x)\frac{1}{x}$

$f'(x) = \left((8 - sen\ x)\ln x + 8 + \frac{cos\ x}{x}\right)x^{8x + cos\ x}$

026 Deduce la derivada de estas funciones a partir de la derivación logarítmica.

a) $f(x) = x^n$ b) $f(x) = a^x$

a) $\ln f(x) = \ln x^n \rightarrow \ln f(x) = n \ln x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = n \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = n \cdot \frac{1}{x} \cdot x^n = nx^{n-1}$$

b) $\ln f(x) = \ln a^x \rightarrow \ln f(x) = x \ln a$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot \ln a$$

$$f'(x) = \ln a \cdot a^x$$

027 Halla la derivada de estas funciones implícitas, y calcula su valor en el punto (7, −2).

a) $x^3 - 3x + y^2 = 0$ b) $5x^2 + 3xy + 6y^2 - x + 13xy^2 = 0$

a) $3x^2 - 3 + 2yy' = 0 \rightarrow 2yy' = 3 - 3x^2 \rightarrow y' = \dfrac{3 - 3x^2}{2y}$

$$y'(7, -2) = \frac{3 - 3 \cdot 7^2}{2(-2)} = 36$$

b) $10x + 3y + 3xy' + 12yy' - 1 + 13y^2 + 26xyy' = 0$

$$\rightarrow (3x + 12y + 26xy)y' = 1 - 10x - 3y - 13y^2 \rightarrow y' = \frac{1 - 10x - 3y - 13y^2}{3x + 12y + 26xy}$$

$$y'(7, -2) = \frac{1 - 10 \cdot 7 - 3 \cdot (-2) - 13 \cdot (-2)^2}{3 \cdot 7 + 12 \cdot (-2) + 26 \cdot 7 \cdot (-2)} = \frac{115}{367}$$

028 A partir de la derivada de la función $f(x) = x^2$, calcula la derivada de la función $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ y comprueba que obtienes el mismo resultado que si utilizas la definición de derivada.

$f'(x) = 2x$

- $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'\left(\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
- $$(f^{-1})'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

029 Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en los intervalos [2, 3] y [2, 5]. A partir de ella, calcula la derivada en el punto $x = 2$.

$$T.V.M.([2, 3]) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{6}$$

$$T.V.M.([2, 5]) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{10}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 - 2 - h}{2h(2+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

030 **Halla las tasas de variación media de la superficie de un círculo cuando su radio pasa de medir 1 cm a medir 3 cm y de 3 cm a 5 cm. ¿Permanece constante si la variación del radio es la misma?**

La función que mide la superficie de un círculo según la longitud de su radio x es: $f(x) = \pi x^2$

$$T.V.M.([1, 3]) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9\pi - \pi}{2} = 4\pi$$

$$T.V.M.([3, 5]) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{25\pi - 9\pi}{2} = 8\pi$$

Aunque la variación del radio es la misma, la de la superficie no permanece constante.

031 **Galileo demostró que, cuando un objeto cae libremente, es decir, prescindiendo de la resistencia del aire, la altura recorrida, en metros, y el tiempo transcurrido, en segundos, se relacionan mediante la fórmula: $h = \frac{1}{2}gt^2$, o lo que es lo mismo, aproximadamente, $h = 5t^2$.**

a) Calcula las tasas de variación media entre 1 y 7 segundos y entre 1 y 5 segundos.

b) Halla la derivada de esta función en $x = 1$.

a) $T.V.M.([1, 7]) = \dfrac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \dfrac{245 - 5}{6} = 40$

$T.V.M.([1, 5]) = \dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \dfrac{125 - 5}{4} = 30$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5(1 + h)^2 - 5}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{10h + 5h^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0}(10 + 5h) = 10$

032 **Utilizando la definición, calcula la derivada de las siguientes funciones en el punto $x = -1$.**

a) $f(x) = 3x$ b) $g(x) = x^2$ c) $i(x) = x^3$ d) $j(x) = |x|$

a) $f'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(-1 + h) + 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h}{h} = 3$

b) $g'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(-1 + h) - g(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(-1 + h)^2 - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h + h^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0}(-2 + h) = -2$

c) $i'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{i(-1 + h) - i(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(-1 + h)^3 + 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h - 3h^2 + h^3}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0}(3 - 3h + h^2) = 3$

d) $j'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{j(-1 + h) - j(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|-1 + h| - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 - h - 1}{h} = -1$

033 A partir de la definición, determina la derivada de las funciones en el punto $x = 0$.

a) $f(x) = ax + b$ b) $g(x) = ax^2$ c) $i(x) = ax^2 + b$ d) $j(x) = ax^2 + bx + c$

a) $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah + b - b}{h} = a$

b) $g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0}(ah) = 0$

c) $i'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{i(0+h) - i(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah^2 + b - b}{h} = \lim_{h\to 0}(ah) = 0$

d) $j'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{j(0+h) - j(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah^2 + bh + c - c}{h} = \lim_{h\to 0}(ah + b) = b$

034 Utilizando la definición de derivada, calcule la derivada de $f(x) = x^3 - 3x$ en $x_0 = 1$.

(Murcia. Septiembre 2002. Bloque 3. Cuestión 1)

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 3(1+h) - (-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3 - 3h + 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3h + h^2) = 0$$

035 Calcule la derivada de la función $f(x) = |x - 2|$ en $x = 2$, si es posible.

(Galicia. Septiembre 2001. Bloque 3. Pregunta 1)

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$f'(2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2 + h - 2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(2^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(2+h) + 2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales existen pero no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

036 Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de cada una de estas funciones en los puntos que se indican.

a) $y = \operatorname{sen} x + x$, en $x = \pi$. b) $y = \frac{x^4 - 3}{x}$, en $x = -1$. c) $y = \ln(x^2 + 7)$, en $x = 0$.

a) $f(\pi) = \pi$

$f'(x) = \cos x + 1 \rightarrow f'(\pi) = 0$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \pi = 0(x - \pi) \rightarrow y = \pi$

b) $f(-1) = 2$

$$f'(x) = \frac{4x^3 \cdot x - (x^4 - 3)}{x^2} = \frac{3x^4 + 3}{x^2} \rightarrow f'(-1) = 6$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = 6(x + 1) \rightarrow y = 6x + 8$

c) $f(0) = \ln 7$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+7} \rightarrow f'(0) = 0$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \ln 7 = 0(x - 0) \rightarrow y = \ln 7$

037 **Determina la ecuación de la tangente a la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ en el punto $A(2, 2)$.**

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x \rightarrow f'(2) = 2$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 2$

038 **Calcule la recta tangente a la curva $f(x) = \ln x^2$ en el punto $x = 2$.**

(Murcia. Septiembre 2006. Bloque 3. Cuestión B)

$f(2) = \ln 4$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \rightarrow f'(2) = 1$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \ln 4 = x - 2 \rightarrow y = x - 2 + \ln 4$

039 **Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{-2}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$.**
Demuestra que esa recta solo corta a la gráfica en el punto de tangencia.

$f(2) = -1$

$$f'(x) = \frac{2}{x^2} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$

El punto de corte de las dos funciones verifica que: $\frac{1}{2}x - 2 = \frac{-2}{x} \rightarrow x^2 - 4x = -4$

$$\rightarrow x^2 - 4x = -4 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Por tanto, hay un único punto común a ambas gráficas.

040 **Halla el punto de la curva $y = \sqrt{x}$ en el que la recta tangente es paralela a la recta $y = \frac{1}{2}x$.**

Las rectas son paralelas si tienen la misma pendiente, por tanto, buscamos el punto que verifica que: $f'(x) = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Entonces: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1$

El punto tiene por coordenadas (1, 1).

041 Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) Para cada valor de m hallar el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) Hallar el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de f.

(Madrid. Junio 2007. Opción A. Ejercicio 4)

a) $f(a) = a^2 + m$

$f'(x) = 2x \rightarrow f'(a) = 2a$

La ecuación de la recta tangente es:

$y - (a^2 + m) = 2a(x - a) \rightarrow y = 2ax - a^2 + m$

Si esta recta pasa por el origen de coordenadas entonces:

$0 = -a^2 + m \rightarrow a = \sqrt{m}$

b) $x^2 + m = x \rightarrow x^2 - x + m = 0 \rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2}$

Si la recta $y = x$ es tangente a la gráfica de f solo tienen un punto en común, entonces:

$1 - 4m = 0 \rightarrow m = \dfrac{1}{4}$

042 Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ en el punto de corte de $f(x)$ con el eje X.

(Galicia. Junio 2006. Bloque 3. Opción 1)

Calculamos el punto de corte con el eje de abscisas:

$(x + 1)e^{-x} = 0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

$f'(x) = e^{-x} - (x + 1)e^{-x} \rightarrow f'(-1) = e$

La ecuación de la recta tangente es: $y = e(x + 1)$

043 Dada la función $f(x) = 9x + 6x^2 - x^4$, halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ tiene pendiente 1.

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 1. Pregunta B)

Si la pendiente es igual a 1 entonces:

$f'(x) = 1 \rightarrow 9 + 12x - 4x^3 = 1 \rightarrow 4x^3 - 12x - 8 = 0$

$$\rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Así, los puntos que verifican la condición son $(2, 26)$ y $(-1, -4)$.

044 Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + 16y^2 - 16 = 0$ en el punto de abscisa 3 y ordenada positiva.

Si $x = 3 \rightarrow 9 + 16y^2 - 16 = 0 \rightarrow 16y^2 = 7 \rightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Consideramos el punto $\left(3, \dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

$$2x + 32yy' = 0 \rightarrow 32yy' = -2x \rightarrow y' = -\frac{x}{16y}$$

$$y'\left(3, \frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{3}{16 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}} = -\frac{3}{4\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{28}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{\sqrt{7}}{4} = -\frac{3\sqrt{7}}{28}(x-3) \rightarrow y = -\frac{3\sqrt{7}}{28}x + \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

045 **Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ en el punto de abscisa 4 y ordenada positiva.**

Si $x = 4 \rightarrow 64 - 9y^2 - 36 = 0 \rightarrow 9y^2 = 28 \rightarrow y = \pm\frac{2\sqrt{7}}{3}$

Consideramos el punto $\left(4, \frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$.

$$8x - 18yy' = 0 \rightarrow -18yy' = -8x \rightarrow y' = \frac{4x}{9y}$$

$$y'\left(4, \frac{2\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{16}{9 \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3}} = \frac{8}{3\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{21}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{8\sqrt{7}}{21}(x-4) \rightarrow y = \frac{8\sqrt{7}}{21}x - \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

046 **Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $y = \ln x$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

$f(1) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = 1$$

La ecuación de la recta tangente es: $y = x - 1$

La ecuación de la recta normal es: $y = -(x-1) \rightarrow y = -x + 1$

047 **Diga para qué valor de x la recta tangente a la curva $y = \ln(x^2 + 1)$ es paralela a la recta $y = x$.**

Escriba la ecuación de esta tangente.

(Cataluña. Año 2008. Serie 5. Cuestión 3)

Las rectas son paralelas si tienen la misma pendiente, por tanto, buscamos el punto que verifica que: $f'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Entonces: $\frac{2x}{x^2+1} = 1 \rightarrow 2x = x^2 + 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \ln 2 = x - 1 \rightarrow y = x - 1 + \ln 2$

048 **Determina el punto de la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ en el cual la tangente es paralela a la recta $y = -5x + 5$.**

Las rectas son paralelas si tienen la misma pendiente, por tanto, buscamos el punto que verifica que: $f'(x) = -5$

$f'(x) = 2x - 7$

Entonces: $2x - 7 = -5 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

El punto tiene por coordenadas $(1, -3)$.

049 **Sea $f(x) = x + xe^{-x}$.**
Calcular la ecuación de la recta tangente a f en un punto x para el cual dicha recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos (1, 1) y (3, 3).

(País Vasco. Junio 2006. Bloque C. Problema C)

La recta que pasa por los puntos (1, 1) y (3, 3) tiene por ecuación: $y = x$

La recta tangente es paralela a ella si tiene la misma pendiente, por tanto, buscamos un punto x para el que se verifica que: $f'(x) = 1$

$f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x}$

Entonces: $1 + e^{-x} - xe^{-x} = 1 \rightarrow e^{-x} - xe^{-x} = 0 \rightarrow e^{-x}(1 - x) = 0 \rightarrow x = 1$

$f(1) = 1 + e^{-1}$

La ecuación de la recta tangente es: $y - (1 + e^{-1}) = x - 1 \rightarrow y = x + 1 + e^{-1}$

050 **Determina las abscisas de los puntos de la curva $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ cuya recta tangente forma un ángulo de 135° con el sentido positivo del eje de abscisas.**

(Galicia. Septiembre 2004. Bloque 3. Pregunta 1)

Si la recta tangente forma un ángulo de 135° con el eje de abscisas entonces: $m = tg\ 135° = -1$

Buscamos los puntos que verifican que $f'(x) = -1$.

$f'(x) = x^2 - 2x - 3$

Entonces: $x^2 - 2x - 3 = -1 \rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

051 **Calcúlense las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ en el punto $x = 0$.**

(Castilla y León. Septiembre 2006. Prueba B. Cuestión 3)

$f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow f'(0) = 0$$

La ecuación de la recta tangente es $y = 0$.

Así, la ecuación de la recta normal es $x = 0$.

052 **Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal (recta perpendicular a la tangente) en el punto de abscisa 0, a la gráfica de la función *f* dada por:**

$$f(x) = 2xe^x + \frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$$

(Castilla-La Mancha. Junio 2003. Bloque 4. Pregunta A)

$$f(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 2e^x + 2xe^x + \frac{3x^2(x^2+4) - (x^3-2)2x}{(x^2+4)^2} =$$

$$= 2e^x + 2xe^x + \frac{x^4 + 12x^2 + 4x}{(x^2+4)^2} \rightarrow f'(0) = 2$$

La ecuación de la recta tangente es: $y = 2x$

La ecuación de la recta normal es: $y = -\frac{1}{2}x$

053 **Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $g(x) = |x^2 - 9|$ en el punto de abscisa $x = 2$.**

$$g(2) = 5$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } |x| \geq 3 \\ -x^2 + 9 & \text{si } -3 < x < 3 \end{cases} \rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } |x| > 3 \\ -2x & \text{si } -3 < x < 3 \end{cases}$$

$$g'(2) = -4$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 5 = -4(x-2) \rightarrow y = -4x + 13$

La ecuación de la recta normal es: $y - 5 = \frac{1}{4}(x-2) \rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$

054 **Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las siguientes curvas en los puntos que se indican.**

a) $y = xe^{\sqrt{x}}$, **en** $x = 4$. **b)** $y = arc\ sen\sqrt{x}$, **en** $x = \frac{1}{2}$.

a) $f(4) = 4e^2$

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} + xe^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = e^{\sqrt{x}} + \frac{xe^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(4) = 2e^2$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 4e^2 = 2e^2(x-4) \rightarrow y = 2e^2x - 4e^2$

La ecuación de la recta normal es:

$$y - 4e^2 = -\frac{1}{2e^2}(x-4) \rightarrow y = -\frac{1}{2e^2}x + \frac{2}{e^2} + 4e^2$$

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}} \rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \frac{\pi}{4} = x - \frac{1}{2} \rightarrow y = x - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

La ecuación de la recta normal es: $y - \frac{\pi}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = -x + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

055 **Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^3 + x^2 - 6x + 1$ en el punto de ordenada 1 y abscisa positiva.**

$$x^3 + x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x^2 + x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Tenemos que hallar las rectas que pasan por el punto (2, 1).

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 6 \rightarrow f'(2) = 10$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = 10(x - 2) \rightarrow y = 10x - 19$

La ecuación de la recta normal es: $y - 1 = -\dfrac{1}{10}(x - 2) \rightarrow y = -\dfrac{1}{10}x + \dfrac{6}{5}$

056 **Sea f la función con dominio los números reales no nulos definida por $f(x) = \dfrac{4}{x}$.**

a) Calcular la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Determinar los puntos M y N de la gráfica de f para los que las rectas tangentes en M y N se cortan en el punto (4, −8).

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Bloque 3. Problema 2)

a) $f(2) = 2$

$f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} \rightarrow f'(2) = -1$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = -(x - 2) \rightarrow y = -x + 4$

La ecuación de la recta normal es: $y - 2 = x - 2 \rightarrow y = x$

b) Sea $P\left(p, \dfrac{4}{p}\right)$ un punto cualquiera de la gráfica de f.

$f'(p) = -\dfrac{4}{p^2}$

Así, la recta tangente en P es de la forma:

$$y - \frac{4}{p} = -\frac{4}{p^2}(x - p) \rightarrow y = -\frac{4}{p^2}x + \frac{8}{p}$$

Si esta recta pasa por el punto (4, −8) tenemos que:

$$-8 = -\frac{4}{p^2} \cdot 4 + \frac{8}{p} \rightarrow 8p^2 + 8p - 16 = 0 \rightarrow p^2 + p - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ p = -2 \end{cases}$$

Luego los puntos que buscamos son $M(1, 4)$ y $N(-2, -2)$.

057 **Calcula el valor de a para que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -ax^2 + 5x - 4$ en el punto de abscisa 3 corte al eje X en el punto $x = 5$. ¿Cuál es la ecuación de la recta normal?**

$f(3) = -9a + 11$

$f'(x) = -2ax + 5 \rightarrow f'(3) = -6a + 5$

La ecuación de la recta tangente es:

$y + 9a - 11 = (-6a + 5)(x - 3) \rightarrow y = (-6a + 5)x + 9a - 4$

Si esta recta pasa por el punto (5, 0) entonces:

$(-6a + 5)5 + 9a - 4 = 0 \rightarrow -21a = -21 \rightarrow a = 1$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = -(x - 3) \rightarrow y = -x + 5$

La ecuación de la recta normal es: $y - 2 = x - 3 \rightarrow y = x - 1$

058 **Halla los valores de a, b y c para que las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 + c$ pasen por el punto (1, 2) y en ese punto tengan la misma tangente.**

Si la gráfica de f pasa por el punto (1, 2), entonces: $1 + a + b = 2 \rightarrow a + b = 1$

Del mismo modo, si la de g pasa por el punto (1, 2) tenemos que: $1 + c = 2 \rightarrow c = 1$

Y si en este punto tienen la misma tangente se verifica que: $f'(1) = g'(1)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x + a \rightarrow f'(1) = 2 + a \\ g'(x) = 3x^2 \rightarrow g'(1) = 3 \end{array}\right\} \rightarrow 2 + a = 3 \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 0$$

059 **¿Para qué valor de a la recta $ax + y = \ln 2$ es tangente a la curva $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$ en el punto de abscisa $x = 0$?**

(Canarias. Septiembre 2006. Opción B. Cuestión 1)

$f(0) = \ln 2$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{x + 1 - (x+2)}{(x+1)^2}}{\dfrac{x+2}{x+1}} = \frac{-1}{(x+1)(x+2)} \rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \ln 2 = -\dfrac{1}{2}x \rightarrow \dfrac{1}{2}x + y = \ln 2$

Así, tenemos que: $a = \dfrac{1}{2}$

060 **Determinar el valor de a para que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + ax$ en el punto $x = 0$ sea perpendicular a la recta $y + x = -3$.**

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba A. Cuestión 2)

$y + x = -3 \rightarrow y = -x - 3$

Si la recta tangente es perpendicular su pendiente es $f'(0) = 1$.

$f'(x) = 3x^2 + a \rightarrow f'(0) = a$

Luego, resulta que $a = 1$

061 **Halla la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ cuya recta tangente en el punto (1, 1) es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.**

$f'(x) = 2x + b \rightarrow f'(1) = 2 + b$

La bisectriz del primer cuadrante es la recta $y = x$.

Si la recta tangente es paralela a ella, entonces: $2 + b = 1 \rightarrow b = -1$

Así, la ecuación de la función es de la forma: $y = x^2 - x + c$

Si pasa por el punto (1, 1) tenemos que: $1 = 1 - 1 + c \rightarrow c = 1$

Luego, la ecuación de la parábola es $y = x^2 - x + 1$.

062 Considere la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$. Calcule c sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es horizontal.

(Cataluña. Año 2006. Serie 1. Problema 6)

Si la recta tangente en este punto es horizontal, la pendiente es $f'(0) = 0$.

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow f'(0) = c$

Así, $c = 0$.

063 Halla los puntos de la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en los cuales la recta tangente es paralela a la recta $y = x$.

Si la recta tangente es paralela a la recta $y = x$, entonces: $f'(x) = 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

Entonces: $3x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Por tanto, los puntos de la gráfica que verifican la condición son $(0, 0)$ y $(2, -2)$.

064 Determina en qué puntos de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$, la recta tangente a la misma es paralela a la recta $y = x + 7$.

Si la recta tangente es paralela a la recta $y = x$ entonces: $f'(x) = 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

Entonces: $3x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Por tanto, los puntos de la gráfica que verifican la condición son $(0, 1)$ y $(2, -1)$.

065 Obtener la derivada de la función:

$$f(x) = ax + b + \operatorname{sen} x$$

Calcular a y b si $O(0, 0)$ es un punto de la curva $y = ax + b + \operatorname{sen} x$, cuya tangente en $O(0, 0)$ es el eje X.

(C. Valenciana. Septiembre 2006. Ejercicio B. Problema 3)

$f'(x) = a + \cos x$

Si la tangente a la curva en $x = 0$ es la recta $y = 0$, entonces: $f'(0) = 0$

$a + \cos 0 = 0 \rightarrow a + 1 = 0 \rightarrow a = -1$

Así, la función es de la forma $f(x) = -x + b + \operatorname{sen} x$.

Si la curva pasa por el punto $(0, 0)$ tenemos que: $b + \operatorname{sen} 0 = 0 \rightarrow b = 0$

066 De la función f: $(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$$

se sabe que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ viene dada por $y = -2$.

Calcula a y b.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 1)

$$f'(x) = \frac{ax^2 - b}{x^2}$$

Si la tangente a la curva en $x = 1$ es la recta $y = -2$, entonces: $f'(1) = 0$

$a - b = 0 \rightarrow a = b$

Así, la función es de la forma: $f(x) = \dfrac{ax^2 + a}{x}$

Si la curva pasa por el punto $(1, -2)$ tenemos que: $2a = -2 \rightarrow a = b = -1$

067 **Utilizando la definición, calcula las derivadas laterales de las siguientes funciones en $x = 2$.**

a) $f(x) = |2 - x|$

b) $g(x) = |x^2 - 4|$

a) $f(x) = \begin{cases} -2 + x & \text{si } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{si } x < 2 \end{cases}$

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-2 + 2 + h}{h} = 1$$

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2 - (2+h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales no son iguales $\rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$g'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{4h + h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0^+} (4 + h) = 4$$

$$g'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(2+h)^2 + 4}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-4h - h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0^-} (-4 - h) = -4$$

Las derivadas laterales no son iguales $\rightarrow g(x)$ no es derivable en $x = 2$.

068 **Utilizando la definición, calcula las derivadas laterales de la siguiente función en $x = 0$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h^2} = +\infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h^2} = +\infty$$

Derivada de una función

069 Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \le 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula, si es posible, las derivadas laterales de f en $x = 1$.

(Andalucía. Año 2003. Modelo 5. Opción A. Ejercicio 1)

$$f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2 - (1+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-h^2 - 2h - 3}{h} = -\infty$$

$$f'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 + 3 - 4}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2h + h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0^-} (2 + h) = 2$$

070 Estudia si la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua y derivable en $x = 0$.

$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x} = \lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{x} = 0 = f(0) \to f(x)$ es continua en $x = 0$.

$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty \to f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

071 Demuestra que la siguiente función es continua en el punto $x = 1$, pero no es derivable en él.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) ¿Contradice este hecho alguno de los teoremas o propiedades estudiados en la unidad?

b) Pon un ejemplo de una función que sea derivable y discontinua en un punto.

$\lim_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = \lim_{x \to 1^-} (-x + 1) = 0 = f(1) \to f(x)$ es continua en $x = 1$.

$$f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} (2 + h) = 2$$

$$f'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(1+h) + 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

a) No, ya que la continuidad no implica la derivabilidad.

b) No existe, ya que si una función es discontinua en un punto no puede ser derivable en él.

072 Estudia la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 1}{x - 1} & \text{si } x \le 2 \\ -2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Si $x > 2$: $f(x) = -2x \to$ Función polinómica, por tanto, continua en $(2, +\infty)$.

- Si $x < 2$: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \rightarrow$ Función racional continua en $(-\infty, 2)$ salvo en $x = 1$.
- Si $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = -\infty \\ f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ no es continua en } x = 1 \text{, por tanto, no es derivable en } x = 1.$$

- Si $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+1}{x-1} = 3 \\ f(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-2x) = -4 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ no es continua en } x = 2 \text{, luego, no es derivable en } x = 2.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(x-1)^2} & \text{si } x < 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Así, la función es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

073 **Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -4 \\ x + 2 & \text{si } -4 \le x < 2 \\ \dfrac{8}{x} & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

(La Rioja. Junio 2004. Propuesta A. Ejercicio 5)

- Si $x < -4$: $f(x) = -1 \rightarrow$ Función constante, por tanto, continua en $(-\infty, -4)$.
- Si $-4 < x < 2$: $f(x) = x + 2 \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(4, 2)$.
- Si $x > 2$: $f(x) = \dfrac{8}{x} \rightarrow$ Función racional, continua en $(2, +\infty)$.
- Si $x = -4$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-4^-) = \lim\limits_{x \to -4^-} (-1) = -1 \\ f(-4^+) = \lim\limits_{x \to -4^+} (x+2) = -2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ no es continua en } x = -4 \text{, por tanto, no es derivable en } x = -4.$$

- Si $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x+2) = 4 \\ f(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{8}{x} = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4 = f(2) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

Así, la función es continua en $\mathbb{R} - \{-4\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -4 \\ 1 & \text{si } -4 < x < 2 \\ -\dfrac{8}{x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 1 \\ f'(2^+) = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = 2.$$

Luego, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{-4,\ 2\}$.

074 **Considera la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ a + bx & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Determina a y b para que sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Para esos valores, estudia la derivabilidad de $f(x)$.

a) • Si $x < 0$: $f(x) = x^2 \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 0)$.

• Si $0 < x < 1$: $f(x) = a + bx \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(0, 1)$.

• Si $x > 1$: $f(x) = 3 \rightarrow$ Función constante, por tanto, continua en $(1, +\infty)$.

La función es continua en $\mathbb{R}$ si lo es en los puntos en los que cambia su expresión algebraica.

• Para que la función sea continua en $x = 0$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (a + bx) = a \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow a = 0$$

• Si $a = 0$, para que la función sea continua en $x = 1$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(1) = b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} (bx) = b \\ f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} 3 = 3 \end{array}\right\} \rightarrow f(1^-) = f(1^+) = f(1) \rightarrow b = 3$$

b) $$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 3 \\ f'(1^+) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = 1.$$

Luego, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{0,\ 1\}$.

075 **Sea f la función definida para todo número real x de modo que para los valores de x pertenecientes al intervalo cerrado $[-1, 1]$ se tiene $f(x) = (x + 1)(x - 1)^2$ y para los valores de x no pertenecientes a dicho intervalo se tiene $f(x) = 0$. Se pide estudiar su continuidad y derivabilidad.**

(Aragón. Septiembre 2001. Opción A. Cuestión 3)

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)(x-1)^2 & \text{si } -1\le x\le 1\\ 0 & \text{si } |x|>1\end{cases}$$

- Si $-1<x<1$: $f(x)=(x+1)(x-1)^2 \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-1, 1)$.

  Si $|x|>1$: $f(x)=0 \rightarrow$ Función constante, por tanto, continua en $\mathbb{R}-(-1, 1)$.

- Si $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)(x-1)^2=0\\ f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}0=0\end{array}\right\}\rightarrow \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=0=f(1)$$

$\rightarrow f(x)$ es continua en $x=1$.

- Si $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-}0=0\\ f(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)(x-1)^2=0\end{array}\right\}\rightarrow \lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^+}f(x)=0=f(-1)$$

$\rightarrow f(x)$ es continua en $x=-1$.

Luego, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\begin{cases}(x-1)(3x+1) & \text{si } -1<x<1\\ 0 & \text{si } |x|>1\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=0\\ f'(1^+)=0\end{array}\right\}\rightarrow$$ Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-)=0\\ f'(-1^+)=4\end{array}\right\}\rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x=-1$.

Luego, la función es derivable en $\mathbb{R}-\{-1\}$.

076 **Decide si la función $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\le 1\\ 2x & \text{si } x>1\end{cases}$ es derivable en $x=1$.**

Para que una función sea derivable en un punto ha de ser continua, y para ser continua los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con el valor de la función en dicho punto; en este caso con $f(1)=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1\\ f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}2x=2\end{array}\right\}\rightarrow$$ $f(x)$ no es continua en $x=1$, por tanto, no es derivable en $x=1$.

077 **Demuestra que la función $f(x)=|x|^3$ es derivable en $x=0$.**

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0=f(0)\rightarrow f(x)$ es continua en $x=0$.

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|^3}{h}=\lim_{h\to 0^+}h^2=0$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|^3}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-h^2)=0$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x=0$.

078 **Razona si las siguientes funciones son derivables en los puntos $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$.**

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ b) $g(x) = x|x+2|$

a) • Si $x = -2$: $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -1 = f(-2) \to f(x)$ es continua en $x = -2$.

• Si $x = 0$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \to f(x)$ no es continua en $x = 0$, por tanto, no es derivable en $x = 0$.

• Si $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 = f(1) \to f(x)$ es continua en $x = 1$.

Estudiamos la derivabilidad en los puntos en los que la función es continua:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

• Si $x = -2$: $f'(-2) = -\dfrac{1}{2} \to f(x)$ es derivable en $x = -2$.

• Si $x = 1$: $f'(1) = -2 \to f(x)$ es derivable en $x = 1$.

b) $g(x) = \begin{cases} x(x+2) & \text{si } x \geq -2 \\ -x(x+2) & \text{si } x < -2 \end{cases}$

• Si $x = -2$: $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = 0 = g(-2) \to g(x)$ es continua en $x = -2$.

• Si $x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 0 = g(0) \to g(x)$ es continua en $x = 0$.

• Si $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 3 = g(1) \to g(x)$ es continua en $x = 1$.

Estudiamos la derivabilidad en estos puntos:

$$g'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x > -2 \\ -2x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

• Si $x = -2$: $\left.\begin{array}{l} g'(-2^-) = 2 \\ g'(-2^+) = -2 \end{array}\right\} \to$ Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, $g(x)$ no es derivable en $x = -2$.

• Si $x = 0$: $g'(0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2 \to g(x)$ es derivable en $x = 0$.

• Si $x = 1$: $g'(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4 \to g(x)$ es derivable en $x = 1$.

079 **Estudia la derivabilidad de $f(x) = 2 - x|x|$ en $x = 0$.**

(Andalucía. Año 2004. Modelo 5. Opción A. Ejercicio 1)

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 2 + x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2 = f(0) \to f(x)$ es continua en $x = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x > 0 \\ 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\} \to$ Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

080 Encontrar el valor de k para el cual la función:

$$f(x) = \begin{cases} 6 - \dfrac{x}{2} & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

es continua.

Estudiar si su derivada es una función continua.

(Aragón. Junio 2008. Bloque 3. Opción B)

- Si $x < 2$: $f(x) = 6 - \dfrac{x}{2} \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 2)$.
- Si $x > 2$: $f(x) = x^2 + kx \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(2, +\infty)$.
- Para que la función sea continua en $x = 2$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(2) = 4 + 2k$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(6 - \dfrac{x}{2}\right) = 5 \\ f(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 + kx) = 4 + 2k \end{array}\right\} \rightarrow f(2^-) = f(2^+) = f(2) \rightarrow 4 + 2k = 5 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Entonces: $f(x) = \begin{cases} 6 - \dfrac{x}{2} & \text{si } x < 2 \\ x^2 + \dfrac{1}{2}x & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{si } x < 2 \\ 2x + \dfrac{1}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -\dfrac{1}{2} \\ f'(2^+) = \dfrac{9}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = 2.$$

Así, la función derivada no es continua en $x = 2$.

081 Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \geq 3 \\ 2x + a & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

a) Encuentra el valor de a para que f sea continua.

b) Comprueba si es derivable en $x = 3$ a partir de la definición.

(Asturias. Junio 2001. Bloque 3)

a)
- Si $x > 3$: $f(x) = x^2 - 2x \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(3, +\infty)$.
- Si $x < 3$: $f(x) = 2x + a \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 3)$.
- Para que la función sea continua en $x = 3$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(3) = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} f(3^-) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x + a) = 6 + a \\ f(3^+) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 2x) = 3 \end{array}\right\} \rightarrow f(3^-) = f(3^+) = f(3) \rightarrow 6 + a = 3 \rightarrow a = -3$$

b) La función solo puede ser derivable si es continua, por tanto, consideramos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \geq 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$f'(3^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{9+6h+h^2-6-2h-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} (4+h) = 4$$

$$f'(3^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2(3+h)-3-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = 2$$

Las derivadas laterales existen pero no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

082 **Considera la función definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donde a es un número real.

a) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y comprueba que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

b) ¿Para qué valor del parámetro a la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$?

(Cataluña. Septiembre 2001. Cuestión 3)

a) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} (2x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} e^{ax} = 1 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

$$f(0) = e^{a\cdot 0} = 1$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \to f(x)$ es continua en $x = 0$.

b) $$f'(x) = \begin{cases} ae^{ax} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ las derivadas laterales tienen que ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = a \\ f'(0^+) = 2 \end{array}\right\} \to a = 2$$

083 **Determina el valor de a, si existe, para el cual la siguiente función es derivable en $x = 0$.**

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable, en primer lugar, tiene que ser continua.

La función es continua en $x = 0$ si los límites laterales son iguales y coinciden con $f(0) = \cos 0 = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \cos x = 1 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+a) = a \end{array}\right\} \to f(0^-) = f(0^+) = f(0) \to a = 1$$

Entonces: $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \le 0 \\ x^2+1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \to f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\} \to$ Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ si $a = 1$.

084 Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & \text{si } x<2 \\ e^{2-x}+2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

calcula a para que f sea continua en $x=2$. Para el valor obtenido, ¿es f derivable en $x=2$?

(Galicia. Junio 2007. Bloque 3. Opción 1)

Para que la función sea continua en $x=2$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(2)=3$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax^2+1)=4a+1 \\ f(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+}(e^{2-x}+2)=3 \end{array}\right\}\to f(2^-)=f(2^+)=f(2)\to 4a+1=3\to a=\frac{1}{2}$$

$$\text{Entonces: } f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+1 & \text{si } x<2 \\ e^{2-x}+2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}\to f'(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<2 \\ -e^{2-x} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=2 \\ f'(2^+)=-1 \end{array}\right\}\to \text{Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x=2.$$

085 Discutir según los valores de m la continuidad y la derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3-mx^2 & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{2}{mx} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

(Canarias. Septiembre 2004. Opción A. Cuestión 1)

- Si $x<1$: $f(x)=3-mx^2\to$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 1)$.
- Si $x>1$: $f(x)=\dfrac{2}{mx}\to$ Función racional continua si $x\neq 0$ y si $m\neq 0$.
- Para que la función sea continua en $x=1$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(1)=3-m$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3-mx^2)=3-m \\ f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{mx}=\dfrac{2}{m} \end{array}\right\}\to f(1^-)=f(1^+)=f(1)\to 3-m=\frac{2}{m}$$

$$\to m^2-3m+2=0\to\begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases}$$

Luego, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ si $m=1$ o $m=2$.

Para que una función sea derivable tiene que ser continua, así consideramos la derivada de la función si $m=1$ o si $m=2$.

$$f'(x)=\begin{cases} -2mx & \text{si } x<1 \\ -\dfrac{2}{mx^2} & \text{si } x>1 \end{cases}\qquad \left.\begin{array}{l} f'(1^-)=-2m \\ f'(1^+)=-\dfrac{2}{m} \end{array}\right\}$$

- Si $m=1\to f'(1^-)=f'(1^+)\to$ Las derivadas laterales en $x=1$ son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x=1\to$ La función es derivable en $\mathbb{R}$.
- Si $m=2\to f'(1^-)\neq f'(1^+)\to$ Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x=1\to$ La función es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$.

086 Calcular los valores de a y b para que la función:

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & \text{si } x<0\\ x^2+2a\cos x & \text{si } 0\le x<\pi\\ ax^2+b & \text{si } x\ge\pi\end{cases}$$

sea continua para todo valor de x.

Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

(Madrid. Septiembre 2006. Opción A. Ejercicio 2)

- Si $x<0$: $f(x)=3x+2\to$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 0)$.
- Si $0<x<\pi$: $f(x)=x^2+2a\cos x\to$ Función polinómica y trigonométrica, por tanto, continua en $(0, \pi)$.
- Si $x>\pi$: $f(x)=ax^2+b\to$ Función polinómica, por tanto, continua en $(\pi, +\infty)$.
- Para que la función sea continua en $x=0$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0)=2a$:

$$\left.\begin{array}{l}f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x+2)=2\\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+2a\cos x)=2a\end{array}\right\}\to f(0^-)=f(0^+)=f(0)\to 2a=2\to a=1$$

Consideramos que $a=1$, entonces para que la función sea continua en $x=\pi$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(\pi)=\pi^2+b$:

$$\left.\begin{array}{l}f(\pi^-)=\lim\limits_{x\to \pi^-}(x^2+2\cos x)=\pi^2-2\\ f(\pi^+)=\lim\limits_{x\to \pi^+}(x^2+b)=\pi^2+b\end{array}\right\}\begin{array}{l}\to f(\pi^-)=f(\pi^+)=f(\pi)\\ \quad\to \pi^2-2=\pi^2+b\to b=-2\end{array}$$

Si $a=1$ y $b=-2$ entonces: $f'(x)=\begin{cases}3 & \text{si } x<0\\ 2x-2\operatorname{sen} x & \text{si } 0<x<\pi\\ 2x & \text{si } x>\pi\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=3\\ f'(0^+)=0\end{array}\right\}\to$$ Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l}f'(\pi^-)=2\pi\\ f'(\pi^+)=2\pi\end{array}\right\}\to$$ Las derivadas laterales existen y son iguales, por tanto, $f(x)$ es derivable en $x=\pi$.

087 Considera la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}-x^3+x^2 & \text{si } x<1\\ ax-b & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

Determina los valores de a y b para que sea derivable en todos los puntos.

Una función solo puede ser derivable en todos los puntos si es continua en todos ellos.

- Si $x<1$: $f(x)=-x^3+x^2\to$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 1)$.
- Si $x>1$: $f(x)=ax^2+b\to$ Función polinómica, por tanto, continua en $(1, +\infty)$.

- Para que la función sea continua en $x = 1$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(1) = a - b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x^3 + x^2) = 0 \\ f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} (ax - b) = a - b \end{array}\right\} \to f(1^-) = f(1^+) = f(1) \to a - b = 0 \to a = b$$

La función es derivable en $x = 1$ si las derivadas laterales existen y son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2x & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -1 \\ f'(1^+) = a \end{array}\right\} \to a = -1 \to b = -1$$

088 **Halla los valores que deben tener a y b para que la siguiente función sea derivable en $x = 0$.**

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ ha de ser continua en este punto, para ello los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sen} x = 0 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = b \end{array}\right\} \to f(0^-) = f(0^+) = f(0) \to b = 0$$

Una vez que comprobamos que es continua en $x = 0$, para que la función sea derivable en dicho punto las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \to a = 1$$

089 **Determina los valores de a y b para que la siguiente función sea derivable en todos los puntos.**

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & \text{si } x \le -1 \\ \dfrac{a}{x} & \text{si } -1 < x \le 1 \\ \dfrac{x^2 + ax + 1}{x + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(Canarias. Junio 2006. Opción B. Cuestión 2)

Si $-1 < x < 1$: $f(x) = \dfrac{a}{x} \to$ Función racional, no es continua en $x = 0$, por tanto, no es derivable en $x = 0$.

Así, no existen valores de a y b para los que la función sea derivable en todos los puntos.

090 **Halla los valores que deben tener a y b para que la siguiente función sea derivable en $x = 0$.**

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e + sen\ x) & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ ha de ser continua en este punto, para ello los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \ln(e + sen\ x) = 1 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^3 + ax + b) = b \end{array}\right\} \to f(0^-) = f(0^+) = f(0) \to b = 1$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{e + sen\ x} & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + a & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \dfrac{1}{e} \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \to a = \frac{1}{e}$$

091 **Halla los valores que deben tener a y b para que la siguiente función sea derivable en $x = 0$.**

$$f(x) = \begin{cases} 5 + sen\ x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ ha de ser continua en este punto, para ello los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 5$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} (5 + sen\ x) = 5 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x^2 + ax + b) = b \end{array}\right\} \to f(0^-) = f(0^+) = f(0) \to b = 5$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ -2x + a & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \to a = 1$$

092 **Demuestra que la siguiente función es derivable para todos los valores de x.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La función es derivable para todos los valores de x solo si es continua en todos ellos.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

$sen\dfrac{1}{x}$ función acotada $\to f(0) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 sen\dfrac{1}{x} = 0 \to f(x)$ es continua.

$$f'(x) = 2x sen\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 sen\dfrac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h sen\frac{1}{h} = 0 \to f(x) \text{ es derivable.}$$

093 **Calcula razonadamente los valores de m y n para que la siguiente función sea derivable en $x = 4$.**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \leq x < 4 \\ x^2 + mx + n & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 4$ ha de ser continua en este punto, para ello los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(4) = 16 + 4m + n$:

$$\left.\begin{array}{l} f(4^-) = \lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{25 - x^2} = 3 \\ f(4^+) = \lim\limits_{x \to 4^+} (x^2 + mx + n) = 16 + m + n \end{array}\right\} \to f(4^-) = f(4^+) = f(4) \to 16 + m + n = 3$$

Para que la función sea derivable en $x = 4$ las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} & \text{si } -5 < x < 4 \\ 2x + m & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-) = -\dfrac{4}{3} \\ f'(4^+) = 8 + m \end{array}\right\} \to 8 + m = -\frac{4}{3} \to m = -\frac{28}{3}$$

Así: $16 - \dfrac{28}{3} + n = 3 \to \dfrac{20}{3} + n = 3 \to n = -\dfrac{11}{3}$

094 **Utilizando la definición, calcula la función derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 123$ **b)** $f(x) = 3x^2$ **c)** $f(x) = x^3$ **d)** $f(x) = ax$

a) $f'(x) = 0$ b) $f'(x) = 6x$ c) $f'(x) = 3x^2$ d) $f'(x) = a$

095 **A partir de la definición, halla la función derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x}$ **c)** $f(x) = sen\, x$ **d)** $f(x) = cos\, x$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x - x - h}{xh(x+h)} = -\dfrac{1}{x^2}$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{sen\,(x+h) - sen\, x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{sen\, x \cdot cos\, h + cos\, x \cdot sen\, h - sen\, x}{h} = cos\, x$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{cos\,(x+h) - cos\, x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{cos\, x \cdot cos\, h - sen\, x \cdot sen\, h - cos\, x}{h} = -sen\, x$

096 Calcular la derivada en el punto $x = 1$ de la función $f(x) = x^{-1/2}\ \ln\ x$.

(Extremadura. Septiembre 2000. Repertorio B. Ejercicio 1)

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\ln x + x^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{2-\ln x}{x\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = 2$$

097 Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x$

b) $g(x) = x^2$

c) $h(x) = x^3$

d) $i(x) = \cos x$

e) $j(x) = \operatorname{sen} x$

f) $k(x) = \operatorname{tg} x$

a) $f'(x) = 2$
$f''(x) = 0$
$f'''(x) = 0$

b) $g'(x) = 2x$
$g''(x) = 2$
$g'''(x) = 0$

c) $h'(x) = 3x^2$
$h''(x) = 6x$
$h'''(x) = 6$

d) $i'(x) = -\operatorname{sen} x$
$i''(x) = -\cos x$
$i'''(x) = \operatorname{sen} x$

e) $j'(x) = \cos x$
$j''(x) = -\operatorname{sen} x$
$j'''(x) = -\cos x$

f) $k'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$k''(x) = 2\operatorname{tg} x\cdot(1 + \operatorname{tg}^2 x)$
$k'''(x) = 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 + 2\operatorname{tg} x\cdot 2\operatorname{tg} x\cdot(1 + \operatorname{tg}^2 x) = (2 + 4\operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)$

098 Halla los puntos en los que la función $h(x) = \ln x$ es derivable, y calcula su primera y segunda derivadas.

La función es continua en su dominio, $(0, +\infty)$.

$h'(x) = \dfrac{1}{x} \rightarrow h(x)$ es derivable en $(0, +\infty)$.

$$h''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

099 **Determina los puntos en los que las siguientes funciones son derivables, y obtén las dos primeras derivadas de cada una de ellas.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $g(x) = x + |x - 2|$

c) $v(x) = \begin{cases} 3x + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ -2x - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

a) $f(x)$ está definida por funciones polinómicas, por tanto, continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{aligned} f(1^-) &= \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ f(1^+) &= \lim_{x \to 1^+} 2x = 2 \end{aligned}\right\} \to f(1^-) \neq f(1^+) \to f(x) \text{ no es continua en } x = 1 \text{, por tanto, no es derivable en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Por tanto, $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) $g(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

$g(x)$ está definida por funciones polinómicas, por tanto, continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{aligned} g(2^-) &= \lim_{x \to 2^-} 2 = 2 \\ g(2^+) &= \lim_{x \to 2^+} (2x - 2) = 2 \end{aligned}\right\} \to g(2^-) = g(2^+) = g(2) \to g(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} g'(2^-) &= 0 \\ g'(2^+) &= 2 \end{aligned}\right\} \to \text{Las derivadas laterales existen pero son distintas. } g(x) \text{ no es derivable en } x = 2.$$

Así, $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, y derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

$g''(x) = 0 \quad \text{si } x \neq 2$

c) $v(x)$ está definida por funciones polinómicas, por tanto, continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{aligned} v(-1^-) &= \lim_{x \to -1^-} (3x + 4) = 1 \\ v(-1^+) &= \lim_{x \to -1^+} (-2x - 1) = 1 \end{aligned}\right\} \to v(2^-) = v(2^+) = v(2) \to v(x) \text{ es continua en } x = -1.$$

$$v'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ -2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} v'(-1^-) &= 3 \\ v'(-1^+) &= -2 \end{aligned}\right\} \to \text{Las derivadas laterales existen pero son distintas. } v(x) \text{ no es derivable en } x = -1.$$

Por tanto, $v(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, y derivable en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$v''(x) = 0 \quad \text{si } x \neq -1$

100 Halla la derivada *n*-ésima de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $g(x) = \cos 2x$

c) $h(x) = e^{-x}$

a) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

$f^{IV)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$

Si $n \geq 4$, la derivada *n*-ésima es: $f^{n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-3)(2n-5) \cdot \ldots \cdot 1}{2^n} \cdot x^{-\frac{2n-1}{2}}$

b) $g'(x) = -2\text{sen } 2x$

$g''(x) = -4\cos 2x$

$g'''(x) = 8\text{sen } 2x$

$g^{IV)}(x) = 16\cos 2x$

$g^{V)}(x) = -32\text{sen } 2x$

Así, la derivada *n*-ésima puede calcularse según las expresiones:

$$g^{n)} = \begin{cases} g^{2k-1)}(x) = (-1)^k 2^{2k-1}\text{sen } 2x \\ g^{2k)}(x) = (-1)^k 2^{2k}\cos 2x \end{cases} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

c) $h'(x) = -e^{-x}$

$h''(x) = e^{-x}$

Así, la derivada *n*-ésima es: $h^{n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$

101 Obtén la derivada *n*-ésima de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ b) $g(x) = \text{sen}^2 x$ c) $h(x) = \ln x$

a) $f'(x) = \frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$

$f''(x) = -\frac{4}{(1-x)^3}$

$f'''(x) = \frac{12}{(1-x)^4}$

$f^{IV)}(x) = -\frac{48}{(1-x)^5}$

Así, la derivada *n*-ésima es: $f^{n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$

b) $g'(x) = 2sen\, x \cos x = sen\, 2x$
$g''(x) = 2\cos 2x$
$g'''(x) = -4sen\, 2x$
$g^{IV)}(x) = -8\cos 2x$
$g^{V)}(x) = 16sen\, 2x$

Así, la derivada n-ésima puede calcularse según las expresiones:

$$g^{n)} = \begin{cases} g^{2k-1)}(x) = (-1)^{k+1}2^{2k-2}sen\, 2x \\ g^{2k)}(x) = (-1)^{k+1}2^{2k-1}\cos 2x \end{cases} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

c) $h'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$
$h''(x) = -x^{-2}$
$h'''(x) = 2x^{-3}$
$h^{IV)}(x) = -6x^{-4}$

Así, la derivada n-ésima es: $h^{n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!\, x^{-n}$

102 **Dada la función $h(x) = e^{sen\,[f(x)]}$, calcula el valor de su derivada en $x = 0$, sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.**

(Extremadura. Junio 2007. Opción A. Ejercicio 1)

$$h'(x) = e^{sen[f(x)]}\cos [f(x)] \cdot f'(x)$$

$$h'(0) = e^{sen[f(0)]}\cos [f(0)] \cdot f'(0) = e^{sen\,0} \cdot \cos 0 \cdot 1 = e^0 = 1$$

103 **¿Puede haber dos funciones distintas que tengan igual función derivada? Si la respuesta es afirmativa, ponga un ejemplo. Si, por el contrario, la respuesta es negativa, razónese.**

(Galicia. Septiembre 2001. Bloque 3. Pregunta 1)

Sí, puede haber dos funciones distintas con la misma función derivada.
Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 + 3 \\ g(x) = x^2 - 2 \end{array}\right\} \rightarrow f'(x) = g'(x) = 2x$$

104 **Utilizando la propiedad de la derivada de una suma y la del producto de una constante por una función, halla la derivada de estas funciones.**

a) $y = x^2 + x + 3$

b) $y = -12 + 8x^3 + \dfrac{1}{x}$

c) $y = 3 + 5x^2 + 8\sqrt{x}$

d) $y = 5sen\, x - 10\cos x$

e) $y = 4x^6 - 5x^3 + 3$

f) $y = \cos^2 x + \cos x^2$

a) $y' = 2x + 1$

b) $y' = 24x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

c) $y' = 10x + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

d) $y' = 5\cos x + 10sen\, x$

e) $y' = 24x^5 - 15x^2$

f) $y' = -2\cos x\, sen\, x - 2x sen\, x^2$

Derivada de una función

105 A partir de la propiedad de la derivada de un producto de funciones, halla la derivada de las funciones.

a) $y = 12x^4$

b) $y = 3x^3 \ln x$

c) $y = 5x^2 \, sen\, x$

d) $y = \sqrt{x}\,(x^3 + 2x)$

a) $y' = 48x^3$

b) $y' = 9x^2 \ln x + 3x^2$

c) $y' = 10x sen\, x + 5x^2 cos\, x$

d) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^3 + 2x) + \sqrt{x}\,(3x^2 + 2) = \dfrac{7x^3 + 6x}{2\sqrt{x}}$

106 Utilizando la propiedad de la derivada de un cociente de funciones, calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{1}{x^3}$

b) $y = \dfrac{5x^2 - 1}{x + 2}$

c) $y = \dfrac{2}{x - 2}$

d) $y = \dfrac{tg\, x}{x}$

a) $y' = \dfrac{-3x^2}{x^6} = -\dfrac{3}{x^4}$

b) $y' = \dfrac{10x(x + 2) - (5x^2 - 1)}{(x + 2)^2} = \dfrac{5x^2 + 20x + 1}{(x + 2)^2}$

c) $y' = \dfrac{-2}{(x - 2)^2}$

d) $y' = \dfrac{(1 + tg^2\, x)x - tg\, x}{x^2}$

107 ¿Cuál es la derivada de estas funciones?

a) $y = \dfrac{1 + x^2}{x - 1}$

b) $y = \dfrac{12}{x^3}$

c) $y = \dfrac{7}{x^{400}}$

d) $y = \dfrac{4x^2 + 1}{x}$

e) $y = \dfrac{2 - x}{x^3}$

f) $y = \dfrac{x + 1}{x^2}$

a) $y' = \dfrac{2x(x - 1) - (1 + x^2)}{(x - 1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$

b) $y' = -\dfrac{36}{x^4}$

c) $y' = -\dfrac{2.800}{x^{401}}$

d) $y' = \dfrac{8x^2 - (4x^2 + 1)}{x^2} = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2}$

e) $y' = \dfrac{-x^3 - (2 - x)3x^2}{x^6} = \dfrac{2x^3 - 6x^2}{x^6} = \dfrac{2x - 6}{x^4}$

f) $y' = \dfrac{x^2 - (x + 1)2x}{x^4} = \dfrac{-x^2 - 2x}{x^4} = -\dfrac{x + 2}{x^3}$

108 Calcula la derivada de las siguientes funciones trigonométricas.

a) $y = 4arc\ tg\ x$

b) $y = (3x + 1)arc\ cos\ x$

c) $y = 2cos\ x + tg\ x$

d) $y = (1 + x^2)arc\ tg\ x$

e) $y = (x^2 + 8x + 1)sen\ x$

f) $y = 5sen\ x\ cos\ x$

a) $y' = \dfrac{4}{1 + x^2}$

b) $y' = 3arc\ cos\ x - \dfrac{3x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}$

c) $y' = -2sen\ x + 1 + tg^2\ x$

d) $y' = 2xarc\ tg\ x + 1$

e) $y' = (2x + 8)sen\ x + (x^2 + 8x + 1)cos\ x$

f) $y' = 5cos^2\ x - 5sen^2\ x$

109 Halla la derivada de estas funciones logarítmicas.

a) $y = \ln (9x^5 + 7x + 2)$

b) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

c) $y = \log_2 (3x^2 - 7)$

d) $y = \ln \sqrt{x^3 + 2x}$

e) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

f) $y = \ln (4x + 7)$

a) $y' = \dfrac{45x^4 + 7}{9x^5 + 7x + 2}$

b) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$

c) $y' = \dfrac{6x}{(3x^2 - 7)\ln 2}$

d) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{2}(x^3 + 2x)^{-\frac{1}{2}}(3x^2 + 2)}{\sqrt{x^3 + 2x}} = \dfrac{3x^2 + 2}{2(x^3 + 2x)}$

e) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

f) $y' = \dfrac{4}{4x + 7}$

110 Halla la derivada de la función $y = \ln \sqrt{sen\ x^2}$ y simplifica el resultado.

(Navarra. Junio 2004. Grupo 2. Opción D)

$$y' = \frac{\dfrac{1}{2}sen^{-\frac{1}{2}}\ x^2 cos\ x^2 \cdot 2x}{\sqrt{sen\ x^2}} = \frac{xcos\ x^2}{sen\ x^2} = xcotg\ x^2$$

111 Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = 4^x$

b) $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

c) $y = \dfrac{2x - 1}{x - x^2}$

d) $y = 7\sqrt{x} + 8\sqrt[3]{x}$

e) $y = xe^x$

f) $y = \sqrt[3]{5x^2}$

g) $y = \dfrac{x - 2}{x - 3}$

h) $y = \dfrac{x^2(1 - x)}{x^2 - 1}$

i) $y = x^2(\operatorname{sen} x - 5x)$

j) $y = 2^x + \log_2 x$

a) $y' = 4^x \ln 4$

b) $y' = -\dfrac{16x}{(x^2 - 4)^2}$

c) $y' = \dfrac{2(x - x^2) - (2x - 1)(1 - 2x)}{(x - x^2)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{(x - x^2)^2}$

d) $y' = 7 \cdot \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 8 \cdot \dfrac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{7}{2\sqrt{x}} + \dfrac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}$

e) $y' = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$

f) $y' = \dfrac{1}{3}(5x^2)^{-\frac{2}{3}} 10x = \dfrac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2)^2}} = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{25x}}$

g) $y' = \dfrac{(x - 3) - (x - 2)}{(x - 3)^2} = -\dfrac{1}{(x - 3)^2}$

h) $y' = \dfrac{(2x(1 - x) - x^2)(x^2 - 1) - x^2(1 - x)2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2}$

i) $y' = 2x(\operatorname{sen} x - 5x) + x^2(\cos x - 5) = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x - 15x^2$

j) $y' = 2^x \ln 2 + \dfrac{1}{x \ln 2}$

112 Halla las derivadas y simplifica el resultado.

a) $y = \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$

b) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

c) $y = \dfrac{(x + 2)^2}{x + 1}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{e^{x^2}}$

a) $y' = \dfrac{2xe^x - (x^2 + 1)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{e^x}$

b) $y' = \dfrac{\ln x - x \cdot \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

c) $y' = \dfrac{2(x + 2)(x + 1) - (x + 2)^2}{(x + 1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x + 8}{(x + 1)^2}$

d) $y' = \dfrac{2xe^{x^2} - (x^2 - 1)e^{x^2} \cdot 2x}{(e^{x^2})^2} = \dfrac{-2x^3 + 4x}{e^{x^2}}$

113 Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = 3^{x^2+4}$
b) $y = (x^5 - 2)^3$
c) $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x}$
d) $y = 5e^{-x^2}$
e) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^3}$
f) $y = arc\ tg\ \sqrt{x}$
g) $y = \sqrt{2x^2 + 1}$
h) $y = e^{x^2-7}$
i) $y = sen^2\ x$
j) $y = 2^{sen\ x}$

a) $y' = 3^{x^2+4} \ln 3 \cdot 2x$

b) $y' = 15x^4(x^5 - 2)^2$

c) $y' = \dfrac{1}{3}(x^3 - 2x)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 - 2) = \dfrac{3x^2 - 2}{3\sqrt[3]{(x^3 - 2x)^2}}$

d) $y' = -10xe^{-x^2}$

e) $y' = \dfrac{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}x^3 - \sqrt{x+1} \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{-5x - 6}{2x^4\sqrt{x+1}}$

f) $y' = \dfrac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{1 + x} = \dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

g) $y' = \dfrac{1}{2}(2x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}4x = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

h) $y' = 2xe^{x^2-7}$

i) $y' = 2sen\ x\ cos\ x$

j) $y' = 2^{sen\ x} \ln 2 \cdot cos\ x$

114 Halla la derivada de estas funciones.

a) $y = arc\ sen\ \dfrac{1}{x}$
b) $y = cos\,(x^2 + 5x + 5)$
c) $y = \dfrac{cotg\ x}{x^2}$
d) $y = 12\sqrt{3x^2 + x}$
e) $y = arc\ sen\,(5x + 1)$
f) $y = \ln\,(sen\ x^2)$
g) $y = (4x^2 - 5x + 1)3^x$

a) $y' = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\dfrac{x}{x^2\sqrt{x^2 - 1}} = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

b) $y' = -sen\,(x^2 + 5x + 5) \cdot (2x + 5)$

c) $y = \dfrac{1}{tg\ x \cdot x^2}$

$y' = \dfrac{(1 + tg^2\ x)x^2 + tg\ x \cdot 2x}{(tg\ x \cdot x^2)^2} = \dfrac{x + x\,tg^2\ x + 2tg\ x}{x^3\,tg^2\ x}$

d) $y' = 12 \cdot \frac{1}{2}(3x^2 + x)^{-\frac{1}{2}}(6x + 1) = \frac{36x + 6}{\sqrt{3x^2 + x}}$

e) $y' = \frac{5}{\sqrt{1 - (5x + 1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{-25x^2 - 10x}}$

f) $y' = \frac{\cos x^2 \cdot 2x}{\operatorname{sen} x^2} = 2x \operatorname{cotg} x^2$

g) $y' = (8x - 5)3^x + (4x^2 - 5x + 1)3^x \ln 3$

115 Calcula la derivada de estas funciones.

a) $y = tg^2 (2x + 3)$

b) $y = arc\ tg (x^3 + 6)$

c) $y = \sqrt{\ln (3x - 5)}$

d) $y = \sqrt[4]{5x^3 + 1}$

e) $y = 2x arc\ sen\ x$

f) $y = \sqrt[3]{(5x - 2)^2}$

a) $y' = 4tg(2x + 3)(1 + tg^2 (2x + 3))$

b) $y' = \frac{3x^2}{1 + (x^3 + 6)^2}$

c) $y' = \frac{1}{2}(\ln (3x - 5))^{-\frac{1}{2}} \frac{3}{3x - 5} = \frac{3}{2(3x - 5)\sqrt{\ln(3x - 5)}}$

d) $y' = \frac{1}{4}(5x^3 + 1)^{-\frac{3}{4}} 15x^2 = \frac{15x^2}{4\sqrt[4]{(5x^3 + 1)^3}}$

e) $y' = 2arc\ sen\ x + 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

f) $y' = \frac{2}{3}(5x - 2)^{-\frac{1}{3}} 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x - 2}}$

116 Determina la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = \frac{x\ sen\ x}{e^x}$

b) $y = arc\ tg \frac{1}{x}$

c) $y = \ln (1 - 2^x)$

d) $y = \frac{\cos x}{x^2}$

e) $y = sen \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$

f) $y = \sqrt{e^x + x}$

g) $y = \frac{5^x + 5^{-x}}{2}$

h) $y = x^2 e^{-x}$

i) $y = e^{1-x^2}$

j) $y = \sqrt{\sec x}$

a) $y' = \frac{(sen\ x + x\cos x)e^x - x\ sen\ x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{sen\ x + x\cos x - x\ sen\ x}{e^x}$

b) $y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{x^2}{x^2(x^2 + 1)} = -\frac{1}{x^2 + 1}$

c) $y' = \frac{-2^x \ln 2}{1 - 2^x}$

d) $y' = \dfrac{-sen\, x \cdot x^2 - cos\, x \cdot 2x}{x^4} = -\dfrac{xsen\, x + 2cos\, x}{x^3}$

e) $y' = cos\dfrac{1}{x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) - sen\dfrac{1}{x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

f) $y' = \dfrac{1}{2}(e^x + x)^{-\frac{1}{2}}(e^x + 1) = \dfrac{e^x + 1}{2\sqrt{e^x + x}}$

g) $y' = \dfrac{5^x \ln 5 - 5^{-x} \ln 5}{2}$

h) $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$

i) $y' = e^{1-x^2}(-2x)$

j) $y = \sqrt{\dfrac{1}{cos\, x}}$

$y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{cos\, x}\right)^{-\frac{1}{2}} \dfrac{sen\, x}{cos^2\, x} = \dfrac{sen\, x\sqrt{cos\, x}}{2cos^2\, x}$

117 **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $y = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

b) $y = arc\ tg\, \dfrac{x}{x-1}$

c) $y = arc\, cos\, (\ln x)$

d) $y = \sqrt[3]{2^{cos\, x}}$

e) $y = \log_2\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

f) $y = cos^3 x + sen\, x^2$

a) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} = -\dfrac{1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{x-1}{x+1} = -\dfrac{1}{x^2-1}$

b) $y' = -\dfrac{\dfrac{x-1-x}{(x-1)^2}}{1+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2 + x^2} = \dfrac{1}{2x^2 - 2x + 1}$

c) $y' = -\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

d) $y' = \dfrac{1}{3}(2^{cos\, x})^{-\frac{2}{3}} 2^{cos\, x} \ln 2\, (-sen\, x) = -\dfrac{\ln 2\; sen\, x\sqrt[3]{2^{cos\, x}}}{3}$

e) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{x}}\ln 2} = -\dfrac{1}{2x\ln 2}$

f) $y' = -3cos^2\, x\; sen\, x + 2sen\, x\; cos\, x$

118 Halla las derivadas y simplifica el resultado.

a) $y = arc\ sen\sqrt{x}$

b) $y = \sqrt[4]{sen\ (x^3+1)}$

c) $y = 2^{x^2+4} + x^2 + 4$

d) $y = \dfrac{\ln\sqrt{x+1}}{x}$

e) $y = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

a) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

b) $y' = \dfrac{1}{4}(sen\ (x^3+1))^{-\frac{3}{4}} cos\ (x^3+1)3x^2 = \dfrac{3x^2 cos\ (x^3+1)}{4\sqrt[4]{sen^3\ (x^3+1)}}$

c) $y' = 2^{x^2+4}\ln 2 \cdot 2x + 2x$

d) $y' = \dfrac{\dfrac{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x+1}} \cdot x - \ln\sqrt{x+1}}{x^2} = \dfrac{\dfrac{x}{2(x+1)} - \ln\sqrt{x+1}}{x^2} =$

$= \dfrac{x - 2(x+1)\ln\sqrt{x+1}}{2(x+1)x^2}$

e) $y = x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

$y' = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + x \cdot \dfrac{\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\dfrac{x}{x+1}} = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + \dfrac{1}{x+1}$

119 Hallar la derivada en $x = 0$ de la función $f(f(x))$, donde $f(x) = (1+x)^{-1}$.

(Extremadura. Junio 2005. Repertorio A. Ejercicio 3)

$f'(x) = -(1+x)^{-2}$

$(f(f(x)))' = f'(f(x))f'(x) = -(1+f(x))^{-2}(-(1+x)^{-2}) = \left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^2 \dfrac{1}{(1+x)^2}$

$(f(f(0)))' = \left(1+\dfrac{1}{1+0}\right)^2 \dfrac{1}{(1+0)^2} = 4$

120 Dada la función $f(x)=\dfrac{sen\ x + sen\ (x+1)}{cos\ x - cos\ (x+1)}$ en el intervalo $0 < x < 2\pi$, calcula su derivada, simplificándola en lo posible. ¿Es constante esta función $f(x)$?

(Extremadura. Septiembre 2006. Repertorio A. Ejercicio 3)

$$f'(x)=\frac{(cos\ x+cos\ (x+1))(cos\ x-cos\ (x+1)-(sen\ x+sen\ (x+1))(-sen\ x+sen\ (x+1))}{(cos\ x-cos\ (x+1))^2}=$$

$$=\frac{cos^2\ x-cos^2\ (x+1)+sen^2\ x-sen^2\ (x+1)}{(cos\ x-cos\ (x+1))^2}=\frac{1-1}{(cos\ x-cos\ (x+1))^2}=0$$

Al tener como derivada la función nula, se verifica que $f(x)$ es constante.

121 Comprueba que es constante la derivada de la función:

$$f(x)=arc\ tg\sqrt{\frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}\ \text{con}\ 0\le x\le \pi.$$

(La Rioja. Septiembre 2001. Propuesta A. Ejercicio 3)

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-cos\ x}{1+cos\ x}\right)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{sen\ x\cdot(1+cos\ x)-(1-cos\ x)(-sen\ x)}{(1+cos\ x)^2}}{1+\dfrac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}=$$

$$=\frac{\dfrac{2senx}{(1+cos\ x)^2}}{2\cdot\dfrac{1+cos\ x+1-cos\ x}{1+cos\ x}}\cdot\sqrt{\frac{1+cos\ x}{1-cos\ x}}=\frac{sen\ x\cdot(1+cos\ x)}{2(1+cos\ x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1+cos\ x}{1-cos\ x}}=$$

$$=\frac{sen\ x}{2(1+cos\ x)}\cdot\sqrt{\frac{1+cos\ x}{1-cos\ x}}=\frac{1}{2}sen\ x\cdot\sqrt{\frac{1+cos\ x}{(1+cos\ x)^2(1-cos\ x)}}=$$

$$=\frac{1}{2}sen\ x\cdot\sqrt{\frac{1}{1-cos^2\ x}}=\frac{1}{2}sen\ x\cdot\frac{1}{sen\ x}=\frac{1}{2}$$

122 Calcula la derivada de la función $y=f(x)$ definida implícitamente por la ecuación $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$. Comprueba que coincide con la expresión que se obtiene al despejar la variable y, y luego derivar con respecto a x.

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'=0\rightarrow\frac{1}{\sqrt{y}}y'=-\frac{1}{\sqrt{x}}\rightarrow y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\frac{5-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Despejando: $\sqrt{y}=5-\sqrt{x}\rightarrow y=\left(5-\sqrt{x}\right)^2$

$$y'=2\left(5-\sqrt{x}\right)\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{5-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

123 Halla la derivada de la función $y = f(x)$ definida implícitamente por cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $x^2 + y^2 - 2xy = 0$

b) $x = cos\,(xy)$

c) $x^3 + 3y^2 - 2ay = 0$

d) $e^{2y} - \ln x^3 = 3$

e) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

f) $x^3 + y^3 + xy = 0$

a) $2x + 2yy' - 2y - 2xy' = 0 \rightarrow (2y - 2x)y' = 2y - 2x \rightarrow y' = \dfrac{2y - 2x}{2y - 2x} = 1$

b) $1 = -sen\,(xy)(y + xy') \rightarrow y + xy' = -\dfrac{1}{sen\,(xy)} \rightarrow xy' = -\dfrac{1}{sen\,(xy)} - y$

$\rightarrow y' = \dfrac{-1 - y\,sen\,(xy)}{xsen\,(xy)}$

c) $3x^2 + 6yy' - 2ay' = 0 \rightarrow (6y - 2a)y' = -3x^2 \rightarrow y' = \dfrac{-3x^2}{6y - 2a}$

d) $e^{2y}2y' - \dfrac{3x^2}{x^3} = 0 \rightarrow e^{2y}2y' = \dfrac{3}{x} \rightarrow y' = \dfrac{3}{2xe^{2y}}$

e) $\dfrac{2x}{16} + \dfrac{2y}{4} \cdot y' = 0 \rightarrow \dfrac{y}{2} \cdot y' = -\dfrac{x}{8} \rightarrow y' = -\dfrac{x}{4y}$

f) $3x^2 + 3y^2y' + y + xy' = 0 \rightarrow (3y^2 + x)y' = -3x^2 - y \rightarrow y' = -\dfrac{3x^2 + y}{3y^3 + x}$

124 Utilizando la derivación logarítmica, calcula la derivada de las funciones.

a) $y = x^x$

b) $y = (1 + x^2)^x$

c) $y = (sen\,x)^{cos\,x}$

d) $y = \sqrt[x]{x^3}$

e) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

f) $y = (tg\,x)^x$

a) $\ln f(x) = \ln x^x$

$\ln f(x) = x\ln x$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x} + \ln x$

$f'(x) = x^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$

b) $\ln f(x) = \ln\,(1 + x^2)^x$

$\ln f(x) = x\ln\,(1 + x^2)$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln\,(1 + x^2) + x \cdot \dfrac{2x}{1 + x^2}$

$f'(x) = (1 + x^2)^x\left(\ln\,(1 + x^2) + \dfrac{2x^2}{1 + x^2}\right)$

c) $\ln f(x) = \ln (sen\ x)^{cos\ x}$

$\ln f(x) = cos\ x \cdot \ln (sen\ x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -sen\ x \ln (sen\ x) + cos\ x \cdot \frac{cos\ x}{sen\ x}$$

$$f'(x) = (sen\ x)^{cos\ x}\left(-sen\ x \cdot \ln (sen\ x) + \frac{cos^2\ x}{sen\ x}\right)$$

d) $\ln f(x) = \ln \sqrt[x]{x^3}$

$$\ln f(x) = \frac{3}{x} \cdot \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{3}{x^2} \cdot \ln x + \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \sqrt[x]{x^3} \cdot \frac{3 - 3\ln x}{x^2}$$

e) $\ln f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$$\ln f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)$$

f) $\ln f(x) = \ln (tg\ x)^x$

$\ln f(x) = x \ln (tg\ x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln (tg\ x) + x \cdot \frac{1 + tg^2\ x}{tg\ x}$$

$$f'(x) = (tg\ x)^x \left(\ln (tg\ x) + x \cdot \frac{1 + tg^2\ x}{tg\ x}\right)$$

125 **Aplicando la regla de la derivada de la función inversa, halla la derivada de estas funciones.**

a) $y = arc\ cos\ x$ **c)** $y = arc\ tg\ x$

b) $y = arc\ sen\ x$ **d)** $y = e^x$

a) $f(x) = cos\ x$

$f'(x) = -sen\ x$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(arc\ cos\ x)} = \frac{1}{-sen\ (arc\ cos\ x)} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - cos^2\ (arc\ cos\ x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

b) $f(x) = \text{sen } x$

$f'(x) = \cos x$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\text{arc sen } x)} = \frac{1}{\cos(\text{arc sen } x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\text{arc sen } x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

c) $f(x) = \text{tg } x$

$f'(x) = 1 + \text{tg}^2 x$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\text{arc tg } x)} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2(\text{arc tg } x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

d) $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Utilizando la definición de derivada, encuentre la derivada de la función $f(x) = \dfrac{3 + x}{x - 2}$ en el punto $x_0 = 3$.

(Murcia. Septiembre 2001. Bloque 3. Cuestión 1)

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3 + 3 + h}{3 + h - 2} - 6}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{6 + h}{1 + h} - 6}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6 + h - 6 - 6h}{h(1 + h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-5}{1 + h} = -5$$

2 Determinar en qué puntos de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 + x + 17$, la recta tangente a la misma es paralela a la recta $y = x + 7$.

(Castilla y León. Septiembre 2007. Prueba A. Cuestión 3)

Si la recta tangente es paralela a la recta $y = x + 7$ entonces: $f'(x) = 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

Entonces: $3x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Por tanto, los puntos de la gráfica que verifican la condición son (0, 17) y (2, 15).

3 Determina la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $5x - y - 3 = 0$.

(Andalucía. Año 2001. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 2)

$f''(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 3x + k$ siendo k un número real

Siendo $5x - y - 3 = 0$ la recta tangente en $x = 1$, tenemos que: $f'(1) = 5$

Entonces: $3 + k = 5 \rightarrow k = 2 \rightarrow f'(x) = 3x + 2 \rightarrow f(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x + c$ siendo c un número real.

Si la recta es tangente a la función en el punto (1, 2), este punto también pertenece a la gráfica de la función.

Así: $\frac{3}{2} + 2 + c = 2 \rightarrow c = -\frac{3}{2}$

Luego la función es: $f(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$

4 Calcular, simplificando el resultado todo lo posible, la derivada de la función:

$$f(x) = \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

(Castilla y León. Junio 2000. Prueba A. Cuestión 3)

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x \cdot (1 + \cos x) - (1 - \cos x)(-\operatorname{sen} x)}{(1 + \cos x)^2}}{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\dfrac{2\operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)^2}}{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen} x \cdot (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)^2} = \frac{2\operatorname{sen} x}{1 - \cos^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{sen} x}$$

5 Considerar las funciones definidas para $x \geq 0$:

$$f(x) = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad g(x) = \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Calcular $f'(x)$ y $g'(x)$ y expresarlas del modo más simplificado posible.
Comparar los resultados y deducir justificadamente la diferencia entre $f(x)$ y $g(x)$.

(C. Valenciana. Junio 2002. Ejercicio B. Problema 3)

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - x \cdot \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} 2x}{\left(\sqrt{1 + x^2}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)^2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{1 + x^2}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}}{\sqrt{\dfrac{1}{1 + x^2}}} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$g'(x) = -\frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2} - x\cdot\dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = -\frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}} =$$

$$= -\frac{\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$f'(x) = -g'(x) \rightarrow f(x) + k = -(g(x) + c)$ siendo $k, c \in \mathbb{R}$.

Entonces: $f(x) - g(x) = 2f(x) + 2k + c$

6 **Sea la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x \le -2 \\ 2x + 4 & \text{si } -2 < x \le 0 \\ a\cos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en toda la recta real en función de *a*.

b) Estudia su derivabilidad en toda la recta real en función de *a*.

(Asturias. Junio 2006. Bloque 5)

a) • Si $x < -2: f(x) = x^2 + 6x + 8 \rightarrow$ Función polinómica, continua en $(-\infty, -2)$.

• Si $-2 < x < 0: f(x) = 2x + 4 \rightarrow$ Función polinómica, continua en $(-2, 0)$.

• Si $x > 0: f(x) = a\cos x \rightarrow$ Función trigonométrica, continua en $(0, +\infty)$.

• Para que la función sea continua en $x = 2$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(2) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2^-) = \lim\limits_{x\to -2^-} (x^2 + 6x + 8) = 0 \\ f(-2^+) = \lim\limits_{x\to -2^+} (2x + 4) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow f(-2^-) = f(-2^+) = f(-2) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = -2.$$

• Análogamente, para que la función sea continua en $x = 0$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 4$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} (2x + 4) = 4 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} (a\cos x) = a \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow a = 4$$

Luego si $a = 4$, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, y si $a \neq 4$, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) $$f'(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 < x < 0 \\ -a\,\text{sen}\, x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^+) = 2 \\ f'(-2^-) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las derivadas laterales existen y son iguales, luego } f(x) \text{ es derivable en } x = -2.$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ tiene que ser continua, por tanto, consideramos $a = 4$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^+) = 0 \\ f'(0^-) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las derivadas laterales existen pero no son iguales, por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = 0.$$

Luego $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ para cualquier valor de a.

7 **Sea f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = x^2 - |x|$**
Estudia la derivabilidad de f.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 2. Opción A. Ejercicio 1)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + x) = 0 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - x) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Como las funciones que definen $f(x)$ son polinómicas, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^+) = -1 \\ f'(0^-) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las derivadas laterales existen pero no son iguales, por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = 0.$$

Luego, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

8 **Considera la función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \frac{|x|}{1 + x^2}$$

Estudia su derivabilidad (calcula la derivada donde exista y justifica la no existencia de derivada donde proceda).

(Cantabria. Junio 2008. Bloque 2. Opción A)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ -\dfrac{x}{1 + x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{1 + x^2} = 0 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{1 + x^2} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

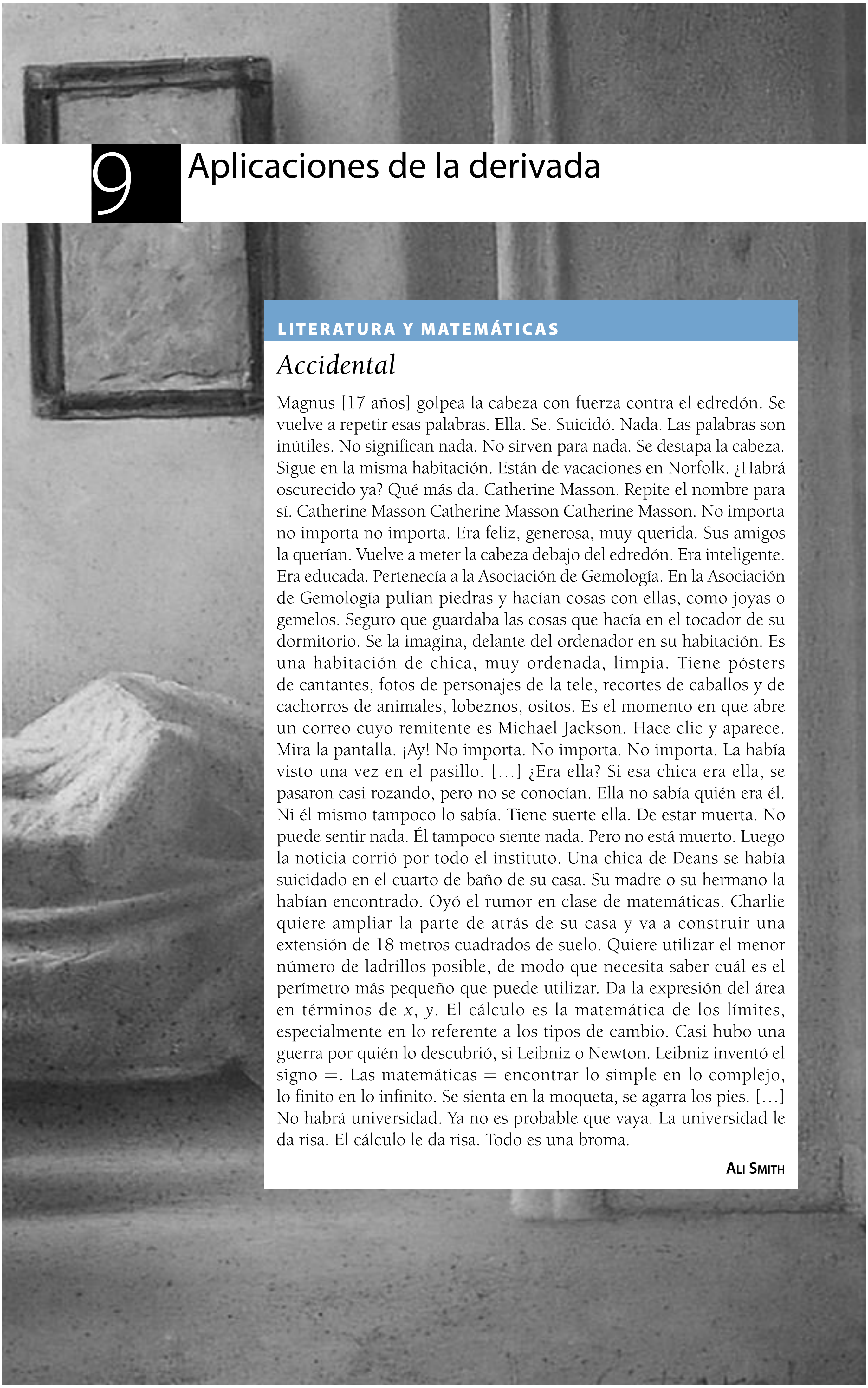
Las funciones que definen $f(x)$ son continuas, por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^+) = 1 \\ f'(0^-) = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las derivadas laterales existen pero no son iguales, por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = 0.$$

Luego, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

9 Aplicaciones de la derivada



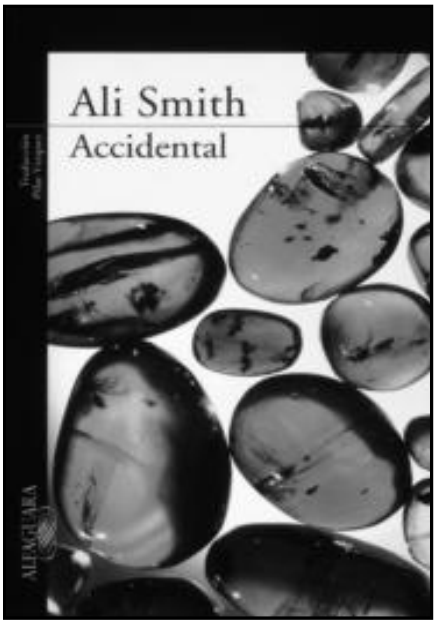
LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Accidental

Magnus [17 años] golpea la cabeza con fuerza contra el edredón. Se vuelve a repetir esas palabras. Ella. Se. Suicidó. Nada. Las palabras son inútiles. No significan nada. No sirven para nada. Se destapa la cabeza. Sigue en la misma habitación. Están de vacaciones en Norfolk. ¿Habrá oscurecido ya? Qué más da. Catherine Masson. Repite el nombre para sí. Catherine Masson Catherine Masson Catherine Masson. No importa no importa no importa. Era feliz, generosa, muy querida. Sus amigos la querían. Vuelve a meter la cabeza debajo del edredón. Era inteligente. Era educada. Pertenecía a la Asociación de Gemología. En la Asociación de Gemología pulían piedras y hacían cosas con ellas, como joyas o gemelos. Seguro que guardaba las cosas que hacía en el tocador de su dormitorio. Se la imagina, delante del ordenador en su habitación. Es una habitación de chica, muy ordenada, limpia. Tiene pósters de cantantes, fotos de personajes de la tele, recortes de caballos y de cachorros de animales, lobeznos, ositos. Es el momento en que abre un correo cuyo remitente es Michael Jackson. Hace clic y aparece. Mira la pantalla. ¡Ay! No importa. No importa. No importa. La había visto una vez en el pasillo. [...] ¿Era ella? Si esa chica era ella, se pasaron casi rozando, pero no se conocían. Ella no sabía quién era él. Ni él mismo tampoco lo sabía. Tiene suerte ella. De estar muerta. No puede sentir nada. Él tampoco siente nada. Pero no está muerto. Luego la noticia corrió por todo el instituto. Una chica de Deans se había suicidado en el cuarto de baño de su casa. Su madre o su hermano la habían encontrado. Oyó el rumor en clase de matemáticas. Charlie quiere ampliar la parte de atrás de su casa y va a construir una extensión de 18 metros cuadrados de suelo. Quiere utilizar el menor número de ladrillos posible, de modo que necesita saber cuál es el perímetro más pequeño que puede utilizar. Da la expresión del área en términos de x, y. El cálculo es la matemática de los límites, especialmente en lo referente a los tipos de cambio. Casi hubo una guerra por quién lo descubrió, si Leibniz o Newton. Leibniz inventó el signo $=$. Las matemáticas $=$ encontrar lo simple en lo complejo, lo finito en lo infinito. Se sienta en la moqueta, se agarra los pies. [...] No habrá universidad. Ya no es probable que vaya. La universidad le da risa. El cálculo le da risa. Todo es una broma.

ALI SMITH

Accidental
Ali Smith



Un joven de 17 años, Magnus, pasa las vacaciones con su familia en una ciudad de la costa inglesa. Siente remordimientos por haber colaborado en un «juego» que hizo que una compañera del instituto se suicidase. Durante ese verano conoce también a una mujer joven, Ámbar, con la que vive una aventura que tendrá graves consecuencias.

En la novela hay más referencias a las matemáticas, por ejemplo, una tarde Magnum le dice a Ámbar que el signo igual lo inventó Leibniz. Ella le contesta:

Pero ¿cómo sabes que es verdad?

Bueno, dijo Magnus. Supongamos que lo leí en un libro, porque no recuerdo exactamente ni cuándo ni cómo lo aprendí, pero supongamos que lo leí en un libro, lo cual lo hace presumiblemente cierto.

¿Por qué lo hace cierto el hecho de estar en un libro?, dijo Ámbar.

Porque si estaba en un libro era presumiblemente un libro de texto, dijo Magnus. Y los libros de texto suelen estar escritos por gente que ha estudiado el tema durante mucho tiempo y con profundidad suficiente para enseñárselo a gente que sabe mucho menos. Y además, los libros son editados por unos editores que comprueban los hechos antes de publicarlos. Y suponiendo que no lo aprendiera en un libro, sino que me lo enseñara un profesor, se podría aplicar el mismo criterio.

Pero ¿quieres decir que los profesores son editados por editores que comprueban los hechos antes de que los enseñen? […]

Ya sabes a qué me refiero, dijo. Venga ya. Déjame. En paz. […]

No estoy enamorada de ti, le había dicho Ámbar. Así que no lo olvides. Sencillamente los hombres de tu edad son apropiados por naturaleza para las mujeres de mi edad: se trata de elevarnos a la máxima potencia. Tú eres el exponente variable.

¿Había oído bien? ¿Se había inventado él al oír potencia lo del exponente variable? ¿Era una broma típica de Ámbar? Navegando en Internet […] descubrió que después de todo no había sido Leibniz, sino posiblemente un galés llamado Robert Recorde quien lo había inventado hacia 1550. El único dato biográfico relativo a Robert Recorde que aparecía en la página era que había muerto en prisión por deudas.

Resuelve el «problema de Charlie»: Se quiere adosar a una casa una habitación rectangular de 18 m^2. ¿Qué dimensiones debe tener para que su perímetro sea mínimo y utilizar el menor número de ladrillos posible?

Llamamos x e y a las dimensiones de la habitación: $xy = 18 \rightarrow y = \dfrac{18}{x} \rightarrow P(x, y) = 2x + y$

$$P(x) = 2x + \frac{18}{x} \rightarrow P'(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 & \text{Solución no válida} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$P''(x) = \frac{36}{x^3} \rightarrow P''(3) > 0 \rightarrow \text{Mínimo}$$

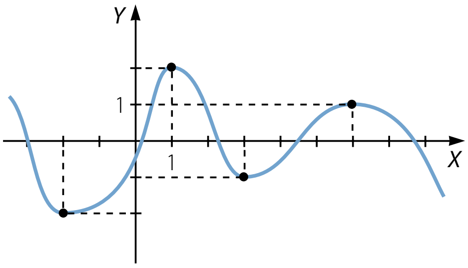
Las dimensiones de la habitación de Charlie son $x = 3$ metros, $y = 6$ metros.

Aplicaciones de la derivada

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Determina el crecimiento y decrecimiento de esta función.**

Indica en qué puntos alcanza máximos o mínimos relativos y absolutos.



La función es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (1, 3) \cup (6, +\infty)$.
Y es creciente en $(-2, 1) \cup (3, 6)$.

Tiene un máximo relativo en $(1, 2)$ y en $(6, 1)$. Tiene un mínimo relativo en $(-2, -2)$ y en $(3, -1)$.

A la vista de la función, no podemos asegurar que presente máximos ni mínimos absolutos.

002 **Una función definida para todos los números reales es decreciente en el intervalo $(-2, 5)$ y creciente en el resto. ¿Cuáles son los máximos y mínimos?**

Se alcanzará un máximo en $x = -2$ y un mínimo en $x = 5$.

003 **Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, calcula estos límites.**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x))$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x))$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x))^{g(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$

c) $$\lim_{x \to +\infty} (f(x))^{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } L > 1 \\ \text{Indeterminación} & \text{si } L = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < L < 1 \end{cases}$$

ACTIVIDADES

001 **Decide dónde crecen y decrecen estas funciones.**

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

a) Como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, estudiamos el crecimiento para todos los números reales.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 = 0 \to x = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3},\ x = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

- En $\left(-\infty, 1 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(1 + \dfrac{\sqrt{6}}{3}, +\infty\right) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente
- En $\left(1 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}, 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

b) Como $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, estudiamos el crecimiento para todos los números reales.

$$g'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $(-1, 1) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

002 **Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones, y compruébalo gráficamente.**

a) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$

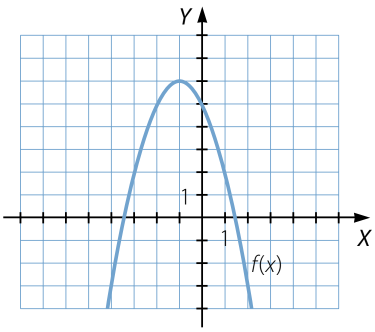
b) $g(x) = -x + 7x^2$

a) Como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica, estudiamos el crecimiento para todos los números reales.

$f'(x) = -2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$

- En $(-\infty, -1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

Gráficamente:

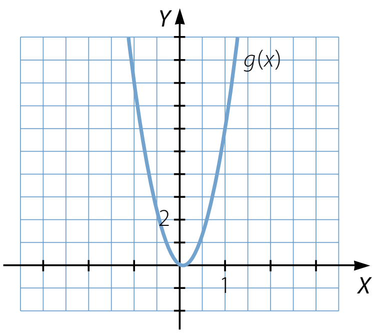


b) Como $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica, estudiamos el crecimiento para todos los números reales.

$$g'(x) = -1 + 14x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{14}$$

- En $\left(-\infty, \frac{1}{14}\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $\left(\frac{1}{14}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

Gráficamente:



003 **Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y calcula los máximos y mínimos de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ b) $g(x) = \dfrac{x}{x^3 + 1}$

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo, siendo sus coordenadas $(0, -1)$.

b) $g(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$$g'(x) = \frac{-2x^3 + 1}{(x^3+1)^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Así, estudiamos el crecimiento en $(-\infty, -1)$, $\left(-1, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$.

- En $(-\infty, -1) \cup \left(-1, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente
- En $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente

En $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ presenta un máximo, y sus coordenadas son $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$.

004 **Halla las coordenadas de los máximos y mínimos de la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-x^3 - 12}{x^5} = 0 \rightarrow x = -\sqrt[3]{12}$$

Como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, el extremo se encuentra en $(-\infty, 0)$.

- En $\left(-\infty, -\sqrt[3]{12}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(-\sqrt[3]{12}, 0\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = -\sqrt[3]{12}$ presenta un mínimo, y sus coordenadas son $\left(-\sqrt[3]{12}, \frac{-3}{4\sqrt[3]{12}}\right)$.

005 **Halla los máximos y mínimos de estas funciones mediante la derivada segunda.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^6 + 2}$

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ con $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 3}{x^4} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 12}{x^5}$$

$f''\left(-\sqrt{3}\right) > 0 \rightarrow x = -\sqrt{3}$ Mínimo

$f''\left(\sqrt{3}\right) < 0 \rightarrow x = \sqrt{3}$ Máximo

b) $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{-4x^7 + 4x}{(x^6+2)^2} = 0 \rightarrow x = 0, x = -1, x = 1$$

$$g''(x) = \frac{20x^{12} - 100x^6 + 8}{(x^6+2)^3}$$

$$g''(0) = \frac{8}{8} = 1 > 0 \rightarrow x = 0 \text{ Mínimo}$$

$$g''(-1) = \frac{20 - 100 + 8}{27} < 0 \rightarrow x = -1 \text{ Máximo}$$

$$g''(1) = \frac{20 - 100 + 8}{27} < 0 \rightarrow x = 1 \text{ Máximo}$$

006 **Utiliza la derivada segunda para determinar los máximos y mínimos de la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{x+3}{x^3 + x^2 - 6x}$$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 0, 2\}$.

$$f'(x) = \frac{-2x^3 - 10x^2 - 6x + 18}{(x^3 + x^2 - 6x)^2} = \frac{-2x + 2}{x^4 - 4x^3 + 4x^2} = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f''(x) = \frac{6x^4 - 24x^3 + 32x^2 - 16x}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2)^2} = \frac{x(x-2)(6x^2 - 12x + 8)}{x^4(x-2)^2(x+3)^2} = \frac{6x^2 - 12x + 8}{x^3(x-2)(x+3)^2}$$

$f''(1) < 0 \rightarrow x = 1$ Máximo

007 **Decide dónde son cóncavas y dónde son convexas estas funciones.**

a) $f(x) = 7x^3 - x^2 - x + 2$ b) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

a) Como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, estudiamos la concavidad para todos los números reales.

$f'(x) = 21x^2 - 2x - 1$

$$f''(x) = 42x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{42} = \frac{1}{21}$$

- En $\left(-\infty, \dfrac{1}{21}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\dfrac{1}{21}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

b) Como $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, estudiamos la concavidad para todos los números reales.

$$g'(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$g''(x) = \frac{-2x^3 + 6x}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow -x^3 + 3x = 0 \rightarrow x = 0, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa

008 **Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones, y comprueba el resultado gráficamente.**

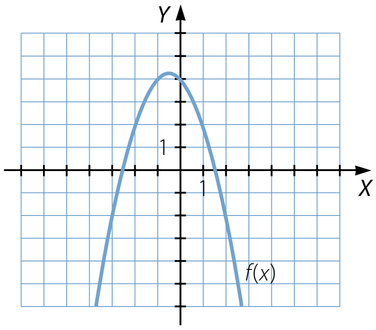
a) $f(x) = -x^2 - x + 4$ b) $g(x) = -x - 5x^2$

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, por tanto, estudiamos la concavidad para todos los números reales.

$f'(x) = -2x - 1$

$f''(x) = -2 < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

Gráficamente:

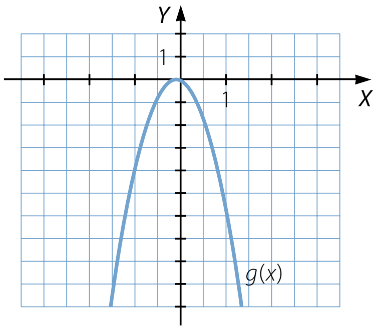


b) $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, por tanto, estudiamos la concavidad para todos los números reales.

$g'(x) = -1 - 10x$

$g''(x) = -10 < 0 \rightarrow g(x)$ convexa

Gráficamente:



009 **Estudia los intervalos de concavidad y convexidad de estas funciones, y a partir de ellos, determina los puntos de inflexión.**

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$

b) $g(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 7x}$

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f''(x) = 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$

- En $(-\infty, -1) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(-1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

Así, en $x = -1$ se alcanza un punto de inflexión.

b) Como el dominio de $g(x)$ es $\mathbb{R} - \{-7, 0\}$, estudiamos la concavidad en $(-\infty, -7)$, $(-7, 0)$, $(0, 7)$ y $(7, +\infty)$.

$$g'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 7}{(x^2 + 7x)^2}$$

$$g''(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 - 42x - 98}{(x^2 + 7x)^3} = 0 \rightarrow x = 7$$

- En $(-\infty, -7) \cup (0, 7) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa
- En $(-7, 0) \cup (7, +\infty) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava

Hay un punto de inflexión en $x = 7$.

010 **Estudia los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 4x^3 - 8x + 7$ **b)** $g(x) = \dfrac{-x^3 + 2}{x^2}$

a) $f'(x) = 12x^2 - 8$

$f''(x) = 24x = 0 \rightarrow x = 0$

$f'''(x) = 24 \rightarrow f'''(0) \neq 0 \rightarrow x = 0$ Punto de inflexión

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

b) $g'(x) = \dfrac{-x^3 - 4}{x^3}$

$g''(x) = \dfrac{12}{x^4} > 0 \rightarrow$ No hay puntos de inflexión y la función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup (0 +\infty)$, ya que 0 no está en el dominio.

011 **Calcula los puntos de inflexión de las siguientes funciones mediante la derivada tercera.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^3}$ **b)** $g(x) = -\dfrac{x}{x^2 - 7}$

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 3}{2x^4}$

$$f''(x) = \frac{x^2 - 6}{x^5} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{6},\ x = \sqrt{6}$$

$$f'''(x) = \frac{-3x^2 + 30}{x^6}$$

$f'''(-\sqrt{6}) \neq 0$, $f'''(\sqrt{6}) \neq 0 \rightarrow$ En $x = -\sqrt{6}$ y en $x = \sqrt{6}$ presenta puntos de inflexión.

b) $g'(x) = \dfrac{x^2 + 7}{(x^2 - 7)^2}$

$$g''(x) = \frac{-2x^3 - 42x}{(x^2 - 7)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

$g'''(x) = \dfrac{6x^4 + 252x^2 + 294}{(x^2 - 7)^4} \rightarrow g'''(0) \neq 0 \rightarrow$ En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.

012 **Halla los máximos, mínimos o puntos de inflexión de estas funciones.**

a) $f(x) = -4x^6$ b) $g(x) = 3x^7$

a) $f'(x) = -24x^5 = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = -120x^4 = 0 \rightarrow x = 0$

$f'''(x) = -480x^3 \rightarrow f'''(0) = 0$

$f^{IV)}(x) = -1.440x^2 \rightarrow f^{IV)}(0) = 0$

$f^{V)}(x) = -2.880x \rightarrow f^{V)}(0) = 0$

$f^{VI)}(x) = -2.880 \neq 0$

La primera derivada no nula tiene orden par y $f^{VI)}(0) < 0 \rightarrow$ En $x = 0$ alcanza un máximo.

b) $g'(x) = 21x^6 = 0 \rightarrow x = 0$

$g''(x) = 126x^5 = 0 \rightarrow x = 0$

$g'''(x) = 630x^4 \rightarrow g'''(0) = 0$

$g^{IV)}(x) = 2.520x^3 \rightarrow g^{IV)}(0) = 0$

$g^{V)}(x) = 7.560x^2 \rightarrow g^{V)}(0) = 0$

$g^{VI)}(x) = 15.120x \rightarrow g^{VI)}(0) = 0$

$g^{VII)}(x) = 15.120 \neq 0$

El orden de la primera derivada no nula es impar, por lo que en $x = 0$ presenta un punto de inflexión.

013 **Si el número de visitantes a un museo se obtiene mediante $f(x) = \dfrac{300x}{x^3 + 2}$, siendo x la hora desde su apertura, ¿cuándo recibe mayor número de visitantes?**

Debemos maximizar esta función: $f(x) = \dfrac{300x}{x^3 + 2}$

$$f'(x) = \frac{-600x^3 + 600}{(x^3 + 2)^2} = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f''(x) = \frac{1.800x^5 - 7.200x^2}{(x^3 + 2)^3} \rightarrow f''(1) < 0 \rightarrow \text{En } x = 1 \text{ alcanza un máximo.}$$

Así, el mayor número de visitantes lo recibe cuando pasa una hora desde su apertura.

014 **Halla el número real x que minimiza esta función.**

$$D(x) = (a - x)^2 + (b - x)^2 + (c - x)^2 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$D'(x) = -2(a - x) - 2(b - x) - 2(c - x)$

$D'(x) = -2a + 2x - 2b + 2x - 2c + 2x = 6x - 2(a + b + c) = 0$

$$\rightarrow x = \frac{2(a + b + c)}{6} = \frac{a + b + c}{3}$$

$D''(x) = 6 > 0 \rightarrow$ En $x = \dfrac{a + b + c}{3} \in \mathbb{R}$ alcanza un mínimo.

015 **La capacidad de concentración de una saltadora de altura, en una competición de atletismo de tres horas de duración, viene dada por la función:**

$$f(t) = 300t(3 - t)$$

donde t mide el tiempo en horas. ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?

$f'(t) = 900 - 600t = 0 \rightarrow t = \frac{3}{2}$

$f''(t) = -600 < 0 \rightarrow$ En $t = \frac{3}{2}$ alcanza un máximo.

Así, el mejor momento para que la saltadora pueda batir su propia marca es cuando lleva 1 hora y media.

016 **Halla dos números reales positivos, sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.**

Si llamamos x e y a los dos números reales positivos, se cumple que: $x + y = 10$
Debemos maximizar la función:

$P(x, y) = x^2y^2 \rightarrow P(x) = x^2(10 - x)^2 = x^2(100 + x^2 - 20x) = 100x^2 + x^4 - 20x^3$

$P'(x) = 200x + 4x^3 - 60x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 5, x = 10$

Veamos cuál es el número que maximiza la función $P(x)$.

$P''(x) = 200 + 12x^2 - 120x$

$P''(0) = 200 > 0 \rightarrow$ En $x = 0$ alcanza un mínimo.

$P''(5) = -100 < 0 \rightarrow$ En $x = 5$ alcanza un máximo.

$P''(10) = 200 > 0 \rightarrow$ En $x = 10$ alcanza un mínimo.

Los dos números que buscamos son $x = 5$ e $y = 5$.

017 **De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.**

Llamamos x a la longitud de la arista de la base e y a la altura del prisma.
Como el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, se cumple que:
$2x + 2y = 30 \rightarrow x + y = 15 \rightarrow y = 15 - x$

La función que debemos optimizar es: $V(x) = x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3$

$V'(x) = 30x - 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 10$

$V''(x) = 30 - 6x \rightarrow V''(0) > 0, V''(10) < 0 \rightarrow$ El máximo se alcanza en $x = 10$.

Las dimensiones del prisma recto de base cuadrada son:

Arista de la base: 10 cm

Altura: 5 cm

018 **Determina el punto de la gráfica de la función que a cada número le hace corresponder su doble y cuya distancia al punto (6, 3) es mínima. ¿Cuál es esa distancia?**

La función que a cada número le hace corresponder su doble es: $y = 2x$

Un punto que satisface esta función es $(x, 2x)$ y la función que nos da la distancia desde este punto a $(6, 3)$ es: $d(x) = \sqrt{(x - 6)^2 + (2x - 3)^2}$

Optimizamos la función $D(x) = d^2(x) = (x - 6)^2 + (2x - 3)^2$.

$D'(x) = 2(x - 6) + 4(2x - 3) = 2x - 12 + 8x - 12 = 10x - 24 = 0 \rightarrow x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$

$D''(x) = 10 > 0 \rightarrow$ En $x = \frac{12}{5}$ alcanza un mínimo.

Así, la distancia al punto (6, 3) será mínima en el punto $\left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right)$.

019 **Entre todos los rectángulos de área 3 m^2, encuentra las dimensiones del que tiene mínimo el producto de sus diagonales.**

Sean x e y las dimensiones del rectángulo de modo que: $xy = 3$

La función a optimizar viene dada por:

$$d \cdot d = d^2 \rightarrow P(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow P(x) = x^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{9}{x^2}$$

$$P'(x) = 2x - \frac{18}{x^3} = 0 \rightarrow 2x^4 - 18 = 0 \rightarrow x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$$

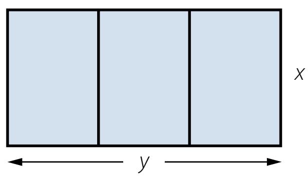
Como la solución negativa no es válida, tenemos que:

$$P''(x) = 2 + \frac{54}{x^4} \rightarrow P''\left(\sqrt{3}\right) > 0 \rightarrow \text{En este punto se alcanza un mínimo.}$$

Las dimensiones son $x = \sqrt{3}$, $y = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, por tanto, se trata de un cuadrado de lado $\sqrt{3}$ metros.

020 **Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes, colocando las alambradas de las divisiones paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que el área sea la mayor posible?**

Llamamos x e y a las dimensiones de la zona rectangular, y consideramos que las divisiones son paralelas a los lados de medida x. Para dividir la zona rectangular en tres partes necesitamos dos divisiones, por lo que se debe cumplir que:



$$4x + 2y = 160 \rightarrow 2x + y = 80 \rightarrow y = 80 - 2x$$

Debemos optimizar la función que nos da el área, es decir:

$$A(x, y) = xy \rightarrow A(x) = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2$$

$$A'(x) = 80 - 4x = 0 \rightarrow x = 20$$

$$A''(x) = -4 < 0 \rightarrow \text{En } x = 20 \text{ alcanza un máximo.}$$

Así, las dimensiones de la zona rectangular deben ser $x = 20$ metros e $y = 40$ metros.

021 **Razona si la función $f(x) = e^{x^2-1}$ cumple las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$. Si es así, determina el valor del punto c tal que su derivada se anula.**

f es una función continua en $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$.

$f(1) = 1 = f(-1)$

Por tanto, aplicando el teorema de Rolle, existe $c \in (-1, 1)$ tal que:

$$f'(c) = 0 \rightarrow 2c \cdot e^{c^2-1} = 0 \rightarrow 2c = 0 \rightarrow c = 0$$

022 **Comprueba si $f(x) = 3\cos^2 x$ verifica las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. ¿Para qué valor de c se cumple que $f'(c) = 0$?**

f es una función continua en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

$f'(x) = -6 \cos x \operatorname{sen} x = -3 \operatorname{sen} 2x \rightarrow f$ es derivable en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Además: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

Por el teorema de Rolle existe $c \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ tal que:

$f'(c) = 0 \rightarrow -3 \operatorname{sen} 2c = 0 \rightarrow \operatorname{sen} 2c = 0 \rightarrow c = \pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

023 **Razona si la función $f(x) = 7x^4 - x^3 - 4x$ cumple las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo [0, 2].**

f es una función polinómica $\rightarrow$ Es continua en [0, 2] y derivable en (0, 2). Por tanto, sí se cumplen las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo [0, 2].

024 **Razona si $f(x) = \cos^2 x$ cumple las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, \pi]$. Si es así, halla la derivada que resulta.**

f es una función continua en $[0, \pi]$.

$f'(x) = -2 \cos x \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} 2x$, que es derivable en $(0, \pi)$.

Por el teorema del valor medio existe $c \in (0, \pi)$ tal que:

$f'(c) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi - 0} \rightarrow -\operatorname{sen} 2c = \frac{1-1}{\pi} = 0 \rightarrow 2c = 0 + k\pi \rightarrow c = \frac{k\pi}{2}$

con $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Como $c \in (0, \pi)$, se tiene que $c = \frac{\pi}{2}$.

025 **Razona si $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = \ln x$ cumplen las condiciones del teorema del valor medio generalizado en el intervalo [1, 3]. En ese caso, ¿cuánto vale c?**

f y g son dos funciones continuas en [1, 3] y derivables en (1, 3), con $g(1) = \ln 1 = 0 \neq \ln 3 = g(3)$.

Como se cumplen las condiciones del teorema del valor medio generalizado existe $c \in (1, 3)$ tal que: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(3) - f(1)}{g(3) - g(1)}$

$f'(x) = 2x - 1 \qquad f(1) = 0 \qquad f(3) = 6$

$g'(x) = \frac{1}{x} \qquad g(1) = 0 \qquad g(3) = \ln 3$

Así, $\frac{2c-1}{\frac{1}{c}} = \frac{6-0}{\ln 3 - 0} \rightarrow c(2c-1) = \frac{6}{\ln 3} \rightarrow c = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1 + \frac{48}{\ln 3}} = 1{,}92$

026 **Comprueba si las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ verifican las condiciones del teorema del valor medio generalizado en el intervalo [−1, 1].**

f y g son dos funciones continuas en [−1, 1] y derivables en (−1, 1) por ser polinómicas. Además, $g(1) = 1 \neq -1 = g(-1)$ con lo cual, sí se cumplen las condiciones del teorema del valor medio generalizado.

027 Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{4x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x+9} - 3}$ c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{4x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{4x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{4} = \frac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x+9} - 3} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x+9} - 3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2 - 1}{\frac{1}{2\sqrt{x+9}}} = \frac{-1}{\frac{1}{6}} = -6$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \frac{2}{1} = 2$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{tg } x}{x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{tg } x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 + \text{tg}^2 x}{1} = \frac{1}{1} = 1$

028 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{4x^5 - 4x^2}{-x^2 + 1}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\text{sen } x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-x} - e^x}{3 \text{ sen } x}$ d) $\lim\limits_{x \to 7} \frac{x^2 - 9x + 14}{\ln (x^2 - 6x - 6)}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4x^5 - 4x^2}{1 - x^2} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 1} \frac{20x^4 - 8x}{-2x} = \frac{12}{-2} = -6$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x} - e^x}{3 \text{ sen } x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-e^{-x} - e^x}{3 \cos x} = \frac{-2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen } x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{x^2 - 9x + 14}{\ln (x^2 - 6x - 6)} \to \frac{0}{0}$

$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 7} \frac{2x - 9}{\frac{2x - 6}{x^2 - 6x - 6}} = \lim\limits_{x\to 7} \frac{(2x - 9)(x^2 - 6x - 6)}{2x - 6} = \frac{5}{8}$

029 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x^3}$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{\ln x} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1/x} = \lim\limits_{x\to +\infty} xe^x = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x^3} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{6x^2}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{6x^2} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{12x} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{12} = +\infty$

030 Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4x}-\dfrac{2}{xe^x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\sqrt{x+1}}{3x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4x}-\dfrac{2}{xe^x}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-8}{4xe^x}\to\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{4e^x+4xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4(1+x)}=\frac{1}{4}$$

b) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sqrt{x+1}}{3x}\to\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim_{x\to +\infty}\frac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{3}=\frac{1+0}{3}=\frac{1}{3}$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)\to 0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}\to\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

031 Halla estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0}(tg\ x)^x$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{4x-5}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}(tg\ x)^x\to 0^0$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(tg\ x)^x\right)=\lim_{x\to 0}(x\ln(tg\ x))\to 0\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(tg\ x)}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{tg\ x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{tg\ x\cdot\cos^2 x}\to\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\cos^2 x-tg\ x\cdot 2\cos x\ sen\ x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{1-2\ tg\ x\cos x\ sen\ x}=0$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(tg\ x)^x\right)=0\to\lim_{x\to 0}(tg\ x)^x=e^0=1$$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{4x-5}\to 1^\infty$

$$\ln\left(\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x-5}\right)=\lim_{x\to +\infty}(4x-5)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\to\infty\cdot 0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{1}{4x-5}}\to\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim_{x\to +\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{x}}\cdot\dfrac{-3}{x^2}}{\dfrac{-4}{(4x-5)^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-3x(4x-5)^2}{-4(x+3)x^2}=12$$

$$\ln\left(\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x+5}\right)=12\to\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x-5}=e^{12}$$

032 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x^2+2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{3x+1}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2)^{\frac{1}{x}} \to \infty^0$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty} (x^2+2)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln(x^2+2) \to 0\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+2)}{x} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+2} = 0$$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty} (x^2+2)^{\frac{1}{x}}\right) = 0 \to \lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x^2+2} = e^0 = 1$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{3x+1} \to 1^\infty$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{3x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} (3x+1)\ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right) \to \infty\cdot 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)}{\frac{1}{3x+1}} \to \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x-2}{x+3}\cdot\frac{-5}{(x-2)^2}}{\frac{-3}{(3x-1)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5(3x-1)^2}{3(x+3)(x-2)} = \frac{45}{3} = 15$$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{3x+1}\right) = 15 \to \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{3x+1} = e^{15}$$

033 **Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos, de las siguientes funciones polinómicas.**

a) $f(x) = x^2(x+1)$

b) $g(x) = 3x^3 - 7x + 2$

c) $h(x) = -x^4 + 3x^2 - 2x$

d) $i(x) = |x^2 - 2|$

e) $j(x) = |-x^2 + 6x - 9|$

a) $f'(x) = 2x(x+1) + x^2 = 3x^2 + 2x = 0 \to x = 0,\ x = \dfrac{-2}{3}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-2}{3}\right) \cup (0, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente
- En $\left(\dfrac{-2}{3}, 0\right) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

Por tanto, $f(x)$ alcanza un máximo en $x = \dfrac{-2}{3}$ y un mínimo en $x = 0$.

b) $g'(x) = 9x^2 - 7 = 0 \rightarrow x = \dfrac{\sqrt{7}}{3}, x = \dfrac{-\sqrt{7}}{3}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente
- En $\left(\dfrac{-\sqrt{7}}{3}, \dfrac{\sqrt{7}}{3}\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente

Así, $g(x)$ alcanza un máximo en $x = \dfrac{-\sqrt{7}}{3}$ y un mínimo en $x = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

c) $h'(x) = -4x^3 + 6x - 2 = 0 \rightarrow x = 1, x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, 1\right) \rightarrow h'(x) > 0 \rightarrow h(x)$ creciente
- En $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \cup (1, +\infty) \rightarrow h'(x) < 0 \rightarrow h(x)$ decreciente

Así, en $x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ y en $x = 1$ alcanza dos máximos

y en $x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, un mínimo.

d) $i(x) = \left|x^2 - 2\right| = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x^2 - 2 \geq 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } x^2 - 2 < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \\ 2 - x^2 & \text{si } x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \end{cases}$

$i'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \\ -2x & \text{si } x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \end{cases}$

Así $i'(x) = 0 \rightarrow x = 0$, así, los intervalos en los que debemos estudiar el crecimiento y decrecimiento son: $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, 0\right), \left(0, \sqrt{2}\right), \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$

- En $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \rightarrow i'(x) > 0 \rightarrow i(x)$ creciente
- En $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right) \rightarrow i'(x) < 0 \rightarrow i(x)$ decreciente

La función $i(x)$ alcanza un máximo en $x = 0$ y dos mínimos en $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.

e) $j(x) = \left|-x^2 + 6x - 9\right| = \left|-(x-3)^2\right| = \left|(x-3)^2\right| = (x-3)^2$

$j'(x) = 2(x-3) = 0 \rightarrow x = 3$

- En $(-\infty, 3) \rightarrow j'(x) < 0 \rightarrow j(x)$ decreciente
- En $(3, +\infty) \rightarrow j'(x) > 0 \rightarrow j(x)$ creciente

Así, en $x = 3$ alcanza un mínimo.

034 **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de las funciones racionales.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ c) $h(x) = \dfrac{7x^2 + 2}{x}$ e) $j(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

b) $g(x) = \dfrac{40 - 5x}{10 - x}$ d) $i(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$ f) $k(x) = -\dfrac{x^3}{x^2 - 3}$

a) f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = 0$ alcanza un máximo y en $x = 2$, un mínimo.

b) g es continua en $\mathbb{R} - \{10\}$.

$$g'(x) = \frac{-10}{(10-x)^2} < 0 \rightarrow g(x) \text{ decreciente en todo su dominio}$$

c) h es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$h'(x) = \frac{7x^2 - 2}{x} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{\frac{2}{7}},\ x = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{7}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{7}}, +\infty\right) \rightarrow h'(x) > 0 \rightarrow h(x)$ creciente
- En $\left(-\sqrt{\frac{2}{7}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{2}{7}}\right) \rightarrow h'(x) < 0 \rightarrow h(x)$ decreciente

Así, en $x = -\sqrt{\frac{2}{7}}$ alcanza un máximo y en $x = \sqrt{\frac{2}{7}}$, un mínimo.

d) i es continua en $\mathbb{R}$.

$$i'(x) = \frac{-x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{2},\ x = \sqrt{2}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \rightarrow i'(x) < 0 \rightarrow i(x)$ decreciente
- En $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \rightarrow i'(x) > 0 \rightarrow i(x)$ creciente

Así, en $x = \sqrt{2}$ alcanza un máximo y en $x = -\sqrt{2}$ un mínimo.

e) j es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

$$j'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0 \rightarrow j(x) \text{ decreciente en todo su dominio}$$

f) k es continua en $\mathbb{R} - \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$.

$$k'(x) = \frac{-x^4 + 9x^2}{(x^2 - 3)^2} = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -3,\ x = 3$$

- En $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \rightarrow k'(x) < 0 \rightarrow k(x)$ decreciente
- En $\left(-3, -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 3\right) \rightarrow k'(x) > 0 \rightarrow k(x)$ creciente

En $x = -3$ alcanza un mínimo y en $x = 3$, un máximo.

035 **Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos, de estas funciones exponenciales.**

a) $f(x) = 3x^2e^x$ b) $g(x) = (x+3)e^x$ c) $h(x) = 6xe^{-x}$

Las tres funciones son continuas en $\mathbb{R}$.

a) $f'(x) = e^x(6x + 3x^2) = 0 \to x = -2,\ x = 0$

- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente
- En $(-2, 0) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

En $x = -2$ alcanza un máximo y en $x = 0$, un mínimo.

b) $g'(x) = e^x(x+4) = 0 \to x = -4$

- En $(-\infty, -4) \to g'(x) < 0 \to g(x)$ decreciente
- En $(-4, +\infty) \to g'(x) > 0 \to g(x)$ creciente

En $x = -4$ alcanza un mínimo.

c) $h'(x) = e^{-x}(6 - 6x) = 0 \to x = 1$

- En $(-\infty, 1) \to h'(x) > 0 \to h(x)$ creciente
- En $(1, +\infty) \to h'(x) < 0 \to h(x)$ decreciente

En $x = 1$ alcanza un máximo.

036 **Estudia el crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de las siguientes funciones logarítmicas.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$ b) $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ c) $h(x) = x \ln \sqrt{x}$

a) El dominio de f es $(0, +\infty)$ y es continua en todo el dominio.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2} = 0 \to x = 1$$

- En $(0, 1) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $(1, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

En $x = 1$ alcanza un mínimo.

b) El dominio de g es $(0, +\infty)$ y es continua en todo el dominio.

$$g'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \to x = \sqrt{e}$$

- En $\left(0, \sqrt{e}\right) \to g'(x) > 0 \to g(x)$ creciente
- En $\left(\sqrt{e}, +\infty\right) \to g'(x) < 0 \to g(x)$ decreciente

En $x = \sqrt{e}$ alcanza un máximo.

c) El dominio de h es $(0, +\infty)$ y es continua en todo el dominio.

$$h'(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{2} = 0 \to x = \frac{1}{e}$$

- En $\left(0, \dfrac{1}{e}\right) \to h'(x) < 0 \to h(x)$ decreciente
- En $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right) \to h'(x) > 0 \to h(x)$ creciente

En $x = \dfrac{1}{e}$ alcanza un mínimo.

037 **Estudia el crecimiento y decrecimiento de estas funciones trigonométricas, y decide si alcanzan máximos o mínimos en algún punto.**

a) $f(x) = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ b) $g(x) = x - \operatorname{sen} x$ c) $h(x) = \operatorname{arc\,tg} x$

a) f es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = -2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos x = 0 \rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2}$$

Estudiamos el crecimiento en $(-\pi, \pi)$ ya que las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.

- En $\left(-\pi, \dfrac{-\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

La función tiene un máximo en $x = \dfrac{-\pi}{2}$ y un mínimo en $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Por ser una función periódica de período 2π, podemos extender el resultado a toda la recta real repitiéndose indefinidamente intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.

b) g es continua en $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 1 - \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 0$

Estudiamos el crecimiento en $(-\pi, \pi)$ ya que $g'(x)$ es periódica de período 2π.

$g'(x) > 0$ en $(-\pi, 0) \cup (0, \pi) \rightarrow g(x)$ creciente $\rightarrow$ No tiene extremos relativos.

Extendiendo el resultado a toda la recta real, g no tiene extremos relativos.

c) h es continua en $\mathbb{R}$.

$h'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} > 0 \rightarrow h(x)$ creciente en $\mathbb{R} \rightarrow$ No tiene extremos relativos.

038 **Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:**

$$f(x) = x^4e^{-x}$$

Como consecuencia calcular los máximos y los mínimos locales de *f*.

(País Vasco. Julio 2005. Bloque C. Problema C)

f es continua en $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 4x^3e^{-x} - x^4e^{-x} = e^{-x}(4x^3 - x^4) = 0 \rightarrow 4x^3 - x^4 = 0 \rightarrow x = 0, x = 4$

- En $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(0, 4) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

Así, en $x = 0$ alcanza un mínimo y en $x = 4$, un máximo.

039 **Determina los máximos y mínimos de estas funciones utilizando la derivada segunda.**

a) $y = x^3 - 24x - 6$ c) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$ e) $y = \ln(x^2 + 1)$

b) $y = 8x + 6x^2 - x^4$ d) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$ f) $y = (x^2 + 4)e^x$

a) $y' = 3x^2 - 24 = 0 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

$y'' = 6x$

$y''\left(\sqrt{8}\right) > 0 \rightarrow$ En $x = \sqrt{8}$ alcanza un mínimo.

$y''\left(-\sqrt{8}\right) < 0 \rightarrow$ En $x = -\sqrt{8}$ alcanza un máximo.

b) $y' = 8 + 12x - 4x^3 = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$

$y'' = 12 - 12x^2$

$y''(2) < 0 \rightarrow$ En $x = 2$ alcanza un máximo.

$y''(-1) = 0$

$y'''(x) = -24x \rightarrow y'''(-1) \neq 0 \rightarrow$ En $x = 0$ alcanza un punto de inflexión.

c) $y' = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$y'' = \dfrac{-4x^3 + 12x}{(x^2 + 1)^3}$

$y''(1) > 0 \rightarrow$ En $x = 1$ alcanza un mínimo.

$y''(-1) < 0 \rightarrow$ En $x = -1$ alcanza un máximo.

d) $y' = \dfrac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 2$

$y'' = \dfrac{8}{x^3}$

$y''(-2) < 0 \rightarrow$ En $x = -2$ alcanza un máximo.

$y''(2) > 0 \rightarrow$ En $x = 2$ alcanza un mínimo.

e) $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0$

$y'' = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow y''(0) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = 0$ alcanza un mínimo.

f) $y' = (x^2 + 2x + 4)e^x \neq 0 \rightarrow$ No tiene extremos relativos.

040 **Dada $g(x) = ax^4 + bx + c$, calcula los valores de a, b y c para que $g(x)$ tenga en el punto $(1, -1)$ un mínimo relativo y la recta tangente a la gráfica de $g(x)$, en $x = 0$, sea paralela a la recta $y = 4x$.**

(Galicia. Junio 2007. Bloque 3. Opción 1)

$g'(x) = 4ax^3 + b$

$(1, -1)$ pertenece a la gráfica $\rightarrow g(1) = -1 \rightarrow a + b + c = -1$

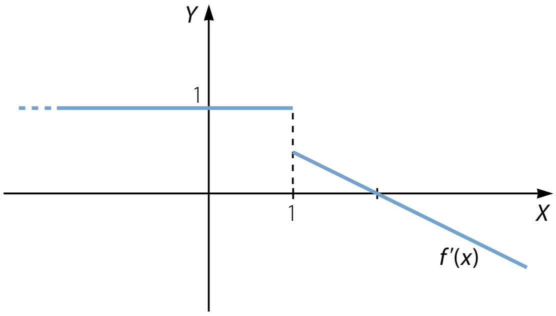
$(1, -1)$ es un mínimo $\rightarrow g'(1) = 4a + b = 0$

Además, $g'(0) = 4 \rightarrow b = 4$ por ser la gráfica de $g(x)$ en $x = 0$ paralela a la recta $y = 4x$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} a + b + c = -1 \\ 4a + b = 0 \\ b = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -4 \end{array}\right.$

041 La función derivada de cierta función continua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función definida a trozos formada por las semirrectas del dibujo.

a) Diga si $f(x)$ es derivable en todos los puntos de $\mathbb{R}$ y por qué.
b) Estudie el crecimiento y el decrecimiento de $f(x)$.
c) Encuentre si $f(x)$ tiene algún extremo relativo y, si es así, para qué valor de x y de qué tipo.
d) Sabiendo que $f(0) = 1$, calcule el valor de $f(1)$.



(Cataluña. Junio 2007. Cuestión 2)

a) No es derivable en $x = 1$ ya que las derivadas laterales son diferentes.
b) f es creciente en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$ ya que la derivada es positiva. Es decreciente en $(2, +\infty)$ pues, la derivada es negativa.
c) En $x = 2$ la función tiene un máximo ya que la derivada se anula y la función pasa de ser creciente a ser decreciente.
d) En $(-\infty, 1)$ la derivada vale 1, así la función será de la forma $f(x) = x + k$ con k constante.
$f(0) = 1 \to k = 1$. Como la función es continua, $f(1) = 1 + 1 = 2$.

042 Se considera la función:

$$f(x) = ae^{x^2+bx+c} \qquad a > 0$$

Calcula los parámetros a, b y c sabiendo que la función tiene un mínimo relativo en el punto $(1, a)$ y $f(0) = 1$.

(Baleares. Junio 2006. Opción B. Cuestión 1)

$f(x) = ae^{x^2+bx+c}$
$f'(x) = (2x + b)ae^{x^2+bx+c}$
$(1, a)$ es un mínimo $\to f(1) = a$ y $f'(1) = 0$.
Así, $ae^{1+b+c} = a \to e^{1+b+c} = 1 \to e^{1+b+c} = e^0 \to 1 + b + c = 0 \to b + c = -1$
$(2 + b)ae^{1+b+c} = 0 \to 2 + b = 0 \to b = -2$, así sustituyendo en la condición de arriba tenemos que $c = 1$.

Por otra parte, $f(0) = 1 \to ae^c = 1 \to e^c = \frac{1}{a} \to e = \frac{1}{a} \to a = \frac{1}{e}$

Así, $a = \frac{1}{e}$, $b = -2$, $c = 1$.

043 Sea $f(x) = x^2 + mx$ (donde m es un parámetro real). Hallar el valor del parámetro m para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = -\frac{3}{4}$.

(C. Valenciana. Septiembre 2004. Ejercicio A. Problema 3)

$f'(x) = 2x + m$. Como f tiene un mínimo en $x = \frac{-3}{4}$ se cumple que:

$$f'\left(\frac{-3}{4}\right) = 0 \to \frac{-3}{2} + m = 0 \to m = \frac{3}{2}$$

044 **Comprueba que la derivada en el punto $x = -1$ de la función $f(x) = (x+1)^3$ es nula y, sin embargo, no tiene un extremo relativo.**
¿Contradice esto algún teorema?

$f'(x) = 3(x+1)^2 \to f'(-1) = 0$, sin embargo, $f'(x) > 0$ para todo valor real de x, por tanto, f es siempre creciente y no puede tener ningún extremo relativo en $x = -1$.

Esto no contradice el teorema: «Si una función es derivable en un punto y tiene en él un extremo, entonces la derivada es cero», ya que el recíproco no tiene por qué ser cierto, es decir, si la derivada en un punto es cero, no tenemos garantizado que la función en ese punto tenga un extremo.

045 **Comprueba que la siguiente función tiene un extremo relativo en el punto $x = 0$ y su derivada en ese punto no es nula.**
¿Contradice esto algún teorema?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Como f es positiva en $\mathbb{R} - \{0\}$ y vale -1 en $x = 0 \to$ En este punto alcanza un mínimo. Por otra parte, f no es derivable en $x = 0$.

Esto no contradice el teorema enunciado en el ejercicio anterior ya que al no ser la función derivable, no podemos aplicar el teorema.

046 **Demuestra que la gráfica de la función $y = 2x^3 + x^2 + x - 1$ corta al eje de abscisas en un solo punto.**

$f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ es continua en $\mathbb{R}$.

$f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 3 > 0 \to$ Por el teorema de Bolzano, la función corta al eje de abscisas en un punto de este intervalo.

f es derivable en $(0, 1)$ con $f'(x) = 6x^2 + 2x + 1$ y además $f'(x) > 0$ para todo x real por lo que f es siempre creciente.

Así, el único punto de corte con el eje de abscisas está en el intervalo $(0, 1)$.

047 **Determina los intervalos de concavidad y de convexidad, así como los puntos de inflexión, de las siguientes funciones.**

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

b) $y = x^4 + 2x^3 - 3$

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^3 - 8}{x^2}$

e) $y = \sqrt{9 + x^2}$

f) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

a) La función es continua en $\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x + 2 = 0$

$y'' = 6x - 6 = 0 \to x = 1$

- En $(-\infty, 1) \to y'' < 0 \to$ Función convexa
- En $(1, +\infty) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava

Así, en $x = 1$ alcanza un punto de inflexión.

b) La función es continua en $\mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 + 6x^2$

$y'' = 12x^2 + 12x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -1$

- En $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(-1, 0) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

Así, en $x = -1$ y $x = 0$ alcanza puntos de inflexión.

c) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$y' = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3} \neq 0 \rightarrow \text{No tiene puntos de inflexión.}$$

Así, los intervalos en los que hay que estudiar la curvatura son:
$(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(-1, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

d) La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$y' = \frac{x^3 + 16}{x^3}$$

$$y'' = \frac{-48}{x^4} < 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \text{Función convexa}$$

No tiene puntos de inflexión.

e) La función está definida en $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}}$$

$$y'' = \frac{9}{(9 + x^2)\sqrt{9 + x^2}} > 0 \text{ en } \mathbb{R} \rightarrow \text{Función cóncava}$$

No tiene puntos de inflexión.

f) Esta función está definida en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$y'' = \frac{-4}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}} < 0 \text{ en todo su dominio} \rightarrow \text{Función convexa}$$

No tiene puntos de inflexión.

048 **Estudia en qué intervalos estas funciones son cóncavas y en cuáles son convexas. Calcula también los puntos de inflexión que tenga cada una de ellas.**

a) $y = (x - 3)e^x$

b) $y = \dfrac{\ln x}{2x}$

c) $y = \cos x - \cos 2x$

d) $y = \ln (x^2 - x)$

e) $y = \dfrac{x^2}{2^x}$

a) La función es continua en $\mathbb{R}$.

$y' = (x-2)e^x$ $\qquad y'' = (x-1)e^x = 0 \rightarrow x = 1$

- En $(-\infty, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 1$ alcanza un punto de inflexión.

b) La función es continua en $(0, +\infty)$.

$$y' = \frac{1-\ln x}{2x^2}$$

$$y'' = \frac{2\ln x - 3}{2x^3} = 0 \rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \rightarrow x = \sqrt{e^3}$$

- En $\left(0, \sqrt{e^3}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $\left(\sqrt{e^3}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = \sqrt{e^3}$ alcanza un punto de inflexión.

c) La función es continua en $\mathbb{R}$.

$y' = -sen\, x + 2\, sen\, 2x$

$$y'' = -cos\, x + 4\, cos\, 2x = -cos\, x + 4(cos^2 x - sen^2 x) =$$
$$= -cos\, x + 4(cos^2 x - 1 + cos^2 x) = 8\, cos^2 x - cos\, x - 4 = 0$$

Las soluciones aproximadas son:

$cos\, x = 0{,}77 \rightarrow x = 0{,}69 + 2k\pi;\ x = 5{,}59 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{R}$

$cos\, x = -0{,}65 \rightarrow x = 2{,}28 + 2k\pi;\ x = 3{,}79 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{R}$

Estudiamos la concavidad en $(0, 2\pi)$ ya que la función es periódica:

- En $(0;\ 0{,}69) \cup (2{,}28;\ 3{,}79) \cup (5{,}59;\ 2\pi) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(0{,}69;\ 2{,}28) \cup (3{,}79;\ 5{,}59) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

Por tanto, todos los puntos que anulan y'' son puntos de inflexión.

d) La función está definida en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

$$y' = \frac{2x-1}{x^2-x}$$

$$y'' = \frac{-2x^2+2x-1}{(x^2-x)^2} < 0 \text{ en todo su dominio} \rightarrow \text{Función convexa}$$

No tiene puntos de inflexión.

e) La función es continua en $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{2x - x^2 \ln 2}{2^x}$$

$$y'' = \frac{2 - 4x\ln 2 + x^2 \ln^2 2}{2^x} = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{\ln 2}$$

- En $\left(-\infty, \dfrac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}\right) \cup \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}, \dfrac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}$ y $x = \dfrac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}$ alcanza dos puntos de inflexión.

049 **Comprueba que la función $f(x) = x^4$ tiene nula la derivada segunda en el punto $x = 0$ y, sin embargo, no tiene un punto de inflexión. ¿Contradice esto algún teorema?**

$f(x) = x^4 \quad f'(x) = 4x^3 \quad f''(x) = 12x^2 \to f''(0) = 0$

En $x = 0$ no se alcanza un punto de inflexión porque $f''(x) > 0$ para todo valor de x real. Por tanto, f es siempre cóncava.

Esto no contradice el teorema: «Si una función es derivable en un punto y tiene en él un punto de inflexión, entonces la segunda derivada es cero», ya que el recíproco no tiene por qué cumplirse, es decir, si la derivada segunda en un punto es cero, no tenemos garantizado que en él haya un punto de inflexión.

050 **Determina los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que la función:**

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en $x = -1$ y su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3.

(Castilla-La Mancha. Junio 2006. Bloque 1. Pregunta A)

Si pasa por el origen de coordenadas: $f(0) = 0 \to c = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Como la recta tangente en $x = 1$ tiene pendiente 3, se cumple que:

$f'(1) = 3 \to 3 + 2a + b = 3 \to 2a + b = 0$

$f''(x) = 6x + 2a$

Como tiene un punto de inflexión en $x = -1$ se cumple que:

$f''(-1) = 0 \to -6 + 2a = 0 \to a = 3$

Sustituyendo en la condición anterior: $b = -6$

051 **Calcula para $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad.**

(Galicia. Junio 2006. Bloque 3. Opción 1)

$f'(x) = e^{-x} - (x + 1)e^{-x} = -xe^{-x} = 0 \to x = 0$

Como f es continua en $\mathbb{R}$, estudiamos el crecimiento en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$.

- En $(-\infty, 0) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente
- En $(0, +\infty) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

Así, en $x = 0$ alcanza un máximo, $(0, 1)$.

$f''(x) = (x - 1)e^{-x} = 0 \to x = 1$

- En $(-\infty, 1) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa
- En $(1, +\infty) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava

Así, en $x = 1$ alcanza un punto de inflexión, cuyas coordenadas son $\left(1, \dfrac{2}{e}\right)$.

052 **Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:**

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

(Madrid. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 4)

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}$$

$f''(-1) > 0 \rightarrow$ En $x = -1$ alcanza un mínimo.

$f''(1) < 0 \rightarrow$ En $x = 1$ alcanza un máximo.

$$f'''(x) = \frac{-6x^4 + 36x^2 - 6}{(x^2 + 1)^4}$$

$f'''\left(-\sqrt{3}\right) \neq 0$ y $f'''\left(\sqrt{3}\right) \neq 0 \rightarrow$ En $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$ alcanza dos puntos de inflexión.

$f'''(0) \neq 0 \rightarrow$ En $x = 0$ alcanza otro punto de inflexión.

053 **Demuestra que la curva de ecuación $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no tiene ningún punto de inflexión.**

(Baleares. Junio 2006. Opción A. Cuestión 3)

$y' = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$y'' = 12x^2 - 6x + 2 = 0$ no tiene soluciones reales $\rightarrow$ No tiene puntos de inflexión.

054 **Dada la función $f(x) = 9x + 6x^2 - x^4$, calcula los puntos de inflexión de $f(x)$.**

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 1. Pregunta B)

$y' = 9 + 12x - 4x^3$

$y'' = 12 - 12x^2 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$

$y''' = -24x \rightarrow y'''(-1) \neq 0,\ y'''(1) \neq 0 \rightarrow$ En $x = -1$ y $x = 1$ alcanza dos puntos de inflexión. Sus coordenadas son: $(-1,\ -4)$ y $(1, 14)$.

055 **Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:**

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$$

Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 1)

$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$

$f''(x) = 12x + 24 = 0 \rightarrow x = -2$

$f'''(x) = 12 \neq 0 \rightarrow$ En $x = -2$ alcanza un punto de inflexión.

Como la recta tangente a la gráfica de f en este punto tiene pendiente 2:
$f'(-2) = 2 \rightarrow 24 - 48 + a = 2 \rightarrow a = 26$.

El punto de inflexión pertenece a la curva y a la recta tangente por lo que:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = -16 + 48 - 2a + b = -20 + b \\ y = -4 + 3 = -1 \end{array}\right\} \rightarrow -20 + b = -1 \rightarrow b = 19$$

056 Calcule los valores del parámetro a, $a \neq 0$, que hacen que las tangentes a la curva de ecuación $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1.512$ en los puntos de inflexión sean perpendiculares.

(Cataluña. Junio 2007. Cuestión 3)

$y' = 4ax^3 + 6ax^2 - a$

$y'' = 12ax^2 + 12ax = 0 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -1$

Como las tangentes en estos puntos deben ser perpendiculares, las pendientes deben cumplir:

$$y'(0) = \frac{-1}{y'(-1)} \rightarrow -a = \frac{-1}{-4a + 6a - a} \rightarrow -a = \frac{-1}{a} \rightarrow a = \pm 1$$

057 Se considera la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son parámetros reales.

a) Averiguar los valores de a y b para los que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = 4$ son paralelas al eje X.

b) Con los valores de a y b hallados anteriormente, obtener el valor de c para el que se cumple que el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ está en el eje X.

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 3. Problema 2)

a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Una recta paralela al eje X tiene pendiente nula, por lo que debe cumplirse:

$f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0$

$f'(4) = 0 \rightarrow 48 + 8a + b = 0$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por estas dos condiciones obtenemos:

$a = -9,\ b = 24 \rightarrow f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + c$

b) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$f''(x) = 6x - 18 = 0 \rightarrow x = 3$

$f'''(x) = 6 \neq 0 \rightarrow$ En $x = 3$ alcanza un punto de inflexión.

Para que el punto de inflexión $x = 3$ de la gráfica de f esté en el eje X, se debe verificar que: $f(3) = 0 \rightarrow 27 - 81 + 72 + c = 0 \rightarrow c = -18$

058 Demuestra que la curva $f(x) = x - 2\cos x$ tiene un punto de inflexión en el interior del intervalo $[0, \pi]$ y halla la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto.

Haz un dibujo en un entorno del punto hallado.

(Baleares. Junio 2007. Opción A. Cuestión 3)

$f'(x) = 1 + 2\,\text{sen}\,x$

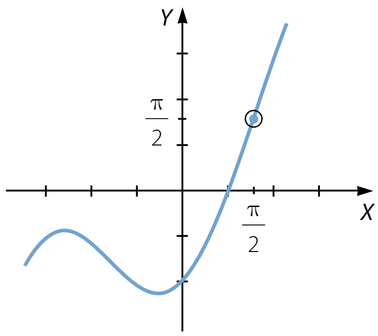
$f''(x) = 2\cos x = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ en $[0, \pi]$

$f'''(x) = -2\ sen\ x \rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \rightarrow$ En $x = \frac{\pi}{2}$ alcanza un punto de inflexión.

Ecuación de la recta tangente en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}; f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \rightarrow y - \frac{\pi}{2} = 3\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y = 3x - \pi$$

Gráfico en un entorno del punto:



059 **Hallar una función polinómica de tercer grado tal que tenga un extremo relativo en (1, 1) y un punto de inflexión en (0, 3). ¿Es (1, 1) el único extremo de la función? Determinar los máximos y mínimos relativos de *f*.**

(Canarias. Junio 2007. Opción A. Cuestión 1)

La función que buscamos tiene la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Como los puntos (1, 1) y (0, 3) pertenecen a la función:
$f(1) = 1 \rightarrow a + b + c + d = 1$

$f(0) = 3 \rightarrow d = 3$

Hay un extremo relativo en (1, 1), por tanto: $f'(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow 3a + 2b + c = 0$

Como hay un punto de inflexión en (0, 3), $f''(0) = 0$.

$f''(x) = 6ax + 2b \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c + d = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ d = 3 \\ b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 3 \end{array}\right.$$

Así, tenemos que: $f(x) = x^3 - 3x + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = -1, x = 1$

Por tanto, (1, 1) no es el único extremo.

$f''(x) = 6x$

$f''(1) > 0 \qquad f''(-1) < 0$

Así, en (1, 1) alcanza un mínimo, y en (−1, 5), un máximo.

060 **Queremos añadir a una casa una nueva habitación rectangular de 12 m^2 de superficie. ¿Qué longitud debemos dar a sus paredes para que el perímetro sea el menor posible y minimizar la cantidad de ladrillos utilizados en esa ampliación?**

Si x e y son las dimensiones tenemos que: $xy = 12 \rightarrow y = \dfrac{12}{x}$

Como la nueva habitación va a ser un añadido de la casa, una de sus paredes debe coincidir, de esa forma no necesitamos ningún ladrillo, puesto que ya está construida.

Así, debemos minimizar: $P(x, y) = 2x + y \rightarrow P(x) = 2x + \dfrac{12}{x}$

$P'(x) = 2 - \dfrac{12}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 12}{x^2} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$

Como una longitud no puede ser negativa, tenemos que: $x = \sqrt{6} \rightarrow y = 2\sqrt{6}$

Comprobamos que en este punto se alcanza un mínimo:

$P''(x) = \dfrac{24}{x^3} \rightarrow P''\left(\sqrt{6}\right) > 0 \rightarrow$ Se trata de un mínimo.

Las dimensiones de la habitación son $x = \sqrt{6}$ m e $y = 2\sqrt{6}$ m.

061 **Se desea delimitar una parcela rectangular, pegada a la pared de una nave. Si se dispone de 200 m de tela metálica para cercarla, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela que tiene la mayor superficie?**

Llamamos x e y a las dimensiones de la parcela. Como va a estar pegada a la pared de la nave, se va a verificar que: $2x + y = 200 \rightarrow y = 200 - 2x$

Se trata maximizar la función superficie dada por:

$S(x) = xy \rightarrow S(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$

$S'(x) = 200 - 4x = 0 \rightarrow x = 50$

$S''(x) = -4 < 0$ en $\mathbb{R} \rightarrow$ En $x = 50$ alcanza un máximo.

Las dimensiones de la parcela son $x = 50$ m e $y = 100$ m.

062 **¿Qué dimensiones debe tener un paragüero con forma de prisma cuadrado de 20 dm^3 de volumen, para que en su fabricación se gaste la menor cantidad posible de material?**

Llamamos x a la arista de la base e y a la altura del prisma cuadrangular.

Entonces, se debe cumplir que: $x^2y = 20 \rightarrow y = \dfrac{20}{x^2}$

Como un paragüero no tiene base superior, tenemos que minimizar la función superficie que viene dada por:

$S(x, y) = x^2 + 4xy \rightarrow S(x) = x^2 + 4x\dfrac{20}{x^2} = x^2 + \dfrac{80}{x}$

$S'(x) = 2x - \dfrac{80}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 80}{x^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{40}$

$S''(x) = 2 + \dfrac{160}{x^3} \rightarrow S''\left(\sqrt[3]{40}\right) > 0 \rightarrow$ Se alcanza un mínimo.

Las dimensiones del paragüero son:

Arista de la base $x = \sqrt[3]{40}$ dm Altura $y = \dfrac{20}{\left(\sqrt[3]{40}\right)^2} = \dfrac{20}{\sqrt[3]{1.600}}$ dm

063 **¿Todos los cilindros con igual volumen tienen la misma superficie total? ¿Cuál tiene la menor superficie?**

Sean r y h las dimensiones del radio de la base y de la altura del cilindro.

Si $V(r, h)$ es el volumen:

$$V(r, h) = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{V(r, h)}{\pi r^2}$$

La superficie del cilindro que debemos minimizar viene dada por:

$$S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V(r, h)}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V(r, h)}{r}$$

Como el volumen siempre es el mismo, derivamos respecto de r:

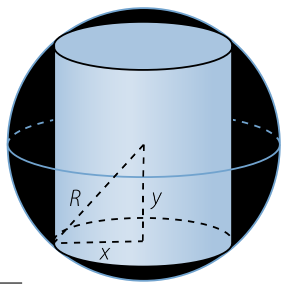
$$S'(r, h) = 4\pi r - \frac{2V(r, h)}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V(r, h)}{r^2} = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V(r, h)}{2\pi}}$$

$$S''(r, h) = 4\pi + \frac{4V(r, h)}{r^3} \rightarrow S''\left(\sqrt[3]{\frac{V(r, h)}{2\pi}}\right) > 0 \rightarrow \text{Se alcanza un mínimo.}$$

Así, no todos los cilindros con el mismo volumen tienen la misma superficie total y el de menor superficie tiene estas dimensiones:

$$r = \sqrt[3]{\frac{V(r, h)}{2\pi}} \qquad h = \sqrt[3]{\frac{4V(r, h)}{\pi}}$$

064 **De todos los cilindros que pueden inscribirse en una esfera de 9 cm de radio, halla la altura y el radio del que tiene mayor volumen.**



Llamamos x al radio de la base del cilindro e y a la mitad de su altura, así, $R = 9$.

Se verifica que:

$x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 81 \rightarrow y = \sqrt{81^2 - x^2}$

La función que debemos maximizar es:

$V(x, y) = \pi x^2 h$ donde $h = 2y$.

$$V(x, y) = 2\pi x^2 y \rightarrow V(x) = 2\pi x^2 \sqrt{81 - x^2} = 2\pi \sqrt{81x^4 - x^6}$$

$$V'(x) = \frac{2\pi(324x^3 - 6x^5)}{2\sqrt{81x^4 - x^6}} = \frac{\pi(324x^3 - 6x^5)}{\sqrt{81x^4 - x^6}} = 0 \rightarrow x = 0, x = \sqrt{54}$$

- En $\left(0, \sqrt{54}\right) \rightarrow V'(x) > 0 \rightarrow V(x)$ creciente
- En $\left(\sqrt{54}, +\infty\right) \rightarrow V'(x) < 0 \rightarrow V(x)$ decreciente

Por tanto, en $x = \sqrt{54}$ alcanza un máximo.

Así, la altura y el radio del cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de radio 9 cm es:

Radio: $\sqrt{54}$ cm

Altura: $2\sqrt{81 - 54} = 2\sqrt{27}$ cm

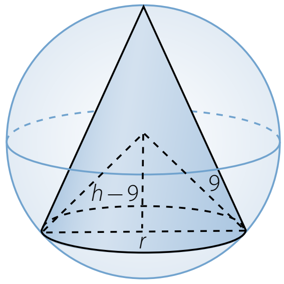
065 **De todos los conos que pueden inscribirse en una esfera de 9 cm de radio, halla la altura y el radio del que tiene mayor volumen.**

Llamamos r y h al radio y la altura del cono.

Se cumple que:

$r^2 + (h - 9)^2 = 81$

$r^2 = 81 - (h - 9)^2 = -h^2 + 18h$



La función que debemos optimizar es:

$$V(r, h) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h \rightarrow V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi(-h^2 + 18h)h = \frac{1}{3} \cdot \pi(-h^3 + 18h^2)$$

$$V'(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi(-3h^2 + 36h) = \pi(-h^2 + 12h) = 0 \rightarrow h = 0,\ h = 12$$

$V''(h) = \pi(-2h + 12)$

$V''(0) > 0 \rightarrow$ Para $h = 0$ alcanza un mínimo.

$V''(12) < 0 \rightarrow$ Para $h = 12$ alcanza un máximo.

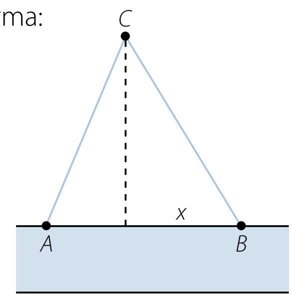
Así, el cono que tiene mayor volumen es el que tiene altura 12 cm y radio de la base $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ cm.

066 **Se quiere organizar una competición deportiva que consiste en nadar desde un lugar *A*, situado en la orilla de un río, hasta otro lugar *B* situado en la misma orilla; allí se sale del río y corriendo hay que llegar hasta otro lugar *C*, desde el cual se regresa de nuevo a *B*, donde se acaba la competición. Se supone que todos los trayectos son rectilíneos.**

La distancia de *A* a *B* mide 0,2 km y la de *C* al río mide 0,5 km.

Determina a qué distancia de *A* hay que situar el punto *C* para que el recorrido completo sea el menor posible.

Podemos expresar la distancia recorrida de la siguiente forma:



$E(x) = 0{,}2 + 2\sqrt{0{,}5^2 + x^2}$

$E'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{0{,}5^2 + x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow E'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow E'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente

Así, en $x = 0$ alcanza un mínimo.

Por tanto, para que el trayecto sea lo mínimo posible, $x = 0$.

Así, la distancia de C a A es: $d = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{0{,}04 + 0{,}25} = 0{,}54$ km

067 **Descomponer el número 8 en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo sea mínima.**

(Aragón. Junio 2006. Opción B. Cuestión 3)

Si llamamos x y $8 - x$ a los sumandos debemos minimizar esta función:

$f(x) = x^3 + (8 - x)^2$

$f'(x) = 3x^2 - 2(8 - x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0 \rightarrow x = 2$

$f''(x) = 6x + 2 \rightarrow f''(2) = 14 > 0 \rightarrow$ En $x = 2$ alcanza un mínimo.

Así, los dos sumandos que buscamos son 2 y 6.

068 **Con un trozo de alambre de 12 cm de longitud se pueden formar distintos rectángulos. ¿Cuál de ellos tiene la superficie máxima?**

Sean x e y las dimensiones del rectángulo de modo que:
$2x + 2y = 12 \rightarrow x + y = 6$

Así, la función que debemos maximizar es: $S(x) = x(6 - x) = 6x - x^2$

$S'(x) = 6 - 2x = 0 \rightarrow x = 3$

$S''(x) = -2 < 0 \rightarrow$ En $x = 3$ alcanza un máximo.

Por tanto, las dimensiones del rectángulo de superficie máxima son 3 y 3, es decir, un cuadrado de lado 3 cm.

069 **Se desea fabricar con hoja de lata una papelera cilíndrica, sin tapa, de 10 dm^3 de capacidad. ¿Qué dimensiones deberá tener para que en su fabricación se utilice la menor cantidad de hoja de lata?**

Si r y h son el radio y la altura del cilindro: $\pi r^2 h = 10 \rightarrow h = \dfrac{10}{\pi r^2}$

La función a optimizar es: $S(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{10}{\pi r^2} = \pi r^2 + \dfrac{20}{r}$

$S'(r) = 2\pi r - \dfrac{20}{r^2} = 0 \rightarrow 2\pi r^3 - 20 = 0 \rightarrow \pi r^3 - 10 = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$

$S''(r) = 2\pi + \dfrac{40}{r^3} \rightarrow S''\left(\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}\right) > 0 \rightarrow$ En $r = \sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$ alcanza un mínimo.

Por lo tanto, para utilizar la menor cantidad de hoja de lata, las dimensiones de la papelera cilíndrica serán $r = \sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$ dm y $h = \sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$ dm.

070 **¿En qué punto de la parábola $y = 4 - x^2$ la tangente forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima?**

La función del enunciado representa una parábola con vértice en el eje Y, por lo que habrá dos soluciones simétricas con respecto a este eje, una en el primer cuadrante y otra en el segundo. Sea $(a, 4 - a^2)$ un punto de la parábola del primer cuadrante.

$y' = -2x \rightarrow y'(a) = -2a \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto $(a,\ 4 - a^2)$ es: $y - (4 - a^2) = -2a(x - a) \rightarrow y = -2ax + a^2 + 4$

Los puntos de intersección de esta recta con los ejes son: $(0,\ a^2 + 4)$ y $\left(\dfrac{a^2+4}{2a},\ 0\right)$.

El área del triángulo que se forma con estos puntos y el punto (0, 0) es:

$A(a) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^2+4}{2a}(a^2+4) = \dfrac{(a^2+4)^2}{4a}$ que es la función que debemos optimizar

$$A'(a) = \frac{16a^2(a^2+4) - 4(a^2+4)^2}{16a^2} = \frac{3a^4 + 8a^2 - 16}{4a^2} = 0 \rightarrow a = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ es la solución del primer cuadrante.

$$A''(a) = \frac{4a^2(12a^3 + 16a) - 8a(3a^4 + 8a^2 - 16)}{16a^4} = \frac{3a^4 + 16}{2a^3} \rightarrow A''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) > 0$$

En $\left(\dfrac{-2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)$ la tangente forma con los ejes un triángulo de área mínima.

071 **Determina el punto de la parábola $y = x^2$ que está más próximo al punto (3, 0).**

Sea (x, y) el punto de la parábola que buscamos. La distancia de este punto al punto (3, 0) viene dada por: $d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}$

La función a optimizar es: $D = d^2 = (x-3)^2 + y^2 \rightarrow D(x) = (x-3)^2 + x^4$

$D'(x) = 2(x-3) + 4x^3 = 0 \rightarrow x = 1$ es la única solución real.

$D''(x) = 2 + 12x^2 \rightarrow D''(1) > 0 \rightarrow$ En $x = 1$ alcanza un mínimo.

Así, el punto buscado es (1, 1).

072 **Entre todos los rectángulos de 3 m^2 de área, halla las dimensiones del que tenga mínimo el producto de las diagonales.**

Sean x e y las dimensiones del rectángulo de modo que: $xy = 3$

La función a optimizar viene dada por:

$$P = d \cdot d = d^2 = x^2 + y^2 \rightarrow P(x) = x^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{9}{x^2}$$

$$P'(x) = 2x - \frac{18}{x^3} = 0 \rightarrow 2x^4 - 18 = 0 \rightarrow x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$$

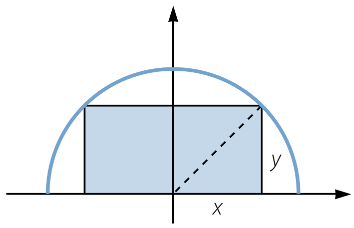
La solución válida es: $x = \sqrt{3}$

$P''(x) = 2 + \dfrac{54}{x^4} \rightarrow P''(\sqrt{3}) > 0 \rightarrow$ En este punto alcanza un mínimo.

Las dimensiones son $x = \sqrt{3}$ e $y = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, es decir, un cuadrado de lado $\sqrt{3}$ metros.

073 **Determina las dimensiones de los lados de un rectángulo de área máxima que está inscrito en una semicircunferencia de 5 cm de radio, teniendo uno de los lados sobre el diámetro de ella.**

Sea x la mitad de la base del rectángulo e y su altura. Se cumple que:



$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$

La función a optimizar es:

$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2} = 2\sqrt{25x^2 - x^4}$

$$A'(x) = \frac{50x - 4x^3}{\sqrt{25x^2 - x^4}} = 0 \rightarrow 50x - 4x^3 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

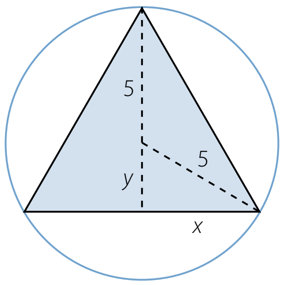
En $\left(0, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow A'(x) > 0$ y en $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \rightarrow A'(x) < 0$

Por tanto, en $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ alcanza un máximo.

Así, las dimensiones del rectángulo de área máxima son: $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ e $y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, es decir, se trata de un cuadrado.

074 **De todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de 5 cm de radio, halla las dimensiones del que tiene mayor área.**

Llamamos x a la mitad de la base del triángulo, $y + 5$ a la altura. Se verifica que:



$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow x = \sqrt{25 - y^2}$

La función que hay que optimizar viene dada por:

$$A(y) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{25 - y^2}\,(y + 5) = (y + 5)\sqrt{25 - y^2}$$

$$A'(y) = \sqrt{25 - y^2} + (y + 5) \cdot \frac{-2y}{2\sqrt{25 - y^2}} = \frac{25 - y^2 - y^2 - 5y}{\sqrt{25 - y^2}} = 0$$

$$\rightarrow -2y^2 - 5y + 25 = 0 \rightarrow y = -5,\ y = \frac{5}{2}$$

La solución válida es la positiva.

- En $\left(-5, \frac{5}{2}\right) \rightarrow A'(y) > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \rightarrow A'(y) < 0 \rightarrow$ Función decreciente

Así, en $y = \frac{5}{2}$ alcanza un máximo.

Por tanto, las dimensiones del triángulo de mayor área son:

Base: $2x = 2 \cdot \frac{\sqrt{75}}{2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Altura: $y + 5 = \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$

075 **Considera la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esta función que tiene máxima pendiente en el intervalo [1, e].

Como necesitamos que la pendiente sea máxima, la función que tenemos que optimizar es la función derivada primera: $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}$

$f''(x) = \frac{2-x}{x^3} = 0 \rightarrow x = 2$

$f'''(x) = \frac{2x-6}{x^4} \rightarrow f'''(2) < 0 \rightarrow$ En $x = 2$ alcanza un máximo.

$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en el punto $\left(2, \frac{1}{2} + \ln 2\right)$ con pendiente $f'(2) = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ es:

$$y - \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right) = \frac{1}{4}(x-2)$$

076 **Halla las dimensiones de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar una vuelta completa alrededor de un lado, genera un cilindro de volumen máximo.**

Tenemos que optimizar la función $V(r, h) = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h es la altura del cilindro. La cartulina rectangular, por las condiciones del enunciado, tendrá dimensiones h, r, por lo que se cumplirá que:

$2h + 2r = 60 \rightarrow h + r = 30 \rightarrow h = 30 - r$

Así, $V(r) = \pi r^2(30 - r) = 30\pi r^2 - \pi r^3$

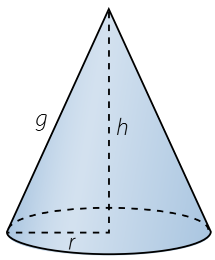
$V'(r) = 60\pi r - 3\pi r^2 = 0 \rightarrow r = 0, r = 20$

La solución válida es $r = 20$.

$V''(r) = 60\pi - 6\pi r \rightarrow V''(20) < 0 \rightarrow$ En $r = 20$ alcanza un máximo.

Así, las dimensiones de la cartulina para conseguir el cilindro de volumen máximo son: $r = 20$ cm y $h = 10$ cm.

077 **El perímetro de un triángulo isósceles mide 10 m. Si gira alrededor de la altura correspondiente al lado desigual, engendra un cono. Calcula los lados del triángulo para que el volumen del cono sea máximo.**



Por el teorema de Pitágoras:

$r^2 + h^2 = g^2 \rightarrow h = \sqrt{g^2 - r^2}$

Como el perímetro del triángulo es 10 m, tenemos que:

$2g + 2r = 10 \rightarrow g + r = 5 \rightarrow g = 5 - r$

Así, sustituyendo en la expresión de la altura, tenemos:

$h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{(5-r)^2 - r^2} = \sqrt{25 + r^2 - 10r - r^2} = \sqrt{25 - 10r}$

La función a optimizar es:

$$V(r,\, h) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h \rightarrow V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \sqrt{25 - 10r} = \frac{\pi}{3}\sqrt{25r^4 - 10r^5}$$

$$V'(r) = \frac{\pi(100r^3 - 50r^4)}{6\sqrt{25r^4 - 10r^5}} = 0 \rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 2 \end{cases}$$

La solución válida es $r = 2$.

Así, las dimensiones del triángulo son:

Base: 4 m Lados: 3 m

078 **Determina un punto de la curva de ecuación $y = xe^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.**

(Andalucía. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 1)

$$y' = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

Como tenemos que maximizar la pendiente, se trata de maximizar la función derivada, por lo que volvemos a derivar:

$$y'' = e^{-x^2}(-2x)(1 - 2x^2) + e^{-x^2}(-4x) = e^{-x^2}(4x^3 - 6x) = 0 \rightarrow x = 0,\, x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y''' = e^{-x^2}(-8x^4 + 24x^2 - 6)$$

$$y'''(0) < 0 \qquad y'''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) > 0 \qquad y'''\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) > 0$$

La pendiente de la recta tangente será máxima en el punto (0, 0).

079 **Considérense las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = -e^{-x}$.**

Para cada recta r perpendicular al eje X, sean A y B los puntos de corte de dicha recta con las gráficas de f y g respectivamente. Determínese la recta r para la cual el segmento AB es de longitud mínima.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba A. Problema 2)

Sea A el punto de corte de la recta con la función $f(x) = e^x \rightarrow A(x,\, e^x)$

Sea B el punto de corte de la recta con la función $f(x) = -e^{-x} \rightarrow B(x,\, -e^{-x})$

La longitud del segmento que determinan estos dos puntos viene dada por la expresión:

$$l(x) = \sqrt{(x - x)^2 + (-e^{-x} - e^x)^2}$$

La función que debemos optimizar es:

$$L(x) = l^2(x) = (e^{-x} + e^x)$$

$$L'(x) = -e^{-x} + e^x = 0 \rightarrow \frac{-1}{e^x} + e^x = 0 \rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = \ln 1 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$L''(x) = e^{-x} + e^x \rightarrow L''(0) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = 0$ alcanza un mínimo.

Así, la longitud es mínima para $x = 0$.

080 **El coste del marco de una ventana rectangular es 12,50 € por metro lineal de los lados verticales y 8 € por metro lineal de los lados horizontales.**

a) Calcular razonadamente las dimensiones que debe tener el marco de una ventana de 1 m² de superficie para que resulte lo más económico posible.

b) Calcular, además, el coste de ese marco.

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio B. Problema 4)

a) Sea x metros la longitud de un lado vertical y sea y metros la longitud de un lado horizontal. Se cumple que: $xy = 1 \rightarrow y = \dfrac{1}{x}$

La función a optimizar es:

$$C(x, y) = 2 \cdot 12{,}50x + 2 \cdot 8y = 25x + 16y \rightarrow C(x) = 25x + \frac{16}{x}$$

$$C'(x) = 25 - \frac{16}{x^2} = 0 \rightarrow 25x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = 0{,}8$$

$$C''(x) = \frac{32}{x^3} \rightarrow C''(0{,}8) > 0 \rightarrow \text{Para } x = 0{,}8 \text{ alcanza un mínimo.}$$

Para que el coste sea lo más económico posible, la longitud del lado vertical debe ser de 0,8 metros y la longitud del lado horizontal debe ser de 1,25 metros.

b) El marco va a costar $25 \cdot 0{,}8 + 16 \cdot 1{,}25 = 20 + 20 = 40$ euros.

081 **De entre todos los triángulos rectángulos con hipotenusa 10 cm, calcula las longitudes de los catetos que corresponden al de área máxima.**

(Galicia. Junio 2006. Bloque 3. Opción 2)

Sean x e y las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo.

Se cumple que: $x^2 + y^2 = 10^2 \rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

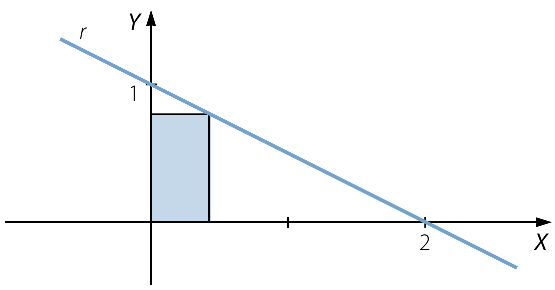
La función a optimizar es: $A(x) = \dfrac{1}{2} \cdot x\sqrt{100 - x^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{100x^2 - x^4}$

$$A'(x) = \frac{200x - 4x^3}{4\sqrt{100x^2 - x^4}} = 0 \rightarrow 50x - x^3 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \sqrt{50}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{En } \left(0, \sqrt{50}\right) \rightarrow A'(x) > 0 \\ \text{En } \left(\sqrt{50}, +\infty\right) \rightarrow A'(x) < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{En } x = \sqrt{50} \text{ alcanza un máximo.}$$

Así, los catetos del triángulo rectángulo de hipotenusa 10 cm y área máxima miden $x = \sqrt{50}$ e $y = \sqrt{50}$.

082 **De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación $\dfrac{x}{2} + y = 1$, determina el que tiene mayor área.**



(Andalucía. Año 2007. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 1)

$$\frac{x}{2} + y = 1 \rightarrow y = 1 - \frac{x}{2}$$

El rectángulo va a tener estas dimensiones: Ancho x Alto $1 - \frac{x}{2}$

La función a optimizar es: $A(x) = x\left(1 - \frac{x}{2}\right) = x - \frac{x^2}{2}$

$$A'(x) = 1 - \frac{2x}{2} = 1 - x = 0 \rightarrow x = 1$$

$A''(x) = -1 < 0 \rightarrow$ Para $x = 1$ alcanza un máximo.

Así, el rectángulo que tiene mayor área mide 1 de ancho y $\frac{1}{2}$ de alto.

083 **Queremos hacer un envase con tapa y forma de prisma regular con base cuadrada y cuya capacidad sea 10.000 cm^3. Sabiendo que cada cm^2 del material de la base sale un 50 % más caro que cada cm^2 del material empleado para el resto del prisma, halla las dimensiones del envase para que su precio sea el menor posible.**

(Cantabria. Junio 2007. Bloque 2. Opción B)

Sea x la arista de la base e y la altura del prisma regular. Se cumple que:

$$x^2y = 10.000 \rightarrow y = \frac{10.000}{x^2}$$

Como el área del prisma es $x^2 + 4xy + x^2 \rightarrow$ La función a optimizar es:

$$P(x, y) = 1{,}5x^2 + 4xy + x^2 \rightarrow P(x) = 1{,}5x^2 + 4x \cdot \frac{10.000}{x^2} + x^2 = 2{,}5x^2 + \frac{40.000}{x}$$

$$P'(x) = 5x - \frac{40.000}{x^2} = 0 \rightarrow 5x^3 - 40.000 = 0 \rightarrow x = 20$$

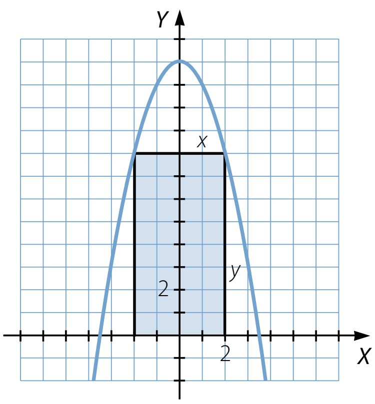
$P''(x) = 5 + \frac{80.000}{x^3} \rightarrow P''(20) > 0 \rightarrow$ En $x = 20$ alcanza un mínimo.

Las dimensiones del prisma, para que su precio sea el menor posible son:
Arista de la base 20 cm Altura 25 cm

084 **Halla las dimensiones de un cartel de área máxima con forma de rectángulo que tiene dos vértices sujetos a una estructura rígida parabólica de ecuación $y = 12 - x^2$, y los otros dos vértices están situados sobre el eje X.**

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 4. Problema 2)

La función representa una parábola cuyo vértice está en el eje Y, por lo que el rectángulo será simétrico con respecto a este eje. Así, las medidas serán, $2x$, $12 - x^2$ (tomamos x positivo para señalar la longitud y no la coordenada).



La función a optimizar es:

$$A(x) = 2x(-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x$$

$$A'(x) = -6x^2 + 24 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{24}{6} = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$A''(x) = -12x \rightarrow A''(2) < 0 \rightarrow$ Para $x = 2$ alcanza un máximo.

Así, las dimensiones del cártel de área máxima en forma de rectángulo son: 4 de ancho y 8 de alto.

085 Hallar, de entre los puntos de la parábola de ecuación $y = x^2 - 1$, los que se encuentran a distancia mínima del punto $A\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

(Castilla y León. Septiembre 2008. Prueba A. Problema 2)

Sea (x, y) el punto de la parábola que buscamos. La distancia de este punto al punto $A\left(-2, \frac{-1}{2}\right)$ viene dada por la expresión:

$$d(x, y) = \sqrt{(x+2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2}\right)^2}$$

La función a optimizar es: $D(x,y) = d^2(x,y) \rightarrow D(x) = (x+2)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$

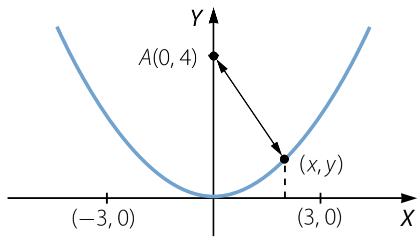
$D'(x) = 2(x+2) + 2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)2x = 4x^3 + 4 = 0 \rightarrow x = -1$

$D''(x) = 12x^2 \rightarrow D''(-1) > 0 \rightarrow$ En $x = -1$ alcanza un mínimo.

Así, el punto de la parábola que se encuentra a distancia mínima del punto A es $(-1, 0)$.

086 Un río describe la curva $y = \frac{1}{4}x^2$ con $x \in [-3, 3]$.

En el punto $A(0, 4)$ hay un pueblo.



a) Expresa la función distancia entre un punto cualquiera del río y el pueblo en función de la abscisa x.

b) ¿Cuáles son los puntos de este tramo del río que están más alejados y más cercanos al pueblo? (Sugerencia: estudia los extremos del cuadrado de la función hallada en el apartado anterior).

c) ¿Hay algún punto del río que esté a una distancia menor que 2 del pueblo?

(Asturias. Junio 2007. Bloque 6)

a) $d(x, y) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} \rightarrow d(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2} = \sqrt{\frac{x^4}{16} - x^2 + 16}$

b) $D(x, y) = d^2(x, y) \rightarrow D(x) = \frac{x^4}{16} - x^2 + 16$

$D'(x) = \frac{4}{16}x^3 - 2x = 0 \rightarrow x = -\sqrt{8},\ x = 0,\ x = \sqrt{8}$

$D''(x) = \frac{12}{16}x^2 - 2 = \frac{3}{4}x^2 - 2$

$D''(0) < 0$ $\qquad D''\left(-\sqrt{8}\right) = D''\left(\sqrt{8}\right) > 0$

El máximo se alcanza en $x = 0$ y el punto más alejado es el $(0, 0)$.

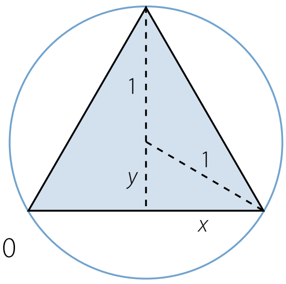
Los puntos más cercanos son: $\left(-\sqrt{8}, 2\right)$ y $\left(\sqrt{8}, 2\right)$

c) La mínima distancia se alcanza en $x = \sqrt{8}$ y es:

$$d = \sqrt{8 + \left(\frac{8}{4} - 4\right)^2} = \sqrt{12} > 2 \rightarrow$$ No hay ningún punto del río que esté a una distancia menor que 2 del pueblo.

087 **Calcula las dimensiones del triángulo isósceles, inscrito en una circunferencia de radio 1, que tiene área máxima.**

(La Rioja. Septiembre 2003. Propuesta A. Ejercicio 6)



Llamamos x a la mitad de la base del triángulo e $y + 1$ a la altura. Se verifica: $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1 - y^2}$

La función que hay que optimizar viene dada por:

$$A(y) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - y^2}\,(y + 1) = (y + 1)\sqrt{1 - y^2}$$

$$A'(y) = \sqrt{1 - y^2} + (y + 1)\frac{-2y}{2\sqrt{1 - y^2}} = \frac{1 - y^2 - y^2 - y}{\sqrt{1 - y^2}} = 0$$

$$\rightarrow -2y^2 - y + 1 = 0 \rightarrow y = -1,\ y = \frac{1}{2}$$

La solución válida es: $y = \frac{1}{2}$

- En $\left(-1, \frac{1}{2}\right) \rightarrow A'(y) > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \rightarrow A'(y) < 0 \rightarrow$ Función decreciente

Así, en $y = \frac{1}{2}$ alcanza un máximo.

Las dimensiones del triángulo de mayor área son:

Base: $2x = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ Altura: $y + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

088 **Unos altos hornos producen al día x toneladas de acero de baja calidad y $\frac{40 - 5x}{10 - x}$ toneladas de acero de alta calidad, siendo 8 toneladas la producción máxima diaria de acero de baja calidad. Si el precio de una tonelada de acero de baja calidad es 100 € y el de alta calidad 250 €, demostrar que se deben producir 5 toneladas por día de acero de baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo.**

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 4. Problema 1)

La función producción viene dada por la expresión: $P(x) = 100x + \frac{250(40 - 5x)}{10 - x}$

Calculamos el valor de x que hace que $P(x)$ sea máximo.

$$P'(x) = 100 - \frac{2.500}{(10 - x)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 15 \end{cases}$$

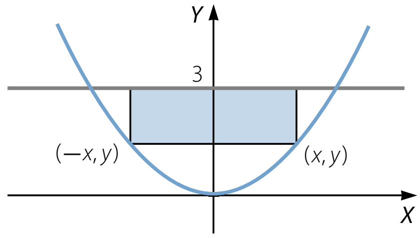
Como $x \leq 8$, la única solución válida es $x = 5$.

$$P''(x) = \frac{-5.000}{(10 - x)^3} \rightarrow P''(5) < 0 \rightarrow$$ Se deben producir 5 toneladas por día de acero de baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo.

089 Considérese el recinto limitado por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 3$.

De entre los rectángulos situados como el de la figura, determinar el que tiene área máxima.

(Canarias. Junio 2008. Bloque 2. Opción B)



Longitud de la base del rectángulo: $2x$

Longitud de la altura del rectángulo: $3 - y = 3 - x^2$

La función que debemos optimizar es: $A(x) = 2x(3 - x^2) = 6x - 2x^3$

$A'(x) = 6 - 6x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$A''(x) = -12x \rightarrow A''(1) < 0 \rightarrow$ Para $x = 1$ alcanza un máximo.

Las dimensiones del rectángulo de área máxima son:

Base: 2 Altura: 2

090 Un almacén tiene forma de prisma recto de base cuadrada y un volumen de 768 m^3. Se sabe que la pérdida de calor a través de las paredes es de 100 unidades por m^2, mientras que a través del techo es de 300 unidades por m^2. La pérdida por el suelo es muy pequeña y se puede considerar nula. Calcule las dimensiones del almacén para que la pérdida de calor total sea mínima.

(Cataluña. Junio 2007. Problema 5)

Arista de la base del prisma: x

Altura del prisma: y

Se cumple que: $V(x, y) = x^2y = 768 \rightarrow y = \dfrac{768}{x^2}$

La función a minimizar es: $S(x, y) = 300x^2 + 400xy \rightarrow S(x) = 300x^2 + \dfrac{307.200}{x}$

$$S'(x) = 600x - \frac{307.200}{x^2} = 0 \rightarrow 600x^3 - 307.200 = 0 \rightarrow x^3 = 512 \rightarrow x = 8$$

$$S''(x) = 600 + \frac{614.400}{x^3} \rightarrow S''(8) > 0 \rightarrow \text{Alcanza un mínimo.}$$

Así, para que la pérdida de calor total sea mínima, el almacén debe tener 8 metros de lado de la base y 12 metros de altura.

091 Un trozo de alambre de longitud 20 se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Encontrar las longitudes de dichos trozos para que sea mínima la suma del área del rectángulo y la del cuadrado.

(País Vasco. Julio 2007. Bloque C. Problema C)

Consideramos un rectángulo de base $2x$ y altura x, y un cuadrado de lado y.

$$4y + 6x = 20 \rightarrow y = \frac{20 - 6x}{4}$$

La función que debemos optimizar es:

$$A(x, y) = 2x^2 + y^2 \rightarrow A(x) = 2x^2 + \left(\frac{20 - 6x}{4}\right)^2$$

$$A'(x) = 4x + 2\left(\frac{20-6x}{4}\right)\left(\frac{-6}{4}\right) = 4x + \frac{36x-120}{8} = 0 \to 68x - 120 = 0$$

$$\to x = \frac{120}{68} = \frac{30}{17} = 1{,}76$$

$A''(x) = 4 + \frac{36}{8} > 0 \to$ En $x = 1{,}76$ alcanza un mínimo.

Así, para que la suma de ambas áreas sea mínima se tiene que cumplir que:

- El trozo de alambre que forma el rectángulo tenga longitud $6x = 6 \cdot 1{,}76 = 10{,}56$.
- El trozo que forma el cuadrado tenga longitud $4 \cdot \frac{20 - 6 \cdot 1{,}76}{4} = 9{,}44$.

092 **En agosto de 1548 el matemático Ludovico Ferrari le propuso a su colega Niccolo Fontana, apodado Tartaglia, el siguiente problema: «Halla dos números reales no negativos cuya suma sea 8 de manera que su producto multiplicado por su diferencia sea máximo». Obtén las soluciones de este problema con dos decimales de aproximación.**

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2007. Bloque 1. Pregunta A)

Llamamos x e y a los dos números reales. Se debe verificar que:
$x, y \geq 0; x + y = 8 \to y = 8 - x$

La función que hay que optimizar es:

$$P(x, y) = xy(x-y) \to P(x) = x(8-x)(x-(8-x)) = -2x^3 + 24x^2 - 64x$$

$$P'(x) = -6x^2 + 48x - 64 \to x = 1{,}69;\ x = 6{,}31$$

$P''(x) = -12x^2 + 48 \to P(6{,}31) < 0$
El máximo se alcanza cuando los dos números son:

$x = 6{,}31;\ y = 8 - 6{,}31 = 1{,}69$

093 **Una cartulina tiene forma rectangular con 30 cm de base y 20 cm de altura. Se quiere construir un cajón (sin tapadera) con la forma resultante tras recortar cuatro cuadrados de lado *x* en cada esquina de la cartulina.**

Calcule *x* para que el volumen del cajón resultante sea máximo. Calcule dicho volumen.

(Murcia. Septiembre 2007. Bloque 3. Cuestión B)

Si la cartulina tiene 30 cm en la base y quitamos dos cuadrados de longitud x, queda $30 - 2x$.

Si en la altura hacemos lo mismo, resulta $20 - 2x$.

Así, la nueva base tendrá una superficie de $(30 - 2x)(20 - 2x)$.

Por tanto, al formar el cajón sin tapadera, su volumen vendrá dado por la función:

$V(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x) = 600x - 100x^2 + 4x^3$

$V'(x) = 600 - 200x + 12x^2 = 0 \to 150 - 50x + 3x^2 = 0 \to x = 12{,}74;\ x = 3{,}92$

$V''(x) = -200 + 24x \to V''(3{,}92) < 0$

El volumen del cajón es máximo si $x = 3{,}92$ cm y es de 273,39 cm^3.

094 **Estudia si se puede aplicar el teorema de Rolle a $f(x) = 2\ tg\ x$ en el intervalo $[0, \pi]$ y, si es posible, determina el punto donde la derivada se anula.**

f no es continua en $x = \frac{\pi}{2} \to$ No podemos aplicar el teorema de Rolle a $f(x) = 2\ tg\ x$ en $[0, \pi]$.

095 **Razona si se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ en el intervalo [0, 4].**

f es continua en [0, 4].

$f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-2}} \to f$ no es derivable en $x = 2 \to$ No podemos aplicar el teorema de Rolle.

096 **Aplica el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en el intervalo [−4, 2] e interprétalo geométricamente.**

f es una función continua en [−4, 2] y derivable en (−4, 2) con $f'(x) = 2x + 2$.

Además, $f(-4) = 16 - 8 - 3 = 5$; $f(2) = 4 + 4 - 3 = 5 \to f(-4) = f(2)$

Por el teorema de Rolle, existe $c \in (-4, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.
Así, $f'(c) = 2c + 2 = 0 \to c = -1$

Geométricamente, en este punto la función tiene una tangente horizontal.

097 **Cada una de las funciones siguientes toma el mismo valor en los extremos del intervalo [−2, 2], pero no hay ningún valor $c \in (-2, 2)$ en el que la derivada se anule. Justifica en cada caso por qué no contradicen el teorema de Rolle:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ b) $g(x) = 2 - |x|$

a) No se puede aplicar el teorema de Rolle porque f no es continua en $x = 0$.

b) No se puede aplicar el teorema de Rolle porque g no es derivable en $x = 0$.

098 **Considera la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{16 - x^2} & \text{si } -4 \le x < 0 \\ -x^2 + 4 & \text{si } 0 < x \le 2 \end{cases}$$

Analiza si cumple las hipótesis del teorema de Rolle en [−4, 2]. En caso afirmativo, halla el punto que indica la tesis del citado teorema e interpreta geométricamente el resultado.

f no es continua en el intervalo [−4, 2], ya que para $x = 0$ no está definida, por lo que no cumple las condiciones del teorema de Rolle.

099 **Prueba que la función $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [−1, 1] y calcula un punto del intervalo abierto (−1, 1) cuya existencia asegura el teorema.**

(Extremadura. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 1)

f es continua en el intervalo [−1, 1] y derivable en (−1, 1) por ser una función polinómica. Además, $f(-1) = 0 = f(1)$.

Por el teorema de Rolle, existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 \to f'(c) = 3c^2 + 2c - 1 = 0 \to c = -1,\ c = \dfrac{1}{3}$

El valor de c válido es $\dfrac{1}{3}$.

100 **Demuestra que la ecuación $x + 1 = e^x$ solamente tiene una solución.**

Consideramos la función $f(x) = e^x - x - 1$. Se cumple que $f(0) = 0$.
Si existe $a > 0$ tal que $f(a) = 0$, entonces, como f es continua en $[0, a]$ y derivable en $(0, a)$, por el teorema de Rolle existe $c \in (0, a)$ tal que $f'(c) = 0$.

Por otra parte, para $f'(x) = e^x - 1$, que solo se anula para $x = 0$, se contradice el teorema de Rolle, de donde deducimos que a no existe. Para $a < 0$ se razona de manera análoga, por lo que concluimos que la ecuación del enunciado solo tiene una solución.

101 **Demuestra que la ecuación $x^2 = x \cos x - \operatorname{sen} x$ se verifica para un único valor de x.**

Sea la función $f(x) = x^2 - x \cos x - \operatorname{sen} x$. Se cumple que $f(0) = 0$. Supongamos que existe $a > 0$ tal que $f(a) = 0$. Entonces, como f es continua en $[0, a]$ y derivable en $(0, a)$, aplicando el teorema de Rolle tenemos que existe $c \in (0, a)$ tal que $f'(c) = 0$.

Por otra parte, para $f'(x) = 2x - (\cos x - x \operatorname{sen} x) + \cos x = x(2 + \operatorname{sen} x)$, que solo se anula para $x = 0$, se contradice el teorema de Rolle, de donde deducimos que a no existe. Para $a < 0$ se razona de manera análoga, por lo que concluimos que la ecuación del enunciado se verifica para un solo valor de x.

102 **Demuestra que la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ solo corta al eje X en un punto en el intervalo $[0, 1]$.**

f es una función continua en $[0, 1]$ tal que $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -1 < 0$.
Por el teorema de Bolzano, f tiene al menos una raíz real en el intervalo $(0, 1)$.

$f'(x) = 3x^2 - 3$ es una función cuya gráfica corta al eje X en los puntos $x = -1$ y $x = 1$, lo que significa que no cambia de signo en el intervalo $(0, 1)$.

Como $f'(x) < 0$ en $(0, 1)$, la función f es siempre decreciente, por lo que la raíz que nos garantizaba el teorema de Bolzano en ese intervalo es única.

103 **Demuestra que la ecuación $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ solo tiene una solución real.**

Sea la función $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$.

f es una función continua en $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 3 > 0$.
Por el teorema de Bolzano, f tiene al menos una raíz real en el intervalo $(0, 1)$.

$f'(x) = 3x^2 + 2x + 2$ no corta al eje X y es positiva para cualquier valor real.
Así, f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, por lo que la raíz real encontrada es única.

104 **Dado el intervalo $I = [0, 5]$ y dadas las funciones $f(x) = x^2 - Ax$, encontrar el valor de A para que se pueda aplicar el teorema de Rolle al intervalo I, y aplicar el teorema en ese caso.**

(País Vasco. Julio 2005. Bloque C. Cuestión C)

f es continua en $[0, 5]$ y derivable en $(0, 5)$.

$f(0) = 0$; $f(5) = 25 - 5A \rightarrow$ Para poder aplicar el teorema de Rolle necesitamos que: $f(0) = f(5) \rightarrow 0 = 25 - 5A \rightarrow A = 5$

Así, si $f(x) = x^2 - 5x$ se cumplen las condiciones del teorema en $[0, 5]$.

Por tanto, existe $c \in (0, 5)$ tal que: $f'(c) = 0 \rightarrow 2c - 5 = 0 \rightarrow c = \dfrac{5}{2}$

105 **Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demuestra que las curvas $y = \cos x$ e $y = \sqrt{x}$ se cortan en un único punto.**

(Baleares. Septiembre 2007. Opción B. Cuestión 4)

$y = \cos x$ e $y = \sqrt{x}$ se cortan en un punto si $\cos x = \sqrt{x}$ tiene una única solución.

Si tiene solución estará en el intervalo (0, 1), ya que el dominio de $y = \sqrt{x}$ es $(0, +\infty)$.

Si $x > 1 \rightarrow \sqrt{x} > 1$, pero $|\cos x| \le 1 \rightarrow$ La solución si existe será menor que 1.

Definamos $f(x) = \sqrt{x} - \cos x$ en el intervalo [0, 1], que es continua en este intervalo por ser diferencia de dos funciones continuas en [0, 1].

Como $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0 \rightarrow$ Por el teorema de Bolzano existe al menos un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

Comprobemos que este valor es único:

La función f es derivable en (0, 1). Si existieran dos valores a, b pertenecientes al intervalo (0, 1) tal que $f(a) = f(b) = 0$. Por el teorema de Rolle existiría un punto intermedio que anularía la derivada.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \operatorname{sen} x > 0$ en (0, 1), ya que en este intervalo $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ y también, $\operatorname{sen} x > 0$.

Por tanto, no existe el punto que nos da el teorema de Rolle, por lo que no es cierta la hipótesis de la cual partíamos.

Así, no pueden existir dos raíces de la función en el intervalo (0, 1), y por tanto hay un único punto de corte para las dos curvas del enunciado.

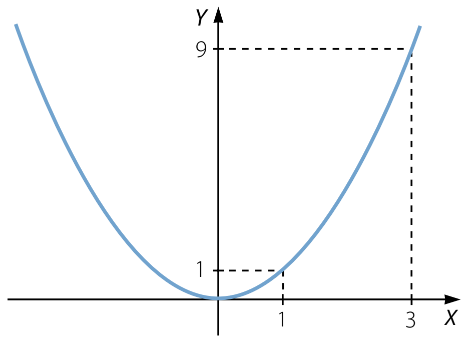
106 **Comprueba que la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [1, 8], y halla el punto que verifica la igualdad del teorema.**

f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ con $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt{x}}$.

En particular es continua en [1, 8] y derivable en (1, 8). Como se cumplen las condiciones del teorema del valor medio existe $c \in (1, 8)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(8) - f(1)}{8 - 1} \rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{c}} = \frac{4 - 1}{7} = \frac{3}{7} \rightarrow c = \left(\frac{14}{9}\right)^3$$

107 **En el segmento comprendido entre los puntos $A(1, 1)$ y $B(3, 9)$ de la parábola $y = x^2$, halla un punto en el cual la tangente sea paralela a la cuerda AB.**



f es continua y derivable en $\mathbb{R} \rightarrow$ En particular es continua en [1, 3] y derivable en (1, 3). Como se cumplen las condiciones del teorema del valor medio existe $c \in (1, 3)$ tal que:

$$f'(c) = 2c = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow c = 2$$

Así, el punto que buscamos es (2, 4).

108 **Demuestra que se puede aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ en el intervalo [0, 4], y halla el punto que verifica la igualdad del teorema.**

f es continua en [0, 4] y derivable en (0, 4) con $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$.

Por tanto, podemos aplicar el teorema del valor medio.

Existe $c \in (0, 4)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 9}} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow c = \sqrt{3}$$

109 **Aplica el teorema del valor medio a la función $f(x) = -x^2 + 2x - 8$ en el intervalo [−3, 3], e interprétalo geométricamente.**

f es continua en [−3, 3] y derivable en (−3, 3).

Se puede aplicar el teorema del valor medio $\rightarrow$ Existe $c \in (-3, 3)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)} \rightarrow -2c + 2 = \frac{-11 - (-23)}{6} \rightarrow c = 0$$

Geométricamente, la recta tangente a la parábola en el punto (0, −8) es paralela a la cuerda que une los extremos del segmento (−3, −11) y (3, −23).

110 **Razona si es aplicable el teorema del valor medio a la función $f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en el intervalo [0, e]. En caso afirmativo, halla el valor al que se refiere el teorema.**

f es continua en (0, e], estudiamos la continuidad de f en 0:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0) \rightarrow f$ es continua en [0, e].

$f'(x) = 1 + \ln x \rightarrow f$ es derivable en (0, e).

Se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio $\rightarrow$ Existe $c \in (0, e)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(e) - f(0)}{e - 0} = \frac{e - 0}{e} = 1 \rightarrow 1 + \ln c = 1 \rightarrow \ln c = 0 \rightarrow c = e^0 \rightarrow c = 1$$

111 **Dada la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo cerrado $[1, e]$, siendo $e = 2{,}718281\ldots$, razonar que existe un punto P de la gráfica de esa función en el que la recta tangente a ella es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(e, 1)$.**

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio B. Problema 3)

Ecuación de la recta que pasa por $A(1, 0)$, $B(e, 1)$:

$$y = mx + n \rightarrow \left.\begin{matrix} 0 = m + n \\ 1 = me + n \end{matrix}\right\} \rightarrow m = \frac{1}{e-1},\ n = \frac{1}{1-e}$$

$$y = \frac{1}{e-1}x + \frac{1}{1-e}$$

Por otro lado, tenemos que: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Como la derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente, y las rectas paralelas tienen la misma pendiente, resulta:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{e-1} \rightarrow x = e - 1 \in [1, e]$$

Así, el punto que buscamos es: $(e - 1,\ \ln(e - 1))$

112 **Dada la función $f(x) = x^x - 2^x + x - 1$, demuestra que existen $\alpha, \beta \in (1, 2)$ tales que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\beta) = 3$. Di qué teoremas utilizas.**

(Navarra. Junio 2006. Grupo 2. Opción C)

$f(x) = x^x - 2^x + x - 1$ es continua en $[1, 2]$ con:

$f(1) = 1 - 2 + 1 - 1 = -1 < 0$; $f(2) = 4 - 4 + 2 - 1 = 1 > 0$

Por el teorema de Bolzano existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

$f'(x) = x^x(1 + \ln x) - 2^x \ln 2 + 1$ es continua en $[1, 2]$ con:

$f'(1) = 1^1(1 + \ln 1) - 2^1 \ln 2 + 1 = 2(1 - \ln 2)$

$f'(2) = 2^2(1 + \ln 2) - 2^2 \ln 2 + 1 = 4(1 + \ln 2) - 4 \ln 2 + 1 = 5$

Por el teorema de Weierstrass, la función f' tiene que tomar todos los valores entre $f'(1)$ y $f'(2)$. Por tanto, existe $\beta \in (1, 2)$ tal que $f'(\beta) = 3$.

113 **Sea $f(x) = x^3 + 2x - 1$ y sea I el intervalo $I = [0, 2]$. Aplicar el teorema del valor medio a la función f en el intervalo I, hallando el punto de dicho intervalo para el cual se verifica el resultado del teorema.**

(País Vasco. Julio 2007. Bloque C. Cuestión C)

f es una función continua en $[1, 2]$ y derivable en $(1, 2)$.

Por el teorema del valor medio existe $c \in (0, 2)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{8 + 4 - 1 - (-1)}{2} = 6$$

$$f'(c) = 3c^2 + 2 = 6 \rightarrow c^2 = \frac{4}{3} \rightarrow c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \in (0, 2)$$

114 Dada la función $f(x) = x\ cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, demuestra que existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = -2$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

(Navarra. Junio 2008. Grupo 2. Opción D)

f es continua en [1, 2] y derivable en (1, 2). Por el teorema del valor medio, existe $\alpha \in (1,\ 2)$ tal que: $f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 2\ cos\ \pi - cos\ \frac{\pi}{2} = -2 - 0 = -2$

115 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2\ sen\ x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x - x\ cos\ x}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x + 3}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 2} \frac{2x - 4}{2x} = \frac{0}{4} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2\ sen\ x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2\ cos\ x} = \frac{1+1}{2} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x - x\ cos\ x}{x^3} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{cos\ x - (cos\ x - x\ sen\ x)}{3x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{x\ sen\ x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x}{3x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{cos\ x}{3} = \frac{1}{3}$

d) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x + 3} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to -3} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}}{1} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} = -\frac{3}{2}$

116 Halla el resultado de estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - x - cos\ x}{sen^2\ x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{cos\ x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen\ x}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - x - cos\ x}{sen^2\ x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + sen\ x}{2\ sen\ x\ cos\ x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + sen\ x}{sen\ 2x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + sen\ x}{sen\ 2x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + cos\ x}{2\ cos\ 2x} = \frac{2}{2} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{cos\ x - 1} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2}2x}{-sen\ x} \to \frac{0}{0}$

$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2}4x^2 + e^{x^2}2}{-cos\ x} = \frac{2}{-1} = -2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen\ x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - cos\ x} \to \frac{0}{0}$

$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen\ x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{cos\ x} = \frac{2}{1} = 2$

117 **Calcula los límites de las siguientes funciones cuando x tiende a 0.**

a) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2}{1-\cos x}$

c) $h(x) = \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$

d) $i(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^3+x}$

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0} (1+x) = 1$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{sen} x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos x} = 2$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x} \to \frac{0}{0}$$
$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{-2 \operatorname{sen} x \cos x}{1} = \lim_{x\to 0} (-\operatorname{sen} 2x) = 0$$

d) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^3+x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{4 \operatorname{sen} 2x \cos 2x}{3x^2+1} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{3x^2+1} = \frac{0}{1} = 0$$

118 **Calcula los límites de estas funciones cuando x tiende a 0.**

a) $f(x) = x \operatorname{cotg} x$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x} - \operatorname{cotg} x$

c) $h(x) = (e^x - x)^{\frac{1}{x}}$

a) $$\lim_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x \to 0 \cdot \infty \to \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 1$$

b) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x \right) \to \infty - \infty$$
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x \operatorname{sen} x} \right) \to \frac{0}{0}$$
$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - (\cos x - x \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \to \frac{0}{0}$$
$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0$$

c) $$\lim_{x\to 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x}} \to 1^\infty$$
$$\lim_{x\to 0} \ln (e^x - x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(e^x - x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^x - x)}{x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}}$$
$$\to \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - x} \cdot (e^x - 1) \right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{0}{1} = 0 \to \lim_{x\to 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

119 Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1+x-e^x}{sen^2\, x}$.

(Extremadura. Junio 2006. Repertorio A. Ejercicio 1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{sen^2\, x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2\, sen\, x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{sen\, 2x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{sen\, 2x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2\cos 2x} = \frac{-1}{2}$$

120 Calcular:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

(Aragón. Junio 2007. Opción A. Cuestión 2)

a) $$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 3} \frac{2x}{2\sqrt{x^2-5}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

b) $$\lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x \to 1^\infty$$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x}} \to \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2-1}\cdot\dfrac{2}{x^3}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x^2-1} = 0 \to \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x = e^0 = 1$$

121 Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x\, sen\, x - x}{2x^2+x^4}$.

(Galicia. Septiembre 2007. Bloque 3. Opción 1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x sen\, x - x}{2x^2+x^4} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x\, sen\, x + e^x\cos x - 1}{4x+4x^3} \to \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x(sen\, x+\cos x)+e^x(\cos x - sen\, x)}{4+12x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x}{4+12x^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

122 Resuelve el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - sen\, x}{tg\, x - sen\, x}$

(Castilla-La Mancha. Junio 2005. Bloque 2. Pregunta B)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-sen\, x}{tg\, x - sen\, x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+tg^2\, x-\cos x} \to \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0}\frac{sen\, x}{2\, tg\, x(1+tg^2\, x)+sen\, x} \to \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2(1+tg^2\, x)+4\, tg\, x(1+tg^2\, x)+\cos x} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

123 Calcula $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 1. Opción B. Ejercicio 1)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)\to\infty-\infty\to\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\to\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\to\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}$$

124 Calcula los límites de las siguientes funciones cuando x tiende a $+\infty$.

a) $f(x)=(\ln x)^{e^{-x}}$ b) $g(x)=\left(1+tg\,\dfrac{1}{x}\right)^x$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{e^{-x}}\to\infty^0$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{e^{-x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}(\ln(\ln x))\to 0\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}(\ln(\ln x))=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{e^x}\to\frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x\ln x}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln xe^x}=0\to\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{e^{-x}}=e^0=1$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+tg\dfrac{1}{x}\right)^x\to 1^\infty$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+tg\frac{1}{x}\right)^x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+tg\frac{1}{x}\right)\to\infty\cdot 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+tg\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+tg\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}\to\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\left(1+tg\dfrac{1}{x}\right)}\cdot\left(1+tg^2\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{-1}{x^2}}{\dfrac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+tg^2\dfrac{1}{x}}{1+tg\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

$$\to\lim_{x\to+\infty}\left(1+tg\frac{1}{x}\right)^x=e^1=e$$

125 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.

Se pide calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(Baleares. Septiembre 2005. Opción B. Cuestión 3)

- Calculamos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ teniendo en cuenta que si aparecen indeterminaciones podemos utilizar la regla de L'Hôpital para resolver el límite.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

- Calculamos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

126 Calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(arc\ tg\ e^x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

(Madrid. Junio 2005. Opción B. Ejercicio 3)

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - (x^2 - x)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(arc\ tg\ e^x - \dfrac{\pi}{2}\right) \to \infty \cdot 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{arc\ tg\ e^x - \dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}} \to \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-e^x x^2}{1 + e^{2x}} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{-e^x x^2 - e^x 2x}{e^{2x} \cdot 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 - 2x}{2e^x} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x - 2}{2e^x} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{2e^x} = 0$$

127 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$ b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1-\cos x)}$

(Navarra. Junio 2008. Grupo 2. Opción C)

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} \to \dfrac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{x+2-(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)(x+1-(x-1))}{4\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{4\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} = \frac{2\cdot 2}{4\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1-\cos x)} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1-\cos x}\sqrt{1-\cos x}}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}} = \dfrac{1}{2}$

128 Calcula, si existen, los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}$ c) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ (con $a > 0$)

(La Rioja. Junio 2006. Propuesta A. Ejercicio 5)

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} \to 0^0$

$$\ln\left(\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{tg} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{-1}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (-\cos x \cdot \operatorname{sen} x) = 0 \to \lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|} \to \dfrac{0}{0}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-\cos x}{1} = -1 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cos x}{1} = 1 \end{array}\right\} \to \text{No existe el límite.}$$

c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to a} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

129 Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n-8}{2^{n+1}}\right)$

(Asturias. Junio 2007. Bloque 4)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n-8}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n}{2^{n+1}} - \frac{8}{2^{n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{8}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}$

130 Calcular los valores del número real a sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1-ax}{x^2} = 8$.

(Castilla y León. Septiembre 2008. Prueba B. Cuestión 3)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1-ax}{x^2} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{ae^{ax}-a}{2x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}}$$

$$\to \lim_{x\to 0} \frac{a^2e^{ax}}{2} = \frac{a^2}{2} \to \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1-ax}{x^2} = \frac{a^2}{2} = 8 \to a^2 = 16 \to a = \pm 4$$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Dada la función $y = x^4e^{-x}$:

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

(Asturias. Septiembre 2007. Bloque 5)

a) f es continua en todo $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 4x^3e^{-x} - x^4e^{-x} = e^{-x}(4x^3 - x^4) = 0 \to 4x^3 - x^4 = 0 \to x = 0, x = 4$

- En $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $(0, 4) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

b) $f''(x) = e^{-x}(x^4 - 8x^3 + 12x^2) = 0 \to x = 0, x = 2, x = 6$

$f''(4) < 0 \to$ En $x = 4$ alcanza un máximo.

$f'''(x) = e^{-x}(-x^4 + 12x^3 - 36x^2 + 24x)$

$f'''(2) \neq 0 \to$ En $x = 2$ alcanza un punto de inflexión.

$f'''(6) \neq 0 \to$ En $x = 6$ alcanza un punto de inflexión.

$f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = e^{-x}(x^4 - 16x^3 + 72x^3 - 96x + 24) \to f^{IV}(0) > 0$, como la primera derivada en este punto es de orden par y positiva, la función alcanza un mínimo en $x = 0$.

2 Determina a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 - x + 2$ tenga un mínimo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = \frac{1}{3}$.

(La Rioja. Junio 2007. Propuesta A. Ejercicio 1)

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 1$ $\qquad f''(x) = 6ax + 2b$

Como la función tiene un mínimo en $x = 2$ se cumple que:
$f'(2) = 0 \rightarrow 12a + 4b - 1 = 0$

Como la función tiene un punto de inflexión en $x = \frac{1}{3}$ se cumple que:

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \rightarrow 2a + 2b = 0 \rightarrow a = -b$

Así, sustituyendo en la otra condición:

$-12b + 4b - 1 = 0 \rightarrow -8b - 1 = 0 \rightarrow b = \frac{-1}{8} \rightarrow a = \frac{1}{8}$

3 De la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, que su gráfica corta al eje X en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 1. Opción A. Ejercicio 1)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\qquad f''(x) = 6ax + 2b$

Como tiene un máximo en $x = -1$ $f'(-1) = 0 \rightarrow 3a - 2b + c = 0$

La gráfica pasa por el punto $(-2, 0) \rightarrow f(-2) = 0 \rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 0$

Tiene un punto de inflexión en $x = 0 \rightarrow f''(0) = 0 \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$

La tangente en $x = 2$ tiene pendiente $9 \rightarrow f'(2) = 9 \rightarrow 12a + 4b + c = 9$

Sustituimos $b = 0$ y resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 3a + c = 0 \\ -8a - 2c + d = 0 \\ 12a + c = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ c = -3 \\ d = 2 \end{array}\right.$

Así, la función es: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

4 La potencia $f(x)$ en watios consumida por cierto aparato eléctrico, en función de su resistencia (x) en ohmios, viene dada por la expresión: $f(x) = \frac{4x}{(x + 12)^2}$
Hallar la potencia máxima y el correspondiente valor de x.

(Canarias. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 2)

$f'(x) = \frac{-4x + 48}{(x + 12)^3} = 0 \rightarrow x = 12$

$f''(x) = \frac{8x - 192}{(x + 12)^4} \rightarrow f''(12) < 0 \rightarrow$ En $x = 12$ alcanza un máximo.

$f(12) = \frac{48}{576} = \frac{1}{12}$

La potencia máxima es $\frac{1}{12} = 0{,}08\widehat{3}$ watios y el valor de x es 12.

5 Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.

b) Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado a) con los dos ejes coordenados.

c) Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.

(Madrid. Septiembre 2005. Opción A. Ejercicio 4)

a) $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

La ecuación de la tangente es: $y - \dfrac{1}{a} = \dfrac{-1}{a^2}(x - a)$

b) Puntos de corte:

Eje X: $-\dfrac{1}{a} = \dfrac{-1}{a^2}(x - a) \rightarrow x - a = a \rightarrow x = 2a \rightarrow$ Punto $(2a, 0)$

Eje Y: $y - \dfrac{1}{a} = \dfrac{-1}{a^2}(-a) \rightarrow y = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a} \rightarrow y = \dfrac{2}{a} \rightarrow$ Punto $\left(0, \dfrac{2}{a}\right)$

c) La distancia entre los dos puntos hallados viene dada por:

$$d(a) = \sqrt{(-2a)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{4}{a^2}}$$

La función que vamos a minimizar viene dada por: $D(a) = d^2(a) = 4a^2 + \dfrac{4}{a^2}$

$D'(a) = 8a - \dfrac{8}{a^3} = 0 \rightarrow a = \pm 1$

Como $a > 0$ solo es válida $a = 1$.

$D''(a) = 8 + \dfrac{24}{a^4} \rightarrow D''(1) > 0 \rightarrow$ Para $a = 1$ la distancia es mínima.

6 **Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima que se puede construir de modo que su base esté en el eje X y los vértices del lado opuesto sobre la parábola $y = -x^2 + 12$.**

(Galicia. Septiembre 2007. Bloque 3. Opción 1)

La función representa una parábola cuyo vértice está en el eje Y, por lo que el rectángulo será simétrico con respecto a este eje.
Así, las medidas serán, $2x$, $-x^2 + 12$ (tomamos x positivo para señalar la longitud y no la coordenada).

La función que debemos optimizar es: $A(x) = 2x(-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x$

$A'(x) = -6x^2 + 24 = 0 \rightarrow x^2 = \dfrac{24}{6} = 4 \rightarrow x = \pm 2$

$A''(x) = -12x \rightarrow A''(2) < 0 \rightarrow$ Para $x = 2$ alcanza un máximo.

Así, las dimensiones del rectángulo de área máxima son:
4 de ancho y 8 de alto.

7 Demostrar que la función $f(x) = x^3 - x + a$ cumple la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 1] cualquiera que sea el valor de a. Encontrar el punto en el cual se cumple la tesis.

(Baleares. Septiembre 2005. Opción A. Cuestión 4)

f es continua en [0, 1] y derivable en (0, 1).

Además, $f(0) = a = f(1) \rightarrow$ Por el teorema de Rolle existe $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \rightarrow 3c^2 - 1 = 0 \rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

8 Utiliza el teorema del valor medio del cálculo diferencial para demostrar que para cualesquiera números reales $x < y$ se verifica que $\cos y - \cos x \leq y - x$.

(Extremadura. Septiembre 2005. Repertorio A. Ejercicio 1)

Consideremos la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[x, y]$ con $x < y$.

Como esta función es continua en $[x, y]$ y derivable en $(x, y) \rightarrow$ Por el teorema del valor medio existe $c \in (x, y)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{\cos y - \cos x}{y - x} \rightarrow -\operatorname{sen} c = \frac{\cos y - \cos x}{y - x}$$

$$-1 \leq -\operatorname{sen} c \leq 1 \rightarrow \frac{\cos y - \cos x}{y - x} \leq 1 \rightarrow \cos y - \cos x \leq y - x$$

9 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x^2}}$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{1 - tg\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{\ln 4x^2}$

(Navarra. Septiembre 2008. Grupo 2. Opción D)

a) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x^2}} \rightarrow 1^{\infty}$

$$\ln\left[\left(\lim_{x \to 0} \cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x^2}}\right] = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x^2}\ln(\cos 2x)\right) = \lim_{x \to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{\operatorname{sen} x^2} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0}\frac{-2\operatorname{sen} 2x}{2x\cos 2x \cdot \cos x^2} \rightarrow \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}}$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0}\frac{-4\cos 2x}{2\cos 2x\cos x^2 - 4x\operatorname{sen} 2x\cos x^2 - 4x^2\cos 2x\operatorname{sen} x^2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x^2}} = e^{-2}$$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{1 - tg\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{\ln 4x^2} \to \dfrac{0}{0}$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{-\left(1 + tg^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{8x}{4x^2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{-\pi x\left(1 + tg^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)}{4} = \frac{-\dfrac{\pi}{2} \cdot 2}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

10 Determínense los valores de a y b para los cuales $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} = 1$.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba B. Cuestión 4)

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0} \frac{2ax + b + \operatorname{sen} x}{2x \cos x^2} \to \frac{b}{0}$$

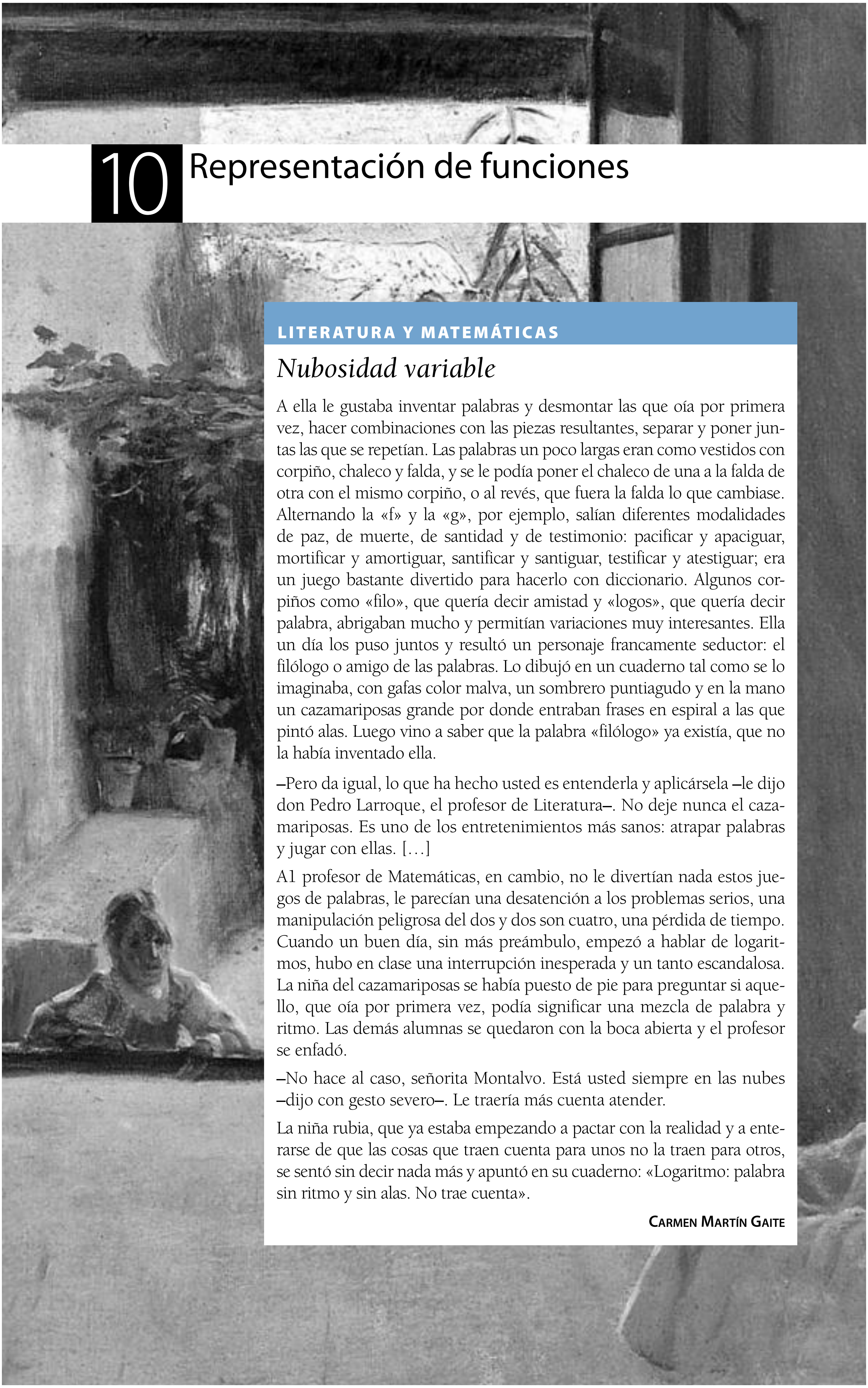
Si $b \neq 0$ el límite no existiría, así que $b = 0 \xrightarrow{\text{L'Hôpital}}$

$$\to \lim_{x \to 0} \frac{2ax + \operatorname{sen} x}{2x \cos x^2} \to \frac{0}{0} \to \lim_{x \to 0} \frac{2a + \cos x}{2 \cos x^2 - 4x^2 \operatorname{sen} x^2} = \frac{2a + 1}{2 - 0} = \frac{2a + 1}{2}$$

Así, $\dfrac{2a + 1}{2} = 1 \to 2a + 1 = 2 \to 2a = 1 \to a = \dfrac{1}{2}$

Por tanto: $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 0$

10 Representación de funciones



LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Nubosidad variable

A ella le gustaba inventar palabras y desmontar las que oía por primera vez, hacer combinaciones con las piezas resultantes, separar y poner juntas las que se repetían. Las palabras un poco largas eran como vestidos con corpiño, chaleco y falda, y se le podía poner el chaleco de una a la falda de otra con el mismo corpiño, o al revés, que fuera la falda lo que cambiase. Alternando la «f» y la «g», por ejemplo, salían diferentes modalidades de paz, de muerte, de santidad y de testimonio: pacificar y apaciguar, mortificar y amortiguar, santificar y santiguar, testificar y atestiguar; era un juego bastante divertido para hacerlo con diccionario. Algunos corpiños como «filo», que quería decir amistad y «logos», que quería decir palabra, abrigaban mucho y permitían variaciones muy interesantes. Ella un día los puso juntos y resultó un personaje francamente seductor: el filólogo o amigo de las palabras. Lo dibujó en un cuaderno tal como se lo imaginaba, con gafas color malva, un sombrero puntiagudo y en la mano un cazamariposas grande por donde entraban frases en espiral a las que pintó alas. Luego vino a saber que la palabra «filólogo» ya existía, que no la había inventado ella.

–Pero da igual, lo que ha hecho usted es entenderla y aplicársela –le dijo don Pedro Larroque, el profesor de Literatura–. No deje nunca el cazamariposas. Es uno de los entretenimientos más sanos: atrapar palabras y jugar con ellas. […]

A1 profesor de Matemáticas, en cambio, no le divertían nada estos juegos de palabras, le parecían una desatención a los problemas serios, una manipulación peligrosa del dos y dos son cuatro, una pérdida de tiempo. Cuando un buen día, sin más preámbulo, empezó a hablar de logaritmos, hubo en clase una interrupción inesperada y un tanto escandalosa. La niña del cazamariposas se había puesto de pie para preguntar si aquello, que oía por primera vez, podía significar una mezcla de palabra y ritmo. Las demás alumnas se quedaron con la boca abierta y el profesor se enfadó.

–No hace al caso, señorita Montalvo. Está usted siempre en las nubes –dijo con gesto severo–. Le traería más cuenta atender.

La niña rubia, que ya estaba empezando a pactar con la realidad y a enterarse de que las cosas que traen cuenta para unos no la traen para otros, se sentó sin decir nada más y apuntó en su cuaderno: «Logaritmo: palabra sin ritmo y sin alas. No trae cuenta».

CARMEN MARTÍN GAITE

Nubosidad variable

Carmen Martín Gaite

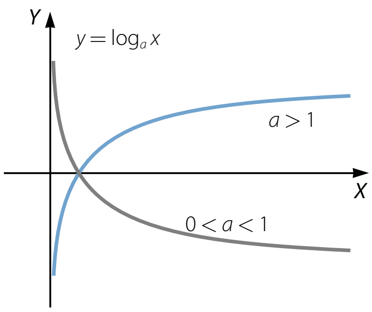
Sofía, la protagonista y narradora de esta novela, es una mujer madura que buscando un documento que le había pedido su marido Lorenzo, encuentra de pronto el libro escolar con las calificaciones del instituto y eso le hace recordar algunas vivencias de aquellos días y reflexionar sobre la trayectoria que ha seguido su vida. Para ella, «los números eran un mero dibujo inalterable y los nombres que los designaban no daban pie a la fantasía». ¿Qué queda de aquella experiencia escolar?

Yo ahora, si digo «logaritmo», «guarismo», «raíz cuadrada» o «ecuación», veo bastoncitos grises y articulados que reptan por la alfombra como una procesión de gusanos. Y no se atreve uno a tocarlos. Unidades, decenas, centenas, millares, pi, tres-catorce-dieciséis. Dan grima. Se enredan unos con otros, se arremolinan en mi costado izquierdo (porque ya, vencida, me he tumbado en la alfombra), y los miro de reojo, llena de aprensión, avanzar camino abajo, sortear mi cintura, contornear mis piernas. Desplazarme tampoco puedo: estoy cercada. Descubro que hay otra procesión de gusanos, igualmente nutrida, que baja por la derecha más aprisa. Éstos son verdes y, al llegarme a los pies, dan la vuelta y confunden su caudal con el del bando gris. Pero es un error óptico. Pesan más que la alfombra, y entre todos impiden que levante el vuelo. No me dejan olvidar que están ahí.

Los gusanos verdes son las horas muertas, las horas podridas de mi vida entera, horas gastadas en sortear los escollos de la realidad para lograr aprobar materias que no me acuerdo de qué trataban, en las que ni siquiera me doy por examinada, a pesar de haber lidiado tanto con ellas. Porque lo único que sé de esas asignaturas es que siempre hay que estar haciéndoles frente como si fuera la primera vez, y el miedo a suspenderlas sigue siendo el mismo. Muy parecido, además, al miedo de haber perdido los papeles donde pudiera constar que se han aprobado. Se estudiaban para la nota. No eran optativas. Aprobado en hija de familia. Aprobado en noviazgo. Aprobado en economía doméstica. Aprobado en trato conyugal y en deberes para con la parentela política. Aprobado en partos. Aprobado en suavizar asperezas, en buscar un sitio para cada cosa y en poner a mal tiempo buena cara. Aprobado en maternidad activa, aunque esta asignatura, por ser la más difícil, está sometida a continua revisión. Tales materias, sobre todo la última, pueden llegar a ser apasionantes. Depende de cómo se tomen. Pero se parecen a los problemas de logaritmos en una cosa: en que de una vez para otra ya no se sabe cómo se resolvieron, ni por qué los tenía uno que resolver.

Aunque ese profesor no quisiera explicar la etimología de las palabras que designan conceptos matemáticos, todas tienen su justificación. Busca en un diccionario la etimología de «logaritmo» y ayuda a la protagonista a cazar visualmente este concepto, dibujando la gráfica de una función logarítmica.

La palabra logaritmo se debe a John Napier y está formada por las palabras griegas *λογος (logos)*, que significa *razón o cociente*, y *αριθμος (arithmos)*, *número*, y se define, así como *un número que indica una relación o proporción*.



Representación de funciones

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 2x + 7)$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} 8^{\frac{x^3 - x}{x+1}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + 3x}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^5 + x^2}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 1)^{\frac{x^2 - 1}{x}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 2x + 7) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + 3x} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^5 + x^2} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} 8^{\frac{x^3 - x}{x+1}} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 1)^{\frac{x^2 - 1}{x}} = +\infty$

002 Estudia la continuidad y clasifica los puntos de discontinuidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ x^2 - x + 7 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Si $x < 2$: $\dfrac{x^2}{x-1} \rightarrow$ Función racional, no definida en $x = 1$.
- Si $x \geq 2$: $x^2 - x + 7 \rightarrow$ Función polinómica, definida en $\mathbb{R}$.

Así, $f(x)$ está definida y es continua en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$. Estudiamos la continuidad en $x = 1$ y en $x = 2$:

- Si $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Discontinuidad de salto infinito}$$

- Si $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{4}{1} = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - x + 7) = 4 - 2 + 7 = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Discontinuidad de salto finito}$$

ACTIVIDADES

001 Determina el dominio y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ b) $f(x) = \mathit{sen}\ x$

a) $f(x)$ está definida si $x^2 - 16 \geq 0 \rightarrow (x - 4)(x + 4) \geq 0$
$\rightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty) \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{x^2 - 16} = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4 \rightarrow (-4, 0), (4, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene ya que $x = 0$ no está en el dominio.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:
  $sen\, x = 0 \rightarrow x = 0 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z} \rightarrow (0 + k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$
- Corte con el eje Y:
  $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

002 Halla el dominio y los puntos de corte con los ejes.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 81}{x - 7}$

b) $f(x) = \log(x + 8)$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{7\}$

- Cortes con el eje X:
  $\dfrac{x^2 - 81}{x - 7} = 0 \rightarrow x^2 = 81 \rightarrow x = \pm 9 \rightarrow (-9, 0), (9, 0)$
- Corte con el eje Y:
  $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{-81}{-7} = \dfrac{81}{7} \rightarrow \left(0, \dfrac{81}{7}\right)$

b) $f(x)$ está definida cuando $x + 8 > 0 \rightarrow x > -8 \rightarrow \text{Dom } f = (-8, +\infty)$

- Cortes con el eje X:
  $\log(x + 8) = 0 \rightarrow x + 8 = 10^0 = 1 \rightarrow x = -7 \rightarrow (-7, 0)$
- Corte con el eje Y:
  $x = 0 \rightarrow y = \log 8 \rightarrow (0, \log 8)$

003 Estudia la simetría de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 25}$

b) $f(x) = -x^2 - 27$

a) $f(-x) = \sqrt{2(-x)^2 - 25} = \sqrt{2x^2 - 25} = f(x) \rightarrow f(x)$ es simétrica respecto al eje Y.

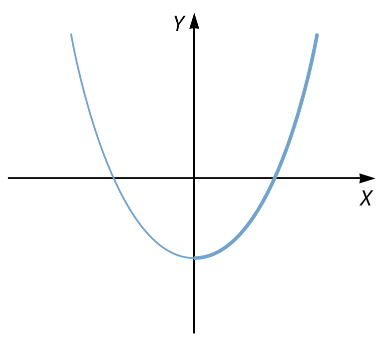
b) $f(-x) = -(-x)^2 - 27 = -x^2 - 27 = f(x) \rightarrow f(x)$ es simétrica respecto al eje Y.

004 Dibuja la gráfica de una función que sea:

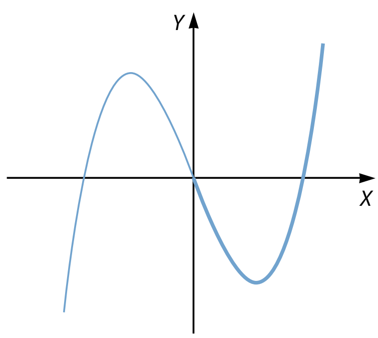
a) Par.

b) Impar.

a)



b)



005 **Determina el período de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = cos\ x$ **b)** $f(x) = sen\ 2x$

a)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π
$f(x)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1

La función se repite con período 2π: $cos\ x = cos\ (x + 2k\pi)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

b)

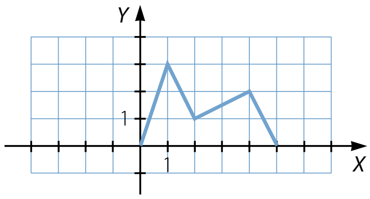
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
$f(x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0

La función se repite con período π: $sen\ 2x = sen\ (2x + k\pi)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

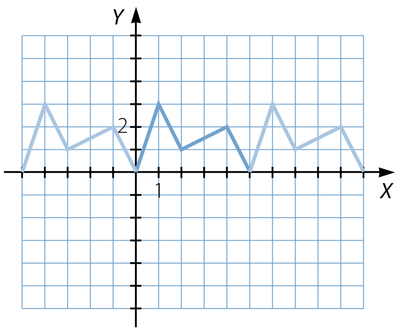
006 **La función que a cada número le asocia su parte decimal, ¿es periódica? Si es así, ¿cuál es el período?**

Una función que a cada número le asocia su parte decimal es periódica de período 1.

007 **Representa una función periódica a partir de esta.**



¿Cuál es el período?



El período de esta función es 5.

008 **Escribe una función que tenga como asíntotas verticales las rectas cuyas ecuaciones son:**

a) $x = 4$ y $x = -2$ **b)** $x = 1$ y $x = 0$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $f(x) = \dfrac{5}{(x-4)(x+2)}$ b) $f(x) = \dfrac{6x+3}{x(x-1)}$

009 **Halla las asíntotas verticales de las funciones.**

a) $f(x) = \log(x^2 - 16)$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

a) $x^2 - 16 \geq 0 \rightarrow (x-4)(x+4) \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

Así, tenemos que: $\text{Dom } f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to -4^-} \log(x^2 - 16) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -4$

$\lim\limits_{x \to 4^+} \log(x^2 - 16) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 4$

b) $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x-1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 1$

010 **Estudia si las siguientes funciones tienen asíntotas horizontales.**

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{0}{0+1} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

011 **Determina la situación de la gráfica respecto de las asíntotas horizontales de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

- Si $x \rightarrow +\infty \rightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}} - 1 < 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.
- Si $x \rightarrow -\infty \rightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}} - 1 < 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

- Si $x \rightarrow +\infty \rightarrow \dfrac{x}{x^2 - 1} - 0 > 0 \rightarrow f(x)$ está por encima de la asíntota.
- Si $x \rightarrow -\infty \rightarrow \dfrac{x}{x^2 - 1} - 0 < 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.

012 **Estudia si las siguientes funciones tienen asíntotas oblicuas.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{-x^2+3}{x+2}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x(x-1)} = 1 \neq 0 \to m = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2 - x^2 + x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1 \to n = 1$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = mx + n \to y = x + 1$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2+3}{x(x+2)} = -1 \neq 0 \to m = -1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{-x^2+3}{x+2} + x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2+3+x^2+2x}{x+2} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+2x}{x+2} = 2 \to n = 2$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = mx + n \to y = -x + 2$

013 **Determina la situación de la gráfica respecto de las asíntotas oblicuas de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2}{x(x-1)} = 1 \neq 0 \to m = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) = 1 \to n = 1$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = mx + n \to y = x + 1$

$f(x) - (mx+n) = \dfrac{x^2+2}{x-1} - x - 1 = \dfrac{3}{x-1}$

- Si $x \to +\infty \to \dfrac{3}{x-1} > 0 \to f(x)$ está por encima de la asíntota.
- Si $x \to -\infty \to \dfrac{3}{x-1} < 0 \to f(x)$ está por debajo de la asíntota.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x} = 1 \neq 0 \to m = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}+x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}+x} = 0$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x}=-1\neq 0\to m=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-mx\big)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}-x}=\\ \qquad=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}=0\end{array}\right\}$$

$\to$ Asíntota oblicua: $y=-x$

- Si $x\to+\infty\to\dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}+x}>0\to f(x)$ está por encima de la asíntota $y=x$.
- Si $x\to-\infty\to\dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}>0\to f(x)$ está por encima de la asíntota $y=-x$.

014 **Estudia si estas funciones presentan ramas parabólicas.**

a) $f(x)=x^4-x^3+4$ **b)** $g(x)=x\ln x$

a) Función polinómica $\to$ Dom $f=\mathbb{R}\to$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-x^3+4)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-x^3+4)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^3+4}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x^3+4}{x}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Por tanto, la función tiene ramas parabólicas cuando $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$.

b) Dom $g=(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x\to 0\cdot\infty\to\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\to\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

$\to$ No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x=+\infty\to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Por tanto, la función tiene una rama parabólica cuando $x\to+\infty$.

015 **Determina las ramas infinitas de $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.**

Dom $f=\mathbb{R}\to$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0\end{array}\right\}\to \text{Asíntota horizontal: } y=0$$

Como la función tiene asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$, no tiene asíntotas oblicuas y tampoco ramas parabólicas.

016 Estudia el crecimiento y decrecimiento de estas funciones, y calcula los máximos y mínimos.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{-x^2+3}{x+2}$

a) $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = 0 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Máximo $x = 2 \rightarrow f(x) = 4 \rightarrow (2, 4)$ Mínimo

b) $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow -x^2 - 4x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

- En $(-3, -2) \cup (-2, -1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = -1 \rightarrow f(x) = 2 \rightarrow (-1, 2)$ Máximo
$x = -3 \rightarrow f(x) = 6 \rightarrow (-3, 6)$ Mínimo

017 Estudia el crecimiento y decrecimiento de las funciones, y halla los máximos y mínimos.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 15$ b) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

- En $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$x = \dfrac{3}{2} \rightarrow f(x) = \dfrac{51}{4} \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{51}{4}\right)$ Mínimo

b) $x^2 + 5 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$x = 0 \rightarrow f(x) = \sqrt{5} \rightarrow \left(0, \sqrt{5}\right)$ Mínimo

018 **Estudia la concavidad y convexidad de estas funciones, y calcula los puntos de inflexión.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{-x^2+3}{x+2}$

a) $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{No presenta puntos de inflexión.}$$

- En $(-\infty, 1) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

b) $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{(x+2)^3} \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{No presenta puntos de inflexión.}$$

- En $(-\infty, -2) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(-2, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

019 **Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones, y comprueba el resultado gráficamente.**

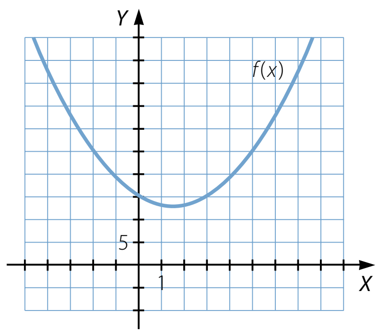
a) $f(x) = x^2 - 3x + 15$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x - 3$

$f''(x) = 2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Por tanto, es $f(x)$ cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

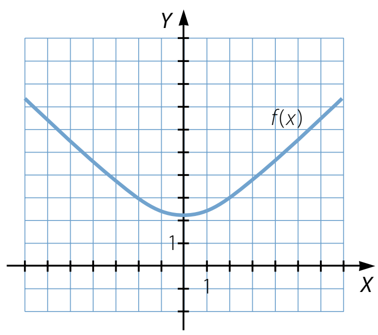


b) $x^2 + 5 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+5} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}}{x^2+5} =$$

$$= \frac{5}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$



Así, $f(x)$ es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

020 **Representa las siguientes funciones polinómicas.**

a) $f(x) = x^4 - 12x$ **b)** $g(x) = -2x^3 + 6x$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \rightarrow x^4 - 12x = 0 \rightarrow x(x^3 - 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{12} \end{cases} \rightarrow (0, 0), \left(\sqrt[3]{12}, 0\right)$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

Como f es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 12x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (x^4 - 12x) = +\infty$$

$f'(x) = 4x^3 - 12 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{3}$

- En $\left(-\infty, \sqrt[3]{3}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(\sqrt[3]{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

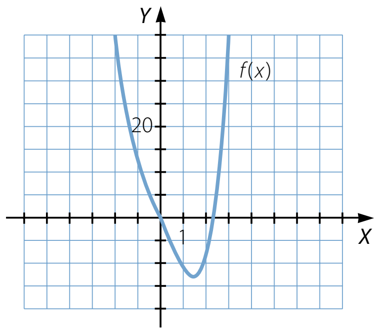
$x = \sqrt[3]{3} \rightarrow f\left(\sqrt[3]{3}\right) = 3\sqrt[3]{3} - 12\sqrt[3]{3} = -9\sqrt[3]{3}$

$\rightarrow \left(\sqrt[3]{3}, -9\sqrt[3]{3}\right)$ Mínimo

$f''(x) = 12x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

No presenta puntos de inflexión.



b) $\text{Dom } g = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$$g(x) = 0 \rightarrow -2x^3 + 6x = 0 \rightarrow x(-2x^2 + 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(-\sqrt{3}, 0\right), (0, 0), \left(0, \sqrt{3}\right)$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

Como g es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$$\lim_{x \to -\infty} (-2x^3 + 6x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (-2x^3 + 6x) = -\infty$$

$g'(x) = -6x^2 + 6 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $(-1, 1) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

$x = -1 \rightarrow g(-1) = -2(-1)^3 + 6(-1) = -4$

$\rightarrow (-1, -4)$ Mínimo

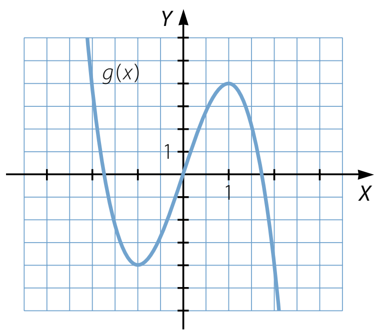
$x = 1 \rightarrow g(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1 = 4$

$\rightarrow (1, 4)$ Máximo

$g''(x) = -12x = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava
- En $(0, +\infty) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa

$x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Punto de inflexión



021 Representa estas funciones polinómicas.

a) $f(x) = 6x^5 - 12x^3 - 4x$

b) $g(x) = -x^3 + x$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \rightarrow 6x^5 - 12x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(6x^4 - 12x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1{,}51 \end{cases}$$

- Corte con el eje Y:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

Como f es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$$\lim_{x \to -\infty} (6x^5 - 12x^3 - 4x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (6x^5 - 12x^3 - 4x) = +\infty$$

$f'(x) = 30x^4 - 36x^2 - 4$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 1{,}14$

- En $(-\infty; -1{,}14) \cup (1{,}14; +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-1{,}14; 1{,}14) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = -1{,}14 \rightarrow f(-1{,}14) = 10{,}79 \rightarrow (-1{,}14; 10{,}79)$ Máximo

$x = 1{,}14 \rightarrow f(1{,}14) = -10{,}79 \rightarrow (1{,}14; -10{,}79)$ Mínimo

$f''(x) = 120x^3 - 72x$

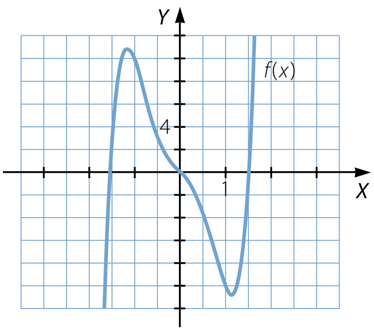
$$f''(x) = 0 \rightarrow x(120x^2 - 72) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 0{,}77 \end{cases}$$

- En $(-\infty; -0{,}77) \cup (0; 0{,}77) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(-0{,}77; 0) \cup (0{,}77; +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$x = -0{,}77 \rightarrow f(-0{,}77) = 6{,}93 \rightarrow (-0{,}77; 6{,}93)$ Punto de inflexión

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Punto de inflexión

$x = 0{,}77 \rightarrow f(0{,}77) = -6{,}93 \rightarrow (0{,}77; -6{,}93)$ Punto de inflexión



b) Dom $g = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$$g(x) = -x^3 + x = 0 \rightarrow x(-x^2 + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \rightarrow (-1, 0), (0, 0), (1, 0)$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

Como g es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + x) = -\infty$$

$$g'(x) = -3x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- En $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente

- En $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

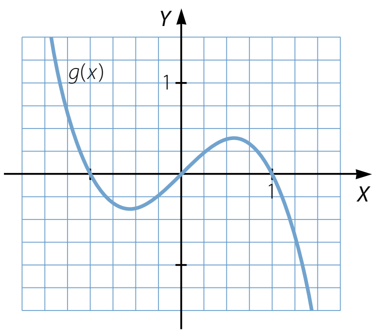
$$x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow g\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \text{ Mínimo}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow g\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \text{ Máximo}$$

$$g''(x) = -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava
- En $(0, +\infty) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa

$x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Punto de inflexión



022 **Representa las siguientes funciones racionales.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + x}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 5}{x} = 0 \rightarrow x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \rightarrow \left(-\sqrt{5}, 0\right), \left(\sqrt{5}, 0\right)$$

- Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 5}{x} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5}{x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 5}{x} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5}{x^2} = 1 \neq 0 \rightarrow m = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 5}{x} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-5}{x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\}$$

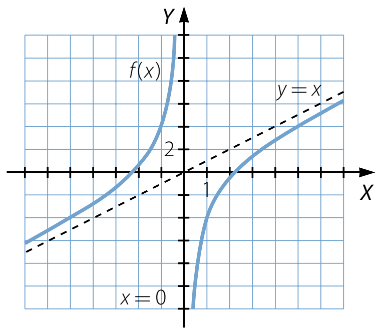
$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = x$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2} > 0 \rightarrow f(x) \text{ creciente}$$

No presenta máximos ni mínimos.

$$f''(x) = \frac{-10}{x^3} \neq 0 \rightarrow f(x) \text{ no presenta puntos de inflexión.}$$



- En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

b) $x^3 + x = 0 \rightarrow x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Dom $g = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X:

$$g(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x^3 + x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{No tiene porque } g(x) \text{ no está definida para } x = 0.$$

- Corte con el eje Y: no tiene porque $g(x)$ no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^3 + x} \rightarrow \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x^2 + 1} = 0 \rightarrow \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^3 + x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^3 + x} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$g'(x) = \frac{-x^4 + x^2}{(x^3 + x)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $(-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

$x = -1 \rightarrow g(-1) = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ Mínimo

$x = 1 \rightarrow g(1) = \frac{1}{2} \rightarrow \left(1, \frac{1}{2}\right)$ Máximo

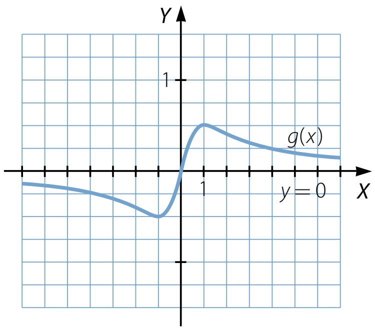
$$g''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow 2x^3 - 6x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava

$x = -\sqrt{3} \rightarrow g\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ Punto de inflexión

$x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Punto de inflexión

$x = \sqrt{3} \rightarrow g\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ Punto de inflexión



023 Representa estas funciones racionales.

a) $f(x) = \frac{x^3 - 3}{x}$ b) $g(x) = \frac{x^4 - 3x}{x}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3 - 3}{x} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{3} \rightarrow \left(\sqrt[3]{3}, 0\right)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 3}{x} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3}{x} = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3}{x} = +\infty \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3}{x^2} = -\infty \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3}{x} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x^3+3}{x^2} = 0 \to 2x^3+3=0 \to x = \sqrt[3]{\frac{-3}{2}} = -1{,}14$$

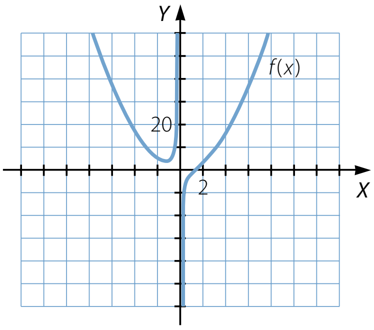
- En $\left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{-3}{2}}\right) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $\left(\sqrt[3]{\frac{-3}{2}}, 0\right) \cup (0, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

$$x = \sqrt[3]{\frac{-3}{2}} \to f\left(\sqrt[3]{\frac{-3}{2}}\right) = \frac{3\sqrt[3]{12^2}}{4} = 3{,}93 \to \left(\sqrt[3]{\frac{-3}{2}}, \frac{3\sqrt[3]{12^2}}{4}\right) \text{ Mínimo}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3-6}{x^3} = 0 \to 2x^3-6=0 \to x = \sqrt[3]{3} \to \left(\sqrt[3]{3}, 0\right)$$

- En $(-\infty, 0) \cup \left(\sqrt[3]{3}, +\infty\right) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava
- En $\left(0, \sqrt[3]{3}\right) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa

$x = \sqrt[3]{3} \to f(\sqrt[3]{3}) = 0 \to \left(\sqrt[3]{3}, 0\right)$ Punto de inflexión



b) Dom $g = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X:

$$g(x) = 0 \to \frac{x^4-3x}{x} = 0 \to x^4 - 3x = 0 \to x(x^3-3) = 0$$
$$\to x = \sqrt[3]{3} \to \left(\sqrt[3]{3}, 0\right)$$

- Corte con el eje Y: no tiene porque $g(x)$ no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4-3x}{x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{4x^3-3}{1} = -3 \to \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4-3x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4-3x}{x} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4-3x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4-3x}{x} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = -\infty$$

$g'(x) = 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

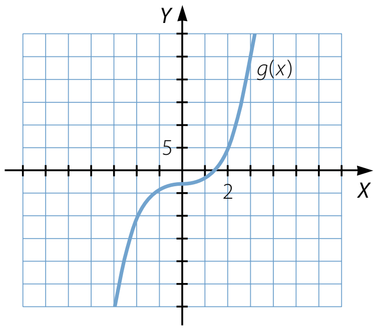
- En $(-\infty, 0) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$g''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava

No presenta puntos de inflexión, ya que en $x = 0$ no está definida la función.



024 **Representa las siguientes funciones con radicales.**

a) $f(x) = \sqrt{x - 3}$ b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$

a) $x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \rightarrow \text{Dom } f = [3, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

No tiene asíntotas verticales porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x - 3} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x - 3}}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

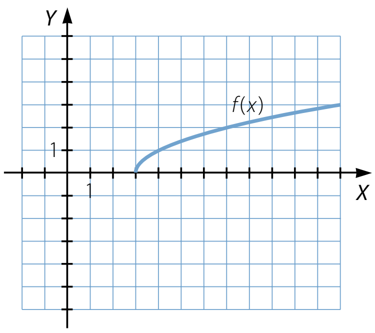
Tiene una rama parabólica: $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x - 3} = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 3}} > 0, \forall x \in (3, +\infty) \rightarrow f(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$f''(x) = \frac{-1}{4(x - 3)\sqrt{x - 3}} < 0, \forall x \in (3, +\infty) \rightarrow f(x)$ convexa

No presenta puntos de inflexión.



b) $x^2 - 7x \geq 0 \to x \in (-\infty, 0] \cup [7, +\infty) \to \text{Dom } g = (-\infty, 0] \cup [7, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $g(x) = 0 \to \sqrt{x^2 - 7x} = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases} \to (0, 0), (7, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 7x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 7x} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x}}{x} = 1 \to m = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 7x} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 7x - x^2}{\sqrt{x^2 - 7x} + x} = \\ \qquad = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-7x}{\sqrt{x^2 - 7x} + x} = \dfrac{-7}{2} \to n = \dfrac{-7}{2} \end{array}\right\}$$

$$\to \text{Asíntota oblicua: } y = mx + n \to y = x - \frac{7}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x}}{x} = -1 \to m = -1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(g(x) + x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 7x} + x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 7x - x^2}{\sqrt{x^2 - 7x} - x} = \\ \qquad = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-7x}{\sqrt{x^2 - 7x} - x} = \dfrac{7}{2} \to n = \dfrac{7}{2} \end{array}\right\}$$

$$\to \text{Asíntota oblicua: } y = mx + n \to y = -x + \frac{7}{2}$$

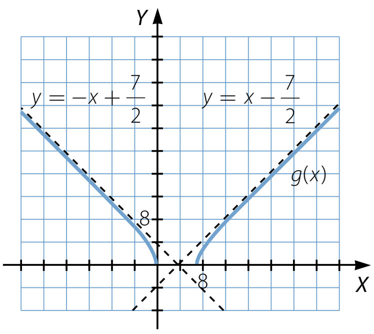
No tiene ramas parabólicas.

$$g'(x) = \frac{2x - 7}{2\sqrt{x^2 - 7x}} = 0 \to x = \frac{7}{2} \notin \text{Dom } g \to \text{No presenta máximos ni mínimos.}$$

- En $(-\infty, 0) \to g'(x) < 0 \to g(x)$ decreciente
- En $(7, +\infty) \to g'(x) > 0 \to g(x)$ creciente

$$g''(x) = \frac{-49}{4(x^2 - 7x)\sqrt{x^2 - 7x}} < 0,\ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (7, +\infty) \to g(x) \text{ convexa}$$

No presenta puntos de inflexión.



025 **Representa estas funciones con radicales.**

a) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$

b) $g(x) = x + \sqrt{x}$

a) $x^3 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2(x-1) \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \rightarrow \text{Dom } f = [1, +\infty)$

- Cortes con el eje X:
$f(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x^3 - x^2} = 0 \rightarrow x^2(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (1, 0)$

- Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 - x^2} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 - x^2}}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 - x^2} = +\infty$

$f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{2\sqrt{x^3 - x^2}} = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(3x - 2) = 0$

$\rightarrow x = 0,\ x = \dfrac{2}{3} \notin \text{Dom } f \rightarrow$ No presenta máximos ni mínimos.

$f'(x) > 0,\ \forall x \in (1, +\infty) \rightarrow f(x)$ creciente

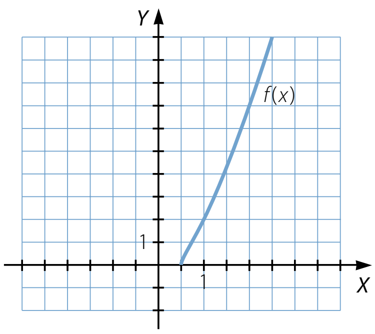
$f''(x) = \dfrac{3x^4 - 4x^3}{4(x^3 - x^2)\sqrt{x^3 - x^2}} = \dfrac{3x^2 - 4x}{4(x-1)\sqrt{x^3 - x^2}} = 0$

$\rightarrow x(3x - 4) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \dfrac{4}{3}$

- En $\left(1, \dfrac{4}{3}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

- En $\left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$x = \dfrac{4}{3} \rightarrow f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{4\sqrt{3}}{9} \rightarrow \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4\sqrt{3}}{9}\right)$ Punto de inflexión



b) Dom $g = [0, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $g(x) = 0 \rightarrow x + \sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

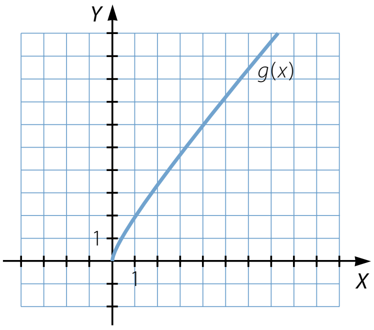
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sqrt{x}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$

$g'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$g''(x) = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}} < 0, \forall x \in (0, +\infty) \rightarrow g(x)$ convexa



026 **Representa las siguientes funciones exponenciales.**

a) $f(x) = e^{-x} + 7$ **b)** $g(x) = 5 + e^{x}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 8 \rightarrow (0, 8)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x} + 7) = 7 \rightarrow$ Asíntota horizontal

$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + 7) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} + 7}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

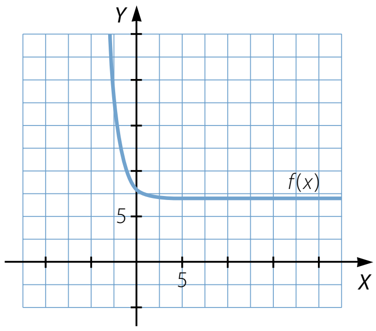
$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + 7) = +\infty$

$f'(x) = -e^{-x} < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

No presenta máximos ni mínimos.

$f''(x) = e^{-x} > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

No presenta puntos de inflexión.



b) Dom $g = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = 6 \rightarrow (0, 6)$

No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (5 + e^x) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5 + e^x) = 5 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 5$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5 + e^x}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

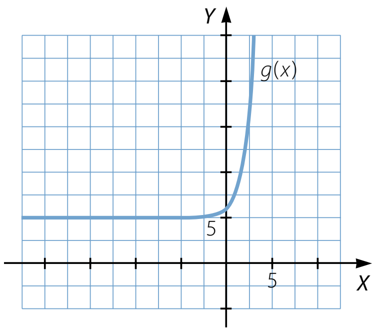
Tiene una rama parabólica:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (5 + e^x) = +\infty$

$g'(x) = e^x > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$g''(x) = e^x > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava y no presenta puntos de inflexión.



027 **Representa estas funciones exponenciales.**

a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ b) $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

a) Dom $f = [0, +\infty)$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = e^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}} = +\infty$

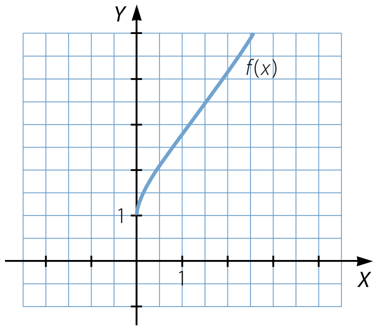
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4x} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}} = 0 \rightarrow \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} = 0 \rightarrow e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) = 0 \rightarrow x = 1$$

- En $(0, 1) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$x = 1 \rightarrow f(1) = e \rightarrow (1, e)$ Punto de inflexión



b) Dom $g = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = e^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{-x^2}{2}} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$g'(x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente

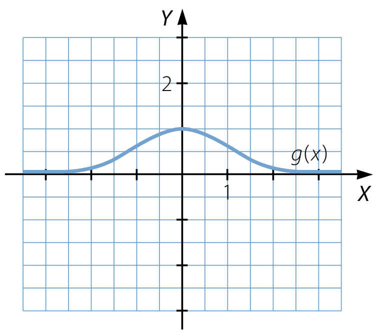
$x = 0 \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow (0, 1)$ Máximo

$g''(x) = -e^{\frac{-x^2}{2}} - xe^{\frac{-x^2}{2}}(-x) = e^{\frac{-x^2}{2}}(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = \pm 1$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava
- En $(-1, 1) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa

$x = -1 \rightarrow f(1) = e^{\frac{-1}{2}} \rightarrow \left(-1, e^{\frac{-1}{2}}\right)$ Punto de inflexión

$x = 1 \rightarrow f(1) = e^{\frac{-1}{2}} \rightarrow \left(1, e^{\frac{-1}{2}}\right)$ Punto de inflexión



028 **Representa las siguientes funciones logarítmicas.**

a) $f(x) = \ln(x+4)$ **b)** $g(x) = \ln(x^2 - 4)$

a) $x + 4 > 0 \rightarrow x > -4 \rightarrow \text{Dom } f = (-4, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $\ln(x+4) = 0 \rightarrow x + 4 = e^0 = 1 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = \ln 4 \rightarrow (0, \ln 4)$

$\lim\limits_{x \to -4^+} \ln(x+4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -4$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+4) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

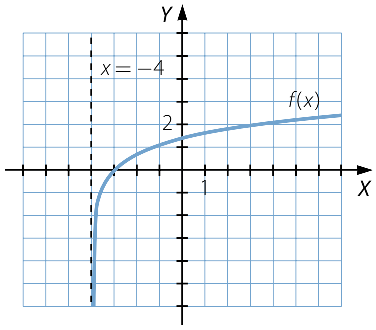
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+4)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+4) = +\infty$

$f'(x) = \dfrac{1}{x+4} > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x+4)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ convexa



b) $x^2 - 4 > 0 \rightarrow (x-2)(x+2) > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

$\rightarrow \text{Dom } g = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $\ln(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x^2 - 4 = e^0 = 1 \rightarrow x^2 = 1 + 4$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{5} \rightarrow \left(-\sqrt{5}, 0\right), \left(\sqrt{5}, 0\right)$

- Corte con el eje Y: no tiene porque $g(x)$ no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} \ln(x^2 - 4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \ln(x^2 - 4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 - 4)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(x^2 - 4)}{x} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

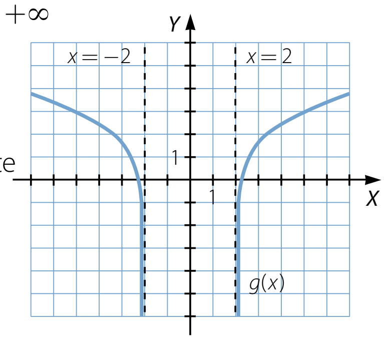
Tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty$

$g'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, -2) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $(2, +\infty) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

$g''(x) = \dfrac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2} < 0 \rightarrow g(x)$ convexa



029 Representa esta función logarítmica: $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$

$x^2 - x + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $\ln(x^2 - x + 1) = 0 \rightarrow x^2 - x + 1 = e^0 = 1 \rightarrow x^2 - x = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (1, 0)$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \ln 1 = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{x} = 0 \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

- En $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

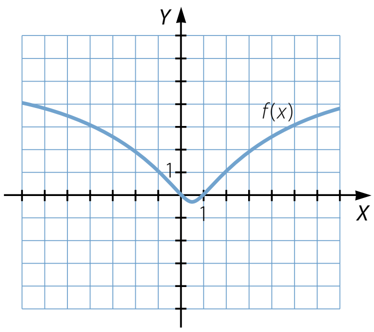
$$x = \frac{1}{2} \rightarrow f(x) = \ln \frac{3}{4} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \ln \frac{3}{4}\right) \text{ Mínimo}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{-2} = -0{,}37;\ x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{-2} = 1{,}37$$

- En $\left(-\infty, \frac{-1 + \sqrt{3}}{-2}\right) \cup \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{-2}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{-2}, \frac{-1 - \sqrt{3}}{-2}\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{-2} \rightarrow f\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{-2}\right) = 0{,}41 \rightarrow (-0{,}37;\ 0{,}41) \text{ Punto de inflexión}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{-2} \rightarrow f\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{-2}\right) = 0{,}41 \rightarrow (1{,}37;\ 0{,}41) \text{ Punto de inflexión}$$



030 Representa la función: $f(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$f(x) = e^{\sqrt{-x}} \to$ Está definida para $x \leq 0 \to \text{Dom } f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = e^{\sqrt{0}} = 1 \to (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\sqrt{-x}} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{\sqrt{-x}}}{x} \to \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-e^{\sqrt{-x}}}{2\sqrt{-x}} \to \dfrac{\infty}{\infty} \\ \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{\sqrt{-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}}{\dfrac{-2}{2\sqrt{-x}}} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{1}{2} e^{\sqrt{-x}} = -\infty \end{array}\right\}$$

$\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene dos ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x + 1 = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^{\sqrt{-x}} = +\infty$$

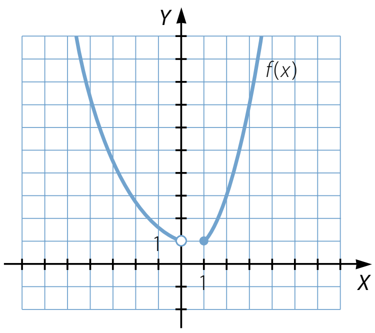
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} \cdot e^{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad f'(x) = 0 \to x = \frac{1}{2}$$

- En $(-\infty, 0) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $(1, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

$$f''(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{-x}} - \dfrac{e^{\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad f''(x) = 0 \to x = -1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava
- En $(-1, 0) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa

$x = -1 \to f(-1) = e \to (-1, e)$ Punto de inflexión



031 Representa la función: $f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{si } -2<x<2\\ \ln(x^2-4) & \text{resto}\end{cases}$

Dom $f=\mathbb{R}-\{-2, 2\}$

- Cortes con el eje X:

  $f(x)=0 \rightarrow (0, 0), \left(-\sqrt{5}, 0\right), \left(\sqrt{5}, 0\right)$

- Corte con el eje Y:

  $x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow (0, 0)$

$\lim\limits_{x\to -2^-} \ln(x^2-4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x=-2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x^2-4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x=2$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^2-4) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty} \ln(x^2-4) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x^2-4)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

- Tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^2-4) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to -\infty} \ln(x^2-4) = +\infty$

- Crecimiento:

  $f'(x)=\begin{cases}-2x & \text{si } -2<x<2\\ \dfrac{2x}{x^2-4} & \text{resto}\end{cases}$

  $f'(x)=0 \rightarrow x=0$

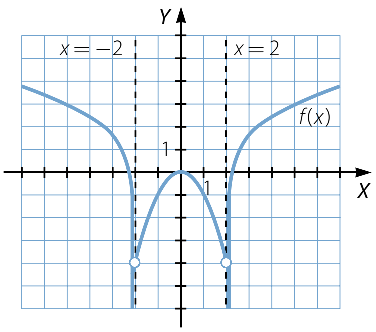
- En $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \rightarrow f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

$x=0 \rightarrow f(0)=0 \rightarrow (0, 0)$ Máximo

- Concavidad:

  $f''(x)=\begin{cases}-2 & \text{si } -2<x<2\\ \dfrac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2} & \text{resto}\end{cases}$

- En $(-2, 2) \rightarrow f''(x)<0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\mathbb{R}-(-2, 2) \rightarrow f''(x)=\dfrac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2}<0 \rightarrow f(x)$ convexa



032 **Representa las siguientes funciones con valor absoluto.**

a) $f(x) = 4x + \left|-x^2 - 18x\right|$ **b)** $g(x) = \left|x^3 + 2x^2 - 6x\right|$

a) $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 18x & \text{si } -x^2 - 18x \geq 0 \\ 4x + x^2 + 18x & \text{si } -x^2 - 18x < 0 \end{cases}$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 14x & \text{si } x \in [-18, 0] \\ x^2 + 22x & \text{si } x \in (-\infty, -18) \cup (0, +\infty) \end{cases}$

Se trata de representar dos parábolas en sus respectivos intervalos.

Puntos de intersección:

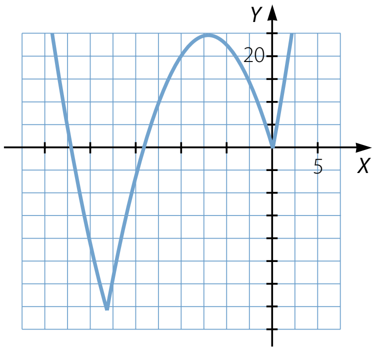
$$-x^2 - 14x = x^2 + 22x \rightarrow 2x^2 + 36x = 0 \rightarrow x(2x + 36) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -18 \end{cases}$$

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$x = -18 \rightarrow y = -72 \rightarrow (-18, -72)$

Vértice de $f(x) = -x^2 - 14x \rightarrow (-7, 49)$

Vértice de $f(x) = x^2 + 22x \rightarrow (-11, -121)$



b) Estudiamos primero la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x$ y tras representarla, dibujamos las partes negativas como positivas haciendo una simetría respecto del eje X.

Dominio $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$$x^3 + 2x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Como f es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{22}}{3} \rightarrow \begin{cases} x = -2{,}23 \\ x = 0{,}9 \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, \frac{-2 - \sqrt{22}}{3}\right) \cup \left(\frac{-2 + \sqrt{22}}{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(\frac{-2 - \sqrt{22}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{22}}{3}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = -2{,}23 \rightarrow f(-2{,}23) = 12{,}24 \rightarrow (-2{,}23;\ 12{,}24)$ Máximo

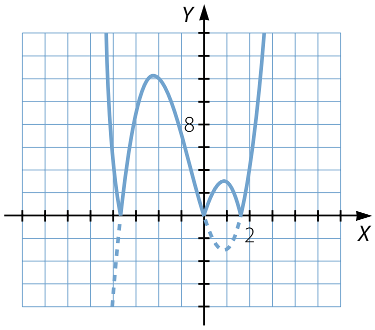
$x = 0{,}9 \rightarrow f(0{,}9) = -3{,}05 \rightarrow (0{,}9;\ -3{,}05)$ Mínimo

$f''(x) = 6x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} = -0{,}67$

- En $\left(-\infty, \frac{-2}{3}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\frac{-2}{3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$x = \frac{-2}{3} \rightarrow f\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{124}{27} = 4{,}59$

$\rightarrow \left(\frac{-2}{3}, \frac{124}{27}\right)$ Punto de inflexión



033 **Representa esta función:** $f(x) = \begin{cases} |-x^2 - 3x| & \text{si } x \leq 0 \\ -e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Representamos $f(x) = -x^2 - 3x$ en el intervalo $(-\infty, 0]$.

  Se trata de una parábola de vértice $\left(\frac{-3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

  Cortes en el eje X: $-x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (-3, 0)$

  Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

  En $(-\infty, -3)$ la función es negativa, por lo que para conseguir el valor absoluto, dibujamos la simétrica respecto al eje X.

- Representamos $f(x) = -e^x$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

  No corta al eje X.

  Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -e^0 = -1 \rightarrow (0, -1)$

  No tiene asíntotas verticales.

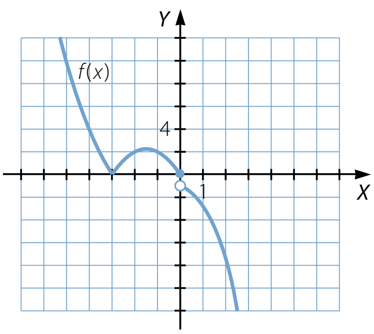
  $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^x = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-e^x}{x} = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^x = -\infty$

  $f'(x) = -e^x < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

  $f''(x) = -e^x < 0 \rightarrow f(x)$ convexa



034 **Halla el dominio de las siguientes funciones polinómicas.**

a) $y = 1 - 2x$ b) $y = x^2 - 2x - 3$ c) $y = x^3 + 4x$ d) $y = (x^2 - 4)^2$

El dominio de cualquier función polinómica es $\mathbb{R}$.

035 **Calcula el dominio de estas funciones racionales.**

a) $y = \dfrac{x-2}{x-3}$ b) $y = \dfrac{3x}{x^2-9}$ c) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

a) $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{3\}$

b) $x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

c) $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{1\}$

036 **Determina el dominio de las siguientes funciones con radicales.**

a) $y = \sqrt{3-x} + 3$ c) $y = \sqrt{x^2 + 25}$

b) $y = \sqrt{16 - x^2}$ d) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

a) $3 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 3 \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, 3]$

b) $16 - x^2 \geq 0 \rightarrow (4 - x)(4 + x) \geq 0 \rightarrow x \in [-4, 4] \rightarrow \text{Dominio} = [-4, 4]$

c) $x^2 + 25 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R}$

d) $x^2 - 2x - 3 \geq 0 \rightarrow (x - 3)(x + 1) \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

$\rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

037 **Halla el dominio de estas funciones exponenciales y logarítmicas.**

a) $y = x^2e^x$ b) $y = 4^{-\frac{1}{x^2}}$ c) $y = \ln(x^2 + 4)$ d) $y = \dfrac{x}{\log_3 x}$

a) $\text{Dominio} = \mathbb{R}$

b) $x \neq 0 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$

c) $x^2 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R}$

d) $\log_3 x = 0 \rightarrow x = 3^0 = 1$. Como $x > 0 \rightarrow \text{Dominio} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

038 **Determina el dominio de las siguientes funciones.**

a) $y = \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$ c) $y = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ e) $y = 2^{-x^2+7}$

b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x - 1}$ d) $y = \ln(5x + x^2)$ f) $y = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$

a) $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $\text{Dominio} = \mathbb{R}$

c) $-x^2 - 2x + 3 \geq 0 \rightarrow -(x + 3)(x - 1) \geq 0 \rightarrow x \in [-3, 1] \rightarrow \text{Dominio} = [-3, 1]$

d) $5x + x^2 > 0 \rightarrow x(5 + x) > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$

$\rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$

e) $\text{Dominio} = \mathbb{R}$

f) $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-1\}$

039 **Encuentra el dominio de estas funciones.**

a) $y = \dfrac{sen\ x}{x - \pi}$ b) $y = tg\ \dfrac{x}{x-1}$ c) $y = arc\ cos\ (x^2 - 3)$ d) $y = x - sen\ x$

a) Dominio $= \mathbb{R} - \{\pi\}$

b) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{\pi}{2} \to 2x = \pi x - \pi \to x = \dfrac{\pi}{\pi - 2} \to x = \dfrac{\pi}{2-\pi} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Además, $x - 1 = 0 \to x = 1$.

Dominio $= \mathbb{R} - \left\{1, \dfrac{\pi}{2-\pi} + k\pi\right\}$ con $k \in \mathbb{Z}$

c) $y = arc\ cos\ x$ está definida en:

$[-1, 1] \to -1 \leq x^2 - 3 \leq 1 \to 2 \leq x^2 \leq 4$

$$\to \begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \to x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right) \\ x^2 - 4 \leq 0 \to x \in [-2, 2] \end{cases}$$

La zona común de ambos intervalos es $\left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right]$ que es el dominio de la función.

d) Dominio $= \mathbb{R}$

040 **Calcula los puntos en que las gráficas de las siguientes funciones cortan a los ejes de coordenadas.**

a) $y = -x^2 - x + 12$ c) $y = x^4 - 8x^2 + 7$ e) $y = \dfrac{3x^2}{x^2 - 1}$

b) $y = x^3 - 4x^2 - x + 4$ d) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

a) • Cortes con el eje X:

$y = 0 \to -x^2 - x + 12 = 0 \to \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases} \to (-4, 0), (3, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 12 \to (0, 12)$

b) • Cortes con el eje X:

$y = 0 \to x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \to \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 4 \end{cases} \to (-1, 0), (1, 0), (4, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 4 \to (0, 4)$

c) • Cortes con el eje X:

$y = 0 \to x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \to \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases} \to (-1, 0), (1, 0), \left(-\sqrt{7}, 0\right), \left(\sqrt{7}, 0\right)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 7 \to (0, 7)$

d) • Cortes con el eje X: $y = 0 \to \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$

e) • Cortes con el eje X: $y = 0 \to \dfrac{3x^2}{x^2 - 1} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$

041 **Halla los puntos de corte con los ejes de las gráficas de estas funciones.**

a) $y = \dfrac{2x-1}{x-x^2}$ b) $y = \dfrac{x^2-9}{e^{x^2}}$ c) $y = \dfrac{\ln x}{x^2-4}$ d) $y = x + e^{-x}$

a) • Cortes con el eje X:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{2x-1}{x-x^2} = 0 \rightarrow 2x-1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

• Corte con el eje Y: no tiene porque la función no está definida para $x = 0$.

b) • Cortes con el eje X:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2-9}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow (-3, 0), (3, 0)$

• Corte con el eje Y: si $x = 0 \rightarrow y = -9 \rightarrow (0, -9)$

c) • Cortes con el eje X:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{\ln x}{x^2-4} = 0 \rightarrow \ln x = 0 \rightarrow x = e^0 = 1 \rightarrow (1, 0)$

• Corte con el eje Y: no tiene porque la función no está definida para $x = 0$.

d) • Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow x + e^{-x} = 0$ para resolver esta ecuación estudiamos y'.

$y' = 1 - e^{-x} = 0 \rightarrow e^{-x} = 1 \rightarrow -x = \ln 1 = 0 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

Así, en $x = 0$ alcanza el único mínimo, (0, 1), por lo que no puede haber puntos de corte con el eje X.

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$

042 **Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+1}$**
Calcular su dominio.

(Aragón. Junio 2007. Opción B. Cuestión 2)

$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

043 **Dada la función: $f(x) = 1 - \dfrac{3x}{x^2-4}$ se pide el dominio y cortes con el eje X.**

(Murcia. Junio 2008. Bloque 3. Cuestión A)

$f(x) = 1 - \dfrac{3x}{x^2-4} = \dfrac{x^2-4-3x}{x^2-4}$

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Cortes con el eje X:

$f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4} = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow (-1, 0), (4, 0)$

044 **¿Cuál es el dominio de la función $y = x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$?**

(La Rioja. Junio 2005. Propuesta A. Ejercicio 2)

Se debe verificar que $\dfrac{x+1}{x-1} \geq 0$. Para ello puede ocurrir:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x > 1 \end{array}\right\} \rightarrow x > 1 \\ \left.\begin{array}{l} x+1 \leq 0 \\ x-1 < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x \leq -1 \\ x < 1 \end{array}\right\} \rightarrow x \leq -1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$$

045 **Si $f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$, indica de forma razonada en qué valor $x = a$ no está definida $f(x)$.**

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 1. Pregunta A)

El numerador está definido para todos los números reales, por tratarse de una diferencia de dos funciones exponenciales cuyos exponentes son funciones polinómicas.

Así, la función no está definida para $x = 0$, ya que en este punto se anula el denominador.

046 **Analiza si estas funciones son simétricas respecto del eje de ordenadas o respecto del origen.**

a) $y = x^3 + x$

b) $y = x^4 - 2x^2 + 5$

c) $y = x^2 - x + 3$

d) $y = \dfrac{3x}{x^2 - 9}$

e) $y = \dfrac{\ln|x|}{x+4}$

f) $y = (2x^2 - 1)^2$

a) $f(-x) = (-x)^3 - x = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$
$\rightarrow$ Simétrica respecto del origen.

b) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 5 = f(x)$
$\rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y.

c) $f(-x) = (-x)^2 - (-x) + 3 = x^2 + x + 3 \rightarrow$ No es simétrica.

d) $f(-x) = \dfrac{3(-x)}{(-x)^2 - 9} = \dfrac{-3x}{x^2 - 9} = -\dfrac{3x}{x^2 - 9} = -f(x)$
$\rightarrow$ Simétrica respecto del origen.

e) $f(-x) = \dfrac{\ln|-x|}{-x+4} = \dfrac{\ln|x|}{-x+4} \rightarrow$ No es simétrica.

f) $f(-x) = \left(2(-x)^2 - 1\right)^2 = (2x^2 - 1)^2 = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y.

047 Estudia si las siguientes funciones son periódicas y, en caso afirmativo, determina su período.

a) $y = \cos 3x$

b) $y = \operatorname{sen}^2 x$

c) $y = \operatorname{sen} 4x$

d) $y = 3\cos x$

e) $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

f) $y = x^2 - \operatorname{sen}^2 x$

a)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
$f(x)$	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1

La función es periódica de período $\frac{2\pi}{3}$.

b)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	0	1	0	1	0

La función es periódica de período π.

c)

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{8}$
$f(x)$	0	1	0	−1	0	1

La función es periódica de período $\frac{2\pi}{4}$.

d)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	3	0	−3	0	3

La función es periódica de período 2π.

e)

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$
$f(x)$	0	1	0	−1	0	1

La función es periódica de período $\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi$.

f) Esta función no es periódica.

048 Halla el dominio de estas funciones y los puntos de corte con los ejes. Razona si son pares o impares, o si no son simétricas.

a) $y = \frac{x-1}{x^2}$

b) $y = x^2 e^{-x}$

c) $y = \sqrt{25 - x^2}$

d) $y = \sqrt{4 - x^2}$

e) $y = 7 - 2x^2$

f) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 7}$

a) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque la función no está definida para $x = 0$.

$f(-x) = \dfrac{-x-1}{(-x)^2} = \dfrac{-x-1}{x^2} \rightarrow$ No es simétrica.

b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{e^x} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{e^{-x}} = x^2e^x \rightarrow$ No es simétrica.

c) $25 - x^2 \geq 0 \rightarrow (5-x)(5+x) \geq 0 \rightarrow x \in [-5, 5] \rightarrow$ Dominio $= [-5, 5]$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \sqrt{25 - x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 5 \rightarrow (-5, 0), (5, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$

$f(-x) = \sqrt{25 - (-x)^2} = \sqrt{25 - x^2} = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y

d) $4 - x^2 \geq 0 \rightarrow (2-x)(2+x) \geq 0 \rightarrow x \in [-2, 2] \rightarrow$ Dominio $= [-2, 2]$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \sqrt{4 - x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0), (2, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0, 2)$

$f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y

e) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow 7 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{7}{2}} \rightarrow \left(-\sqrt{\dfrac{7}{2}}, 0\right), \left(\sqrt{\dfrac{7}{2}}, 0\right)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow (0, 7)$

$f(-x) = 7 - 2(-x)^2 = 7 - 2x^2 = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y

f) $x^2 - 2x + 7 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 7} = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 7 = 0$
  $\rightarrow$ No tiene soluciones para ningún x real $\rightarrow$ No corta con el eje X.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \sqrt{7} \rightarrow \left(0, \sqrt{7}\right)$

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 2(-x) + 7} = \sqrt{x^2 + 2x + 7} \rightarrow$ No es simétrica.

049 **Obtén las ramas parabólicas de estas funciones.**

a) $f(x) = 9x + 6x^2 - x^4$

b) $g(x) = x^3 + 6x^2 - x + 4$

c) $h(x) = -x^4 - 7x^2 + x$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (9x + 6x^2 - x^4) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (9x + 6x^2 - x^4) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 6x^2 - x + 4) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 6x^2 - x + 4) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4 - 7x^2 + x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 - 7x^2 + x) = -\infty$

050 **Determina las asíntotas y las ramas infinitas de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} - 1}$

b) $g(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{3x^3}{x^2 - 4}$

d) $v(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x}$

a) $e^{2x} - 1 = 0 \rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = \ln 1 = 0 \rightarrow x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{e^{2x} - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{e^{2x} - 1} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas, ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

b) $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x - 1}{x + 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 1}{x + 1} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - 1}{x + 1} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 1$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

c) $x^2 + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^3}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^3}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3}{x^2 - 4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3}{x^2 - 4} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3}{x(x^2 - 4)} = 3 \rightarrow m = 3 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \big(h(x) - mx\big) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x^3}{x^2 - 4} - 3x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{12x}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = 3x$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 9}{x} = \infty \to$ Asíntota vertical: $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 9}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 9}{x} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{v(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 9}{x^2} = 1 \to m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(v(x) - mx\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 9}{x} - x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-9}{x} = 0 \to n = 0 \end{array}\right\}$$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = x$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

051 Calcular las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{(2x - 1)^2}{4x^2 + 1}$.

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba B. Cuestión 1)

$4x^2 + 1 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \to$ No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x - 1)^2}{4x^2 - 1} = 1 \to$ Asíntota horizontal: $y = 1$

No tiene asíntotas oblicuas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to \infty$.

052 Se consideran las funciones reales:

$$f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5 \qquad g(x) = 6x^2 - 7x + 2$$

Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 3. Problema 1)

$6x^2 - 7x + 2 = 0 \to x = \dfrac{1}{2}, x = \dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \infty \to$ Asíntota vertical: $x = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \infty \to$ Asíntota vertical: $x = \dfrac{2}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{x(6x^2 - 7x + 2)} = 2 \to m = 2 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} - 2x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{6x^2 + 5x - 5}{6x^2 - 7x + 2}\right) = 1 \to n = 1 \end{array}\right\}$$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = 2x + 1$

053 Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+1}$$

Analizar sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y determinar las que existan.

(Aragón. Junio 2007. Opción B. Cuestión 2)

$$x + 1 = 0 \to x = -1$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x+2)^2}{x+1} = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+2)^2}{x+1} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+2)^2}{x+1} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x+2)^2}{x(x+1)} = 1 \to m = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{(x+2)^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{3x+4}{x+1} = 3 \to n = 3 \end{array}\right\}$$

$$\to \text{Asíntota oblicua: } y = x + 3$$

054 Dada la función:

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{x^2 - 4}$$

se pide:

a) Asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

b) Asíntotas horizontales y oblicuas.

(Murcia. Junio 2008. Bloque 3. Cuestión A)

a) $f(x) = 1 - \dfrac{3x}{x^2-4} = \dfrac{x^2-4-3x}{x^2-4}$ $\qquad x^2 - 4 = 0 \to \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2-4-3x}{x^2-4} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2-4-3x}{x^2-4} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{Asíntota vertical: } x = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-4-3x}{x^2-4} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4-3x}{x^2-4} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{Asíntota vertical: } x = 2$$

b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-4-3x}{x^2-4} = 1 \to$ Asíntota horizontal: $y = 1$

No tiene asíntotas oblicuas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

055 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \log \sqrt[x]{\frac{1+x}{1-x}}$$

Calcular las asíntotas de $f(x)$.

(Aragón. Junio 2008. Bloque 3. Opción A)

Descomponemos la función en otras más sencillas:

$$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \log\frac{1+x}{1-x}$$

Se estudia el dominio de cada factor:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} \rightarrow x \neq 0 \\ \log\dfrac{1+x}{1-x} \rightarrow \dfrac{1+x}{1-x} > 0 \rightarrow x \in (-1, 1) \end{array}\right\} \rightarrow \text{Dom } f = (-1, 1) - \{0\}$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x} \cdot \log\frac{1+x}{1-x} = +\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = -1$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} \cdot \log\frac{1+x}{1-x} = +\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \log\frac{1+x}{1-x} = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - \log(1-x)}{x} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{(1+x)\ln 10} + \dfrac{1}{(1-x)\ln 10}}{x} \neq \infty$$

$\rightarrow$ No tiene asíntota vertical en $x = 0$.

No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas por tener su dominio restringido.

056 **Considera la función definida para $x \neq -2$ por: $f(x) = \dfrac{2x^2+2}{x+2}$**

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) Estudia la posición relativa de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

(Andalucía. Año 2003. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 2)

a) $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2+2}{x+2} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+2}{x+2} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2+2}{x+2} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+2}{x(x+2)} = 2 \rightarrow m = 2 \\ \displaystyle\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2+2}{x+2} - 2x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x+2}{x+2} = -4 \rightarrow n = -4 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = 2x - 4$

b) – Situación de la gráfica con respecto de la asíntota vertical:

- Por la izquierda: $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{2x^2+2}{x+2} = -\infty$
- Por la derecha: $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{2x^2+2}{x+2} = +\infty$

– Situación de la gráfica con respecto a la asíntota oblicua:

- $x \to +\infty \to \dfrac{2x^2+2}{x+2} - (2x-4) = \dfrac{10}{x+2} > 0$
  $\to f(x)$ está por encima de la asíntota.
- $x \to -\infty \to \dfrac{2x^2+2}{x+2} - (2x-4) = \dfrac{10}{x+2} < 0$
  $\to f(x)$ está por debajo de la asíntota.

057 **Halla las asíntotas de la función $y = \dfrac{2x^2+x}{x-1}$.**

(Navarra. Septiembre 2007. Grupo 2. Opción D)

Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$ $\qquad \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2+x}{x-1} = \infty \to$ Asíntota vertical: $x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+x}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2+x}{x-1} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+x}{x(x-1)} = 2 \to m = 2 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^2+x}{x-1} - 2x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x}{x-1} = 3 \to n = 3 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota oblicua: } y = 2x+3$$

058 **Considera $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \dfrac{x(\text{Ln}\, x)^2}{(x-1)^2}$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.**

Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 5. Opción A. Ejercicio 1)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2 + x \cdot 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}}{2(x-1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2 + 2\ln x}{2(x-1)} \to \frac{\infty}{\infty}$$

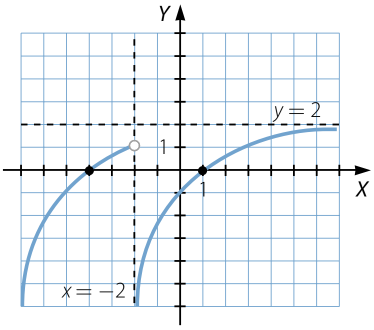
$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2}{x}\ln x + \dfrac{2}{x}}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln x + 2}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + 1}{x} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \to \lim_{x \to +\infty} \frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} = 0$$

$\to$ Asíntota horizontal: $y = 0$

059 Dibuja la gráfica de una función que tenga las siguientes características:

- El dominio es todos los números reales.
- Corta al eje X en los puntos $x = 1$ y $x = -4$.
- Tiene como asíntota vertical la recta $x = -2$.
- La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal si $x \to +\infty$.
- Tiene una rama infinita cuando $x \to -\infty$.



060 De la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{a - x}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, sabemos que pasa por el punto (1, 2), y que tiene una asíntota oblicua cuya pendiente es -6.

a) Determina los valores a y b de la función.

b) Determina, si existen, las asíntotas verticales de dicha función.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2007. Bloque 1. Pregunta B)

a) • Pasa por (1, 2) $\to f(1) = 2 \to \dfrac{a+b}{a-1} = 2 \to a + b = 2a - 2 \to b = a - 2$

• Tiene una asíntota oblicua con pendiente -6:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + b}{x(a-x)} = -6 \to -a = -6 \to a = 6 \to b = 6 - 2 = 4$$

b) $f(x) = \dfrac{6x^2 + 4}{6 - x} \to 6 - x = 0 \to x = 6$

$\lim\limits_{x \to 6} f(x) = \infty \to$ Asíntota vertical: $x = 6$

061 Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de las siguientes funciones.

a) $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$

b) $y = \dfrac{4x^2 + 1}{x}$

c) $y = \dfrac{1}{(x-3)^2}$

d) $y = x^4 - 24x^3$

e) $y = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$

f) $y = \dfrac{x^4 + 2}{x}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 + 12x - 15 = 0 \to \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases}$$

• En $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty) \to y' > 0 \to$ Función creciente

• En $(-5, 1) \to y' < 0 \to$ Función decreciente

En $x = -5$ presenta un máximo y en $x = 1$, un mínimo

b) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

$$y' = \frac{4x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

- En $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\frac{-1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = \frac{-1}{2}$ presenta un máximo y en $x = \frac{1}{2}$, un mínimo.

c) Dominio $= \mathbb{R} - \{3\}$

$y' = \frac{-2}{(x-3)^3} \neq 0$ en todo el dominio $\rightarrow$ No tiene máximos ni mínimos.

- En $(-\infty, 3) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(3, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

d) Dominio $= \mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 - 72x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 18 \end{cases} \qquad y'' = 12x^2 - 144x$$

En $x = 18 \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Presenta un mínimo.

Por tanto, en $(-\infty, 18)$ la función es decreciente y en $(18, +\infty)$, es creciente.

e) Dominio $= \mathbb{R}$

$$y' = \frac{3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3}{2} = 0 \rightarrow 3^x - \frac{1}{3^x} = 0 \rightarrow (3^x)^2 - 1 = 0 \rightarrow 3^x = \pm 1$$

Solo es posible $3^x = 1 \rightarrow x = \log_3 1 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

f) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

$$y' = \frac{3x^4 - 2}{x^2} = 0 \rightarrow 3x^4 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(-\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ presenta un máximo y en $x = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$, un mínimo.

062 **Halla el crecimiento y decrecimiento, y los máximos y los mínimos de estas funciones.**

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ b) $y = \frac{\ln x}{x^2}$ c) $y = \frac{x+4}{x-4}$ d) $y = \frac{x^2}{3^x}$

a) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow x(x-2) \geq 0 \rightarrow$ Dominio $= (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$y' = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = 0 \rightarrow x = 1$ que no está en el dominio.

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

b) Dominio $= (0, +\infty)$

$y' = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \rightarrow 2\ln x = 1 \rightarrow \ln x = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{e}$

- En $\left(0, \sqrt{e}\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\sqrt{e}, +\infty\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = \sqrt{e}$ presenta un máximo.

c) Dominio $= \mathbb{R} - \{4\}$

$y' = \dfrac{-8}{(x-4)^2} < 0$ en $\mathbb{R} - \{4\} \rightarrow$ Función decreciente

d) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = \dfrac{2x - x^2 \ln 3}{3^x} = 0 \rightarrow x(2 - x\ln 3) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \dfrac{2}{\ln 3}$

- En $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{2}{\ln 3}, +\infty\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $\left(0, \dfrac{2}{\ln 3}\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = \dfrac{2}{\ln 3}$ presenta un máximo.

063 **Dada la función: $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x}$**

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) Calcula los máximos y mínimos de f.

(Canarias. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 2)

a) Dominio $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 7x - 3}{e^x} = 0 \rightarrow -2x^2 + 7x - 3 = 0 \rightarrow x = 3,\ x = \dfrac{1}{2}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(\dfrac{1}{2}, 3\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

b) $x = \dfrac{1}{2} \rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right) \rightarrow \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{\sqrt{e}}\right)$ Mínimo

$x = 3 \rightarrow f(3) = \dfrac{9}{e^3} \rightarrow \left(3, \dfrac{9}{e^3}\right)$ Máximo

064 Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+7}$$

¿Tiene máximos o mínimos?

Dom $f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-x^2+4x-1}{(x^2-4x+7)^2} = 0 \rightarrow -x^2+4x-1=0 \rightarrow \begin{cases} x = 2-\sqrt{3} = 0,27 \\ x = 2+\sqrt{3} = 3,73 \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, 2-\sqrt{3}\right) \cup \left(2+\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 2-\sqrt{3}$, $f(x)$ presenta un mínimo y en $x = 2+\sqrt{3}$, un máximo.

065 Dada la función:

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{x^2-4}$$

se pide sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos.

(Murcia. Junio 2008. Bloque 3. Cuestión A)

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{x^2-4} = \frac{x^2-4-3x}{x^2-4}$$

$x^2-4=0 \rightarrow x = \pm 2$

Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2+12}{(x^2-4)^2} > 0$$

Por tanto, $f(x)$ es creciente en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

No presenta máximos ni mínimos.

066 Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+1}$$

Analizar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

(Aragón. Junio 2007. Opción B. Cuestión 2)

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

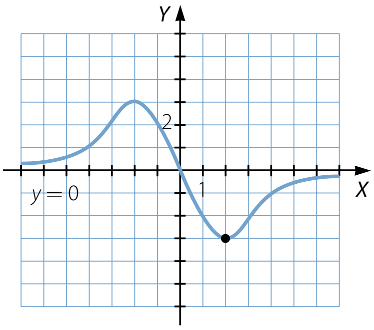
- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-2, -1) \cup (-1, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = -2 \rightarrow f(-2) = 0 \rightarrow (-2, 0)$ Máximo

$x = 0 \rightarrow f(0) = 4 \rightarrow (0, 4)$ Mínimo

067 Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes propiedades:

- Está definida en toda la recta real.
- Es simétrica respecto del origen.
- El eje X es una asíntota horizontal.
- Tiene un mínimo en el punto $(2, -3)$.



068 Considera la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

Determina:

a) Su dominio.
b) Los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
c) Si su gráfica es simétrica respecto del origen o respecto del eje Y.
d) Las asíntotas.
e) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
f) Los máximos y mínimos.

a) $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

c) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = f(x) \rightarrow$ Es simétrica respecto del eje Y.

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 1$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(0, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

f) $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Máximo

No presenta mínimos.

069 Considera la función: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$

a) Estudia su dominio.
b) Halla los puntos en que la gráfica corta a los ejes de coordenadas.
c) Analiza si su gráfica es simétrica respecto del origen o respecto del eje Y.
d) Calcula las asíntotas.
e) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
f) Halla los máximos y mínimos.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

b) Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x+1}{x^2} = 0 \rightarrow x+1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, 0)$

Corte con el eje Y: no tiene.

c) $f(-x) = \dfrac{-x+1}{(-x)^2} = \dfrac{-x+1}{x^2}$

$\rightarrow$ No es simétrica ya que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$.

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x^2} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

e) $f'(x) = \dfrac{-x-2}{x^3} = 0 \rightarrow x = -2$

- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(-2, 0) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

f) $x = -2 \rightarrow f(-2) = \dfrac{-1}{4} \rightarrow \left(-2, \dfrac{-1}{4}\right)$ Mínimo

No presenta máximos.

070 Calcular los valores de a y b para que la función $f(x) = \dfrac{bx}{x-a}$ tenga como asíntota vertical la recta $x = 2$ y como asíntota horizontal la recta $y = 3$.
Razonar si para $a = 2$ y $b = 3$ la función $f(x)$ tiene algún mínimo relativo.

(Aragón. Junio 2006. Opción A. Cuestión 2)

Asíntota vertical $x = 2 \rightarrow a = 2$

Asíntota horizontal $y = 3 \rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{bx}{x-2} = 3 \rightarrow b = 3$

Así, tenemos que: $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$

$f'(x) = \dfrac{-6}{(x-2)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ creciente en $\mathbb{R} - \{2\} \rightarrow$ No puede tener mínimos.

071 Determina los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 6$

b) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$

c) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

d) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6x + 2$

$y'' = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

- En $(-\infty, 1) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(1, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 1$ presenta un punto de inflexión.

b) Dominio $= \mathbb{R} - \{-2\}$

$y' = \dfrac{4}{(x+2)^2}$

$y'' = \dfrac{-8}{(x+2)^3} \neq 0$ en $\mathbb{R} - \{-2\}$

No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, -2) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(-2, +\infty) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

c) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 16x$

$y'' = 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{16}{12}} = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

- En $\left(-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ presenta puntos de inflexión.

d) Dominio $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$y' = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$

$y'' = \dfrac{12x^2+4}{(x^2-1)^3} \neq 0$ en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(-1, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

072 **Halla la concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de estas funciones.**

a) $y = x^2e^x$ b) $y = \dfrac{x}{\ln x}$ c) $y = x - sen\ x$ d) $y = \sqrt{x^2 - 16}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = e^x(2x + x^2)$ $y'' = e^x(2 + 4x + x^2) = 0 \rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$

- En $\left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+\sqrt{2}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = -2 \pm \sqrt{2}$ presenta puntos de inflexión.

b) Dominio $= (0, +\infty) - \{1\}$

$$y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$y'' = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \rightarrow \ln x = 2 \rightarrow x = e^2$$

- En $(0, 1) \cup (e^2, +\infty) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(1, e^2) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = e^2$ presenta un punto de inflexión.

c) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = 1 - cos\ x$ $y'' = sen\ x = 0 \rightarrow x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

- En $(2k', 2k' + 1)$ con $k' \in \mathbb{Z} \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(2k' + 1, 2k')$ con $k' \in \mathbb{Z} \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En los puntos $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ presenta puntos de inflexión.

d) Dominio $= \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$$

$$y'' = \frac{-16}{(x^2 - 16)\sqrt{x^2 - 16}} < 0 \text{ en } (-\infty, -4) \cup (4, +\infty) \rightarrow \text{Función convexa}$$

No presenta puntos de inflexión.

073 **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los de concavidad y convexidad. Halla los máximos y mínimos, y los puntos de inflexión de la función $y = \ln(x^2 + 1)$.**

Dominio $= \mathbb{R}$ $\quad y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

$$y'' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(-1, 1) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = -1$ y en $x = 1$ presenta puntos de inflexión.

074 Para la función $f(x) = x^3 - 7x$, calcula:

a) Los puntos de corte con los ejes.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.

c) Los intervalos de concavidad y convexidad, y los puntos de inflexión.

a) • Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \to x^3 - 7x = 0 \to x(x^2 - 7) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\to \left(-\sqrt{7}, 0\right), (0, 0), \left(\sqrt{7}, 0\right)$$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \to f(0) = 0 \to (0, 0)$

b) Dom $f = \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = 3x^2 - 7 = 0 \to x = \pm\sqrt{\dfrac{7}{3}}$

• En $\left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\dfrac{7}{3}}, +\infty\right) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

• En $\left(-\sqrt{\dfrac{7}{3}}, \sqrt{\dfrac{7}{3}}\right) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

En $x = -\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ presenta un máximo y en $x = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$ un mínimo.

c) $f''(x) = 6x = 0 \to x = 0$

• En $(-\infty, 0) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa

• En $(0, +\infty) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.

075 Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$.

Dominio $= \mathbb{R}$ $\qquad y' = 3x^2 - 6x + 1 = 0 \to x = \dfrac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$

• En $\left(-\infty, \dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}, +\infty\right) \to y' > 0 \to$ Función creciente

• En $\left(\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}, \dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right) \to y' < 0 \to$ Función decreciente

En $x = \dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$ presenta un máximo y en $x = \dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$, un mínimo.

$y'' = 6x - 6 = 0 \to x = 1$

• En $(-\infty, 1) \to y'' < 0 \to$ Función convexa

• En $(1, +\infty) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava

En $x = 1$ presenta un punto de inflexión.

076 Estudia en qué intervalos la función $f(x) = 3x^3 + x^2 - 1$ es creciente o decreciente y en cuáles es cóncava o convexa.

¿Presenta algún máximo o mínimo? ¿Tiene puntos de inflexión? En caso afirmativo, determina las coordenadas de cada uno de ellos.

Dom $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 9x^2 + 2x = 0 \to x(9x + 2) = 0 \to x = 0,\ x = \dfrac{-2}{9}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-2}{9}\right) \cup (0, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente
- En $\left(\dfrac{-2}{9}, 0\right) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

$x = -\dfrac{2}{9} \to f\left(\dfrac{-2}{9}\right) = \dfrac{-239}{243} \to \left(\dfrac{-2}{9}, \dfrac{-239}{243}\right)$ Máximo

$x = 0 \to f(0) = -1 \to (0, -1)$ Mínimo

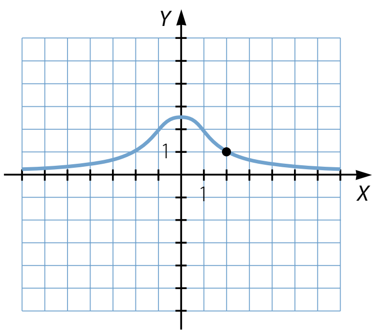
$f''(x) = 18x + 2 = 0 \to x = \dfrac{-2}{18} = \dfrac{-1}{9}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-1}{9}\right) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa
- En $\left(\dfrac{-1}{9}, +\infty\right) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava

$x = \dfrac{-1}{9} \to f\left(\dfrac{-1}{9}\right) = \dfrac{-241}{243} \to \left(\dfrac{-1}{9}, \dfrac{-241}{243}\right)$ Punto de inflexión

077 Dibuja la gráfica de una función que cumpla que:

- Está definida en toda la recta real.
- Es simétrica respecto del eje de ordenadas.
- El eje X es una asíntota horizontal.
- Tiene un punto de inflexión en (2, 1).



078 Estudia el crecimiento y la concavidad de la función $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{Lx}{x}$. (L = logaritmo neperiano)

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 1. Pregunta B)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

- En $(0, e) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(e, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = e$ presenta un máximo.

$$f''(x) = \frac{\frac{-1}{x}x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \frac{-1 - (1 - \ln x)2}{x^3} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3} = 0$$

$$\rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \rightarrow x = \sqrt{e^3}$$

- En $\left(0, \sqrt{e^3}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\sqrt{e^3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = \sqrt{e^3}$ presenta un punto de inflexión.

079 **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones polinómicas, analizando previamente sus características.**

a) $y = x^3 - 4x^2 - x + 4$
b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$
c) $y = x^3 + 3x$
d) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow (-1, 0), (1, 0), (4, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 4x^2 - x + 4) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 4x^2 - x + 4) = +\infty$$

$$y' = 3x^2 - 8x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{19}}{3}$$

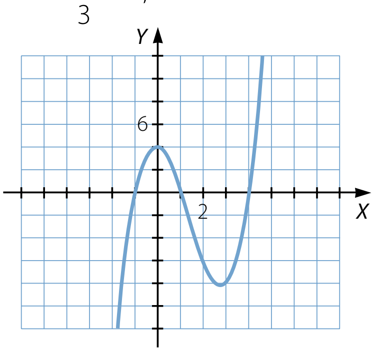
- En $\left(-\infty, \frac{4 - \sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\frac{4 + \sqrt{19}}{3}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\frac{4 - \sqrt{19}}{3}, \frac{4 + \sqrt{19}}{3}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = \frac{4 - \sqrt{19}}{3}$ presenta un máximo y en $x = \frac{4 + \sqrt{19}}{3}$, un mínimo.

$$y'' = 6x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

- En $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = \frac{4}{3}$ presenta un punto de inflexión.



b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: No podemos resolverse la ecuación por Ruffini, así que lo analizamos después.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2 + 12x + 4) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 6x^2 + 12x + 4) = +\infty$

$y' = 3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow x = 2$

- En $(-\infty, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

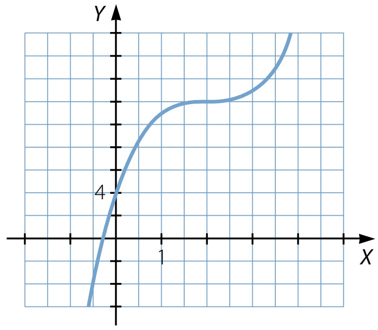
No presenta máximos ni mínimos.

$y'' = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

- En $(-\infty, 2) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(2, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 2$ presenta un punto de inflexión.

Por último, como en $(-\infty, 2)$ la función es creciente, la imagen de 0 es positiva y $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2 + 12x + 4) = -\infty$, hay un punto de corte en $(-\infty, 0)$.



c) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $x^3 + 3x = 0 \rightarrow x(x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 3x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 3x) = +\infty$

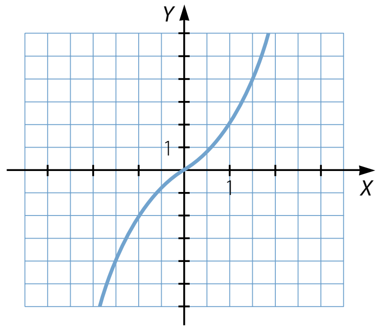
$y' = 3x^2 + 3 \neq 0 \rightarrow$ Función creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$y'' = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.



d) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow (0, 7)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 7) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 7) = +\infty$

$y' = 4x^3 - 16x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

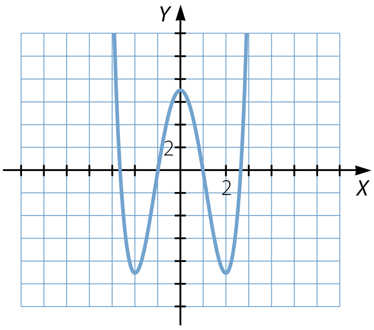
- En $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = -2$ y en $x = 2$ presenta dos mínimos y en $x = 0$, un máximo.

$$y'' = 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{12}} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ presenta puntos de inflexión.



080 a) **Dibujar razonadamente la gráfica de la función $g(x) = x^2 - 4$ cuando $-1 \leq x \leq 4$.**

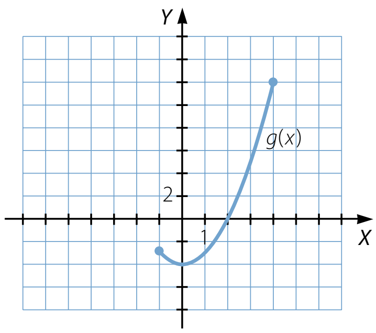
b) **Obtener razonadamente los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = |x^2 - 4|$ en el intervalo $[-1, 4]$.**

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio A. Problema 3)

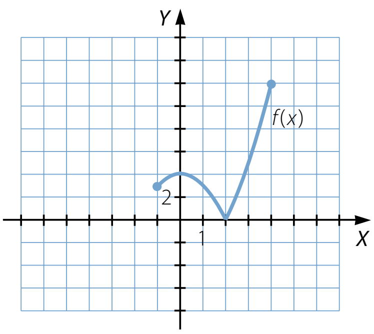
a) Se trata de una parábola de vértice (0, −4) que corta al eje Y en ese mismo punto y que corta al eje X en los puntos (−2, 0) y (2, 0) de los cuales, solo este último está en el intervalo pedido.

$x = -1 \rightarrow y = -3 \rightarrow (-1, -3)$

$x = 4 \rightarrow y = 12 \rightarrow (4, 12)$



b) A partir de la representación anterior, la gráfica de $f(x)$ es la siguiente:



Así, en (−1, 3) y en (2, 0) se alcanzan dos mínimos relativos, siendo el mínimo absoluto el punto (2, 0).

En (0, 4) y en (4, 12) se alcanzan dos máximos relativos, siendo el máximo absoluto el punto (4, 12).

081 La curva de ecuación $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1, 0) y (0, −1) y tiene un mínimo para $x = 2$. Se pide:

a) Encontrar a, b y c.

b) Representación de forma aproximada de dicha curva.

(Murcia. Septiembre 2005. Bloque 3. Cuestión 1)

a) Pasa por el punto $(1, 0) \rightarrow 1 + a + b + c = 0$

Pasa por el punto $(0, -1) \rightarrow c = -1$

$1 + a + b - 1 = 0 \rightarrow a + b = 0 \rightarrow a = -b$

$y' = 3x^2 + 2ax + b$

Tiene un mínimo para $x = 2 \rightarrow y'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0$

$12 + 4a - a = 0 \rightarrow 12 + 3a = 0 \rightarrow 3a = -12 \rightarrow a = -4 \rightarrow b = 4$

Por tanto, la función es: $y = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0 \rightarrow x = 1,\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x - 1) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x - 1) = +\infty$

$y' = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \rightarrow x = 2,\ x = \dfrac{2}{3}$

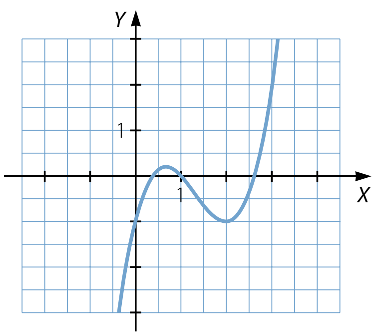
- En $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\dfrac{2}{3}, 2\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = \dfrac{2}{3}$ presenta un máximo y en $x = 2$, un mínimo.

$y'' = 6x - 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{4}{3}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $\left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = \dfrac{4}{3}$ presenta un punto de inflexión.



082 **Calcula razonadamente los valores de a y b para que la función:**

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

tenga un extremo relativo en $x = 2$, un punto de inflexión en $x = 0$ y pase por el punto $(1, -5)$.

Representa gráficamente esta función.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\quad$ $f''(x) = 6x + 2a$

Tiene un extremo relativo en $x = 2$:

$f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0$

Tiene un punto de inflexión en $x = 0$:

$f''(0) = 0 \rightarrow 2a = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow b = -12$

Pasa por el punto $(1, -5)$:

$f(1) = -5 \rightarrow 1 + a + b + c = -5 \rightarrow 1 - 12 + c = -5 \rightarrow c = 6$

Por tanto, la función es:

$f(x) = x^3 - 12x + 6$

Para obtener su representación gráfica, analizamos sus características.

Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

  $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 12x + 6 = 0$

  No podemos resolver la ecuación por Ruffini, ya que no tiene como raíz ninguno de los divisores de 6.

- Corte con el eje Y:

  $x = 0 \rightarrow f(0) = 6 \rightarrow (0, 6)$

Como f es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 6) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 6) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

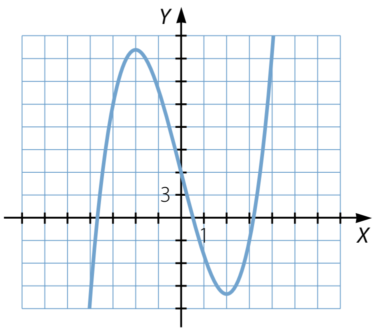
- En $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-2, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -2$ presenta un máximo y en $x = 2$, un mínimo.

$f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

- En$(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.



083 **Dibuja la gráfica de estas funciones racionales, analizando previamente sus características.**

a) $y = \dfrac{x-1}{x^2}$ b) $y = \dfrac{x-2}{x-3}$ c) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ d) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$y' = \dfrac{-x+2}{x^3} = 0 \rightarrow x = 2$

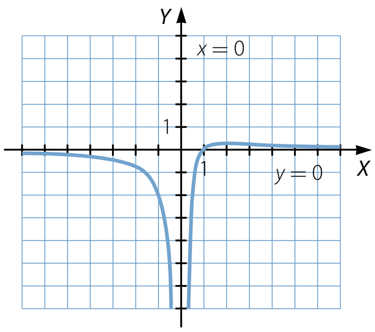
- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 2$ presenta un máximo.

$y'' = \dfrac{2x-6}{x^4} = 0 \rightarrow x = 3$

- En $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(3, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 3$ presenta un punto de inflexión.



b) $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{3\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x-2}{x-3} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{2}{3} \rightarrow \left(0, \dfrac{2}{3}\right)$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-2}{x-3} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 3$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-2}{x-3} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

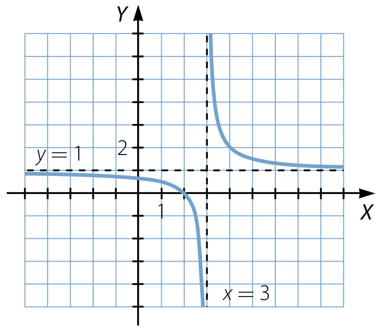
$y' = \dfrac{-1}{(x-3)^2} < 0 \rightarrow$ Función decreciente

No presenta máximos ni mínimos.

$y'' = \dfrac{2}{(x-3)^3} \neq 0$

No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, 3) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(3, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava



c) $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-1\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{x+1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x(x+1)} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1 \rightarrow n = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{Asíntota oblicua:} \\ y = x - 1\end{array}$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

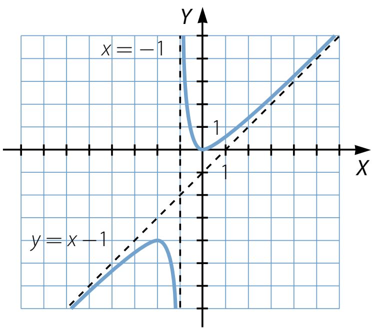
$y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(-2, -1) \cup (-1, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -2$ presenta un máximo y en $x = 0$ un mínimo.

$y'' = \dfrac{2}{(x+1)^3} \neq 0 \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, -1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(-1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava



d) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \frac{x}{x^2+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$y' = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

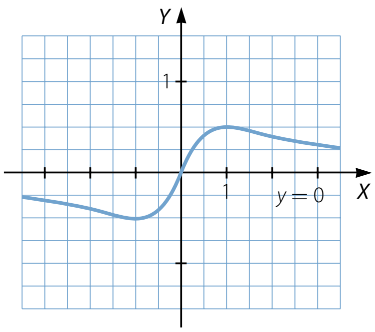
- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(-1, 1) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 1$ presenta un máximo y en $x = -1$, un mínimo.

$$y'' = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow x(2x^2 - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$ presenta puntos de inflexión.



084 **Representa la función: $f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$**

Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene ya que $\frac{3x^2 + x + 3}{x^2+1} \neq 0$ en $\mathbb{R}$.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + x + 3}{x^2+1} = 3 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 3$$

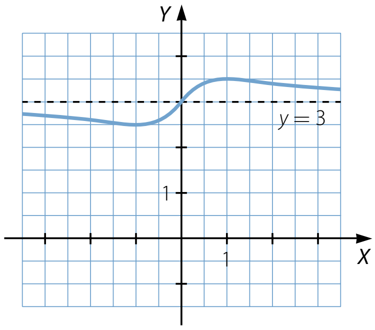
No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(-1, 1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 1$ presenta un máximo y en $x = -1$, un mínimo.

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$



- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \rightarrow f''(x) < 0$
 $\rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0$
 $\rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$ presenta puntos de inflexión.

085 **Dada la función: $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ se pide:**

a) Dominio de definición y cortes con los ejes.
b) Intervalos en los que es positiva y en los que es negativa.
c) Asíntotas.
d) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
e) Representación aproximada.

(Murcia. Junio 2006. Bloque 3. Cuestión A)

a) $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 6 \rightarrow (0, 0)$

b) $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ x^2 - 1 < 0 \rightarrow x \in (-1, 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \text{ en } (-\infty, -1) \cup (0, 1) \\ f(x) > 0 \text{ en } (-1, 0) \cup (1, +\infty) \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 1$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

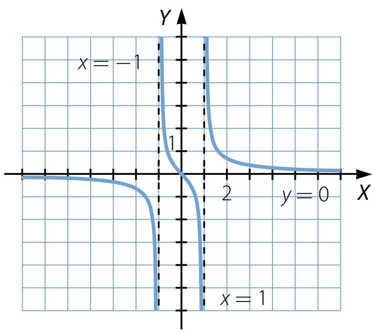
d) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

No presenta máximos ni mínimos.

e) $f''(x) = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, -1) \cup (0, 1) \rightarrow f''(x) < 0$
 $\rightarrow f(x)$ convexa
- En $(-1, 0) \cup (1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0$
 $\rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.



086 Representar la función: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ estudiando previamente su dominio de definición y sus máximos y mínimos locales.

¿Tiene f asíntotas oblicuas? Razonar la contestación en caso negativo y calcular en caso afirmativo.

(País Vasco. Junio 2005. Bloque C. Cuestión C)

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x-1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

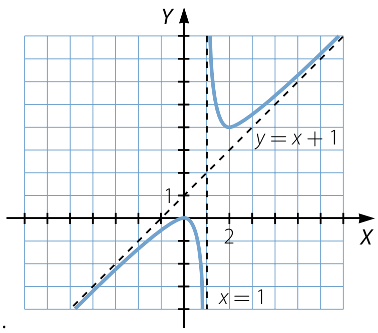
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = 1 \rightarrow n = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = x + 1$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = 0$ presenta un máximo y en $x = 2$, un mínimo.



087 Sea f la función definida por: $f(x) = \dfrac{x^4 + 3}{x}$, para $x \neq 0$

a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f.

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de f.

c) Esboza la gráfica de f.

(Andalucía. Junio 2006. Opción B. Ejercicio 1)

a) • Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^4+3}{x} = 0 \rightarrow x^4+3 \neq 0$

$\rightarrow$ No tiene puntos de corte con este eje.

• Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+3}{x} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4+3}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^4+3}{x} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^4+3}{x^2} = \infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

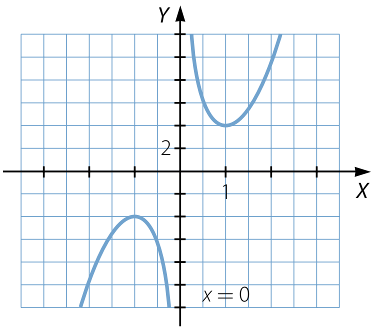
b) $f'(x) = \dfrac{3x^4-3}{x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$

• En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

• En $(-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -1$ presenta un máximo y en $x = 1$, un mínimo.

c)



088 **Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.**

(Madrid. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 3)

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

• Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{2x}{x+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

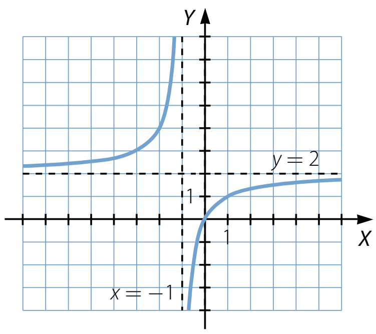
$$\lim_{x\to -1} \frac{2x}{x+1} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = -1$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2x}{x+1} = 2 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 2$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.



089 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1}$ se pide:

a) Dominio y cortes con el eje X.

b) Puntos de discontinuidad, tipos de discontinuidad y asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

c) Asíntotas horizontales y oblicuas.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

e) Representación gráfica aproximada teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores.

(Murcia. Junio 2007. Bloque 3. Cuestión A)

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2(1-x)}{x^2-1} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

El único punto de corte con el eje X es $(0, 0)$ ya que en $x = 1$ la función no está definida.

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

b) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Discontinuidad de salto infinito en } x = -1$$

Tiene una asíntota vertical en $x = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-x^2}{x+1} = \dfrac{-1}{2} \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-x^2}{x+1} = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Discontinuidad evitable en } x = 1$$

c) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2(1-x)}{x(x^2-1)} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2-x^3}{x^2-1} + x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-x}{x^2-1} = 1 \rightarrow n = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = -x + 1$$

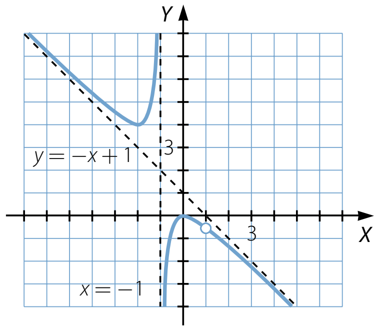
d) $f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2-1} = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(-2, -1) \cup (-1, 0) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = -2$ presenta un mínimo y en $x = 0$, un máximo.

e)



090 **Dibuja la gráfica de estas funciones con radicales, analizando previamente sus características.**

a) $y = \sqrt{2 - x}$ b) $y = 2\sqrt{1 - \dfrac{1}{25}x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ d) $y = -\sqrt{x + 3}$

a) $2 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow$ Dominio $= (-\infty, 2]$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{2 - x} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \sqrt{2} \rightarrow \left(0, \sqrt{2}\right)$

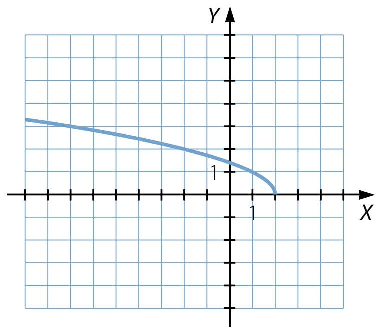
No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2 - x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2 - x}}{x} = 0$
$\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

$y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{2 - x}} < 0 \rightarrow$ Función decreciente

$y'' = \dfrac{-1}{2(2 - x)\sqrt{2 - x}} < 0$
$\rightarrow$ Función convexa



b) $1 - \dfrac{x^2}{25} \geq 0 \rightarrow x \in [-5, 5] \rightarrow$ Dominio $= [-5, 5]$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{25}} = 0 \rightarrow 25 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 5 \rightarrow (-5, 0), (5, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0, 2)$

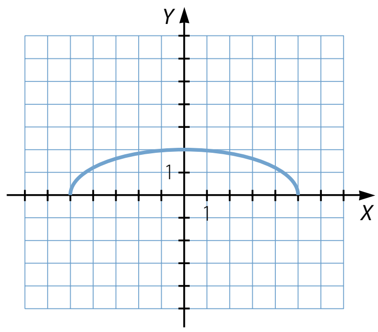
No tiene asíntotas.

$y' = \dfrac{-4x}{10\sqrt{25 - x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-5, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(0, 5) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = 0$ presenta un máximo.

$y'' = \dfrac{-100}{10(25 - x^2)\sqrt{25 - x^2}} < 0$
$\rightarrow$ Función convexa



c) $x^2 - 9 \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \rightarrow$ Dominio $= (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{x^2 - 9} = 0 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow (-3, 0), (3, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 9} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 9} = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-9} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x} = 0 \rightarrow n = 0\end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x} = 1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-9} + x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x} = 0 \rightarrow n = 0\end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = -x$

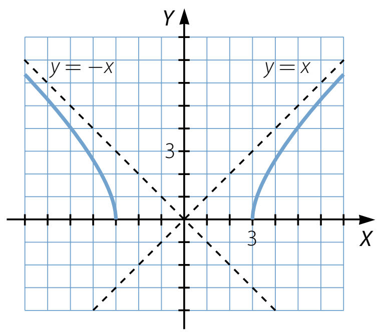
$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, -3) \rightarrow y' < 0$
  $\rightarrow$ Función decreciente
- En $(3, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

$$y'' = \frac{-9}{(x^2 - 9)\sqrt{x^2 - 9}} < 0$$

$\rightarrow$ Función convexa

No presenta puntos de inflexión.



d) $x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow$ Dominio $= [-3, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $-\sqrt{x + 3} = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -\sqrt{3} \rightarrow \left(0, -\sqrt{3}\right)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} -\sqrt{x + 3} = -\infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-\sqrt{x + 3}}{x} = 0$$

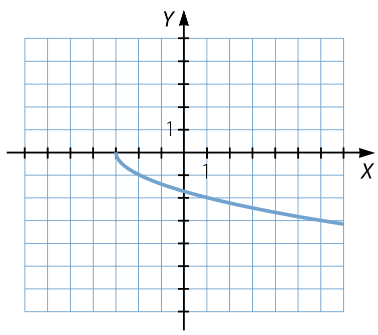
$\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{x + 3}} < 0 \rightarrow \text{Función decreciente.}$$

$$y'' = \frac{1}{4(x + 3)\sqrt{x + 3}} > 0$$

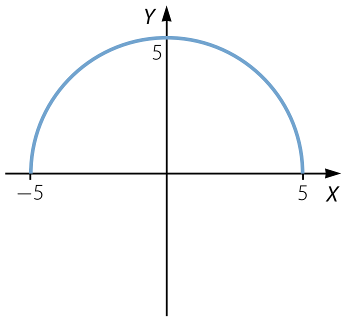
$\rightarrow$ Función cóncava.

No presenta puntos de inflexión.

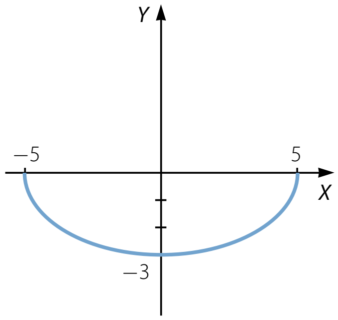


091 Escribe la función a la que corresponde cada una de las siguientes gráficas:

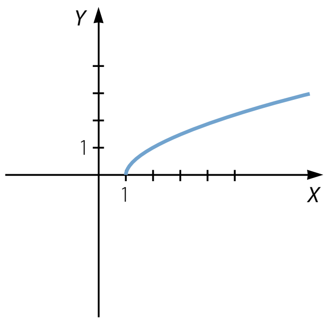
GRÁFICA 1



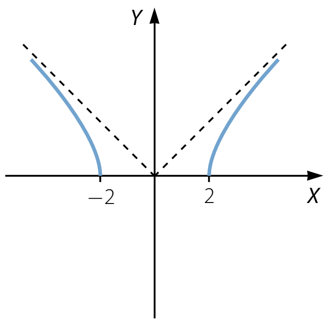
GRÁFICA 2



GRÁFICA 3



GRÁFICA 4



Gráfica 1: $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

Gráfica 2: $g(x) = -3\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{25}}$

Gráfica 3: $h(x) = \sqrt{x - 1}$

Gráfica 4: $j(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

092 **Dibuja la gráfica de estas funciones, analizando previamente sus características.**

a) $y = xe^x$

b) $y = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2}$

c) $y = 3x^2e^{-x}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{e^{x^2}}$

e) $y = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$

f) $y = e^{1-x^2}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $xe^x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x \rightarrow \infty \cdot 0 \rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} -e^x = 0$$

$\rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

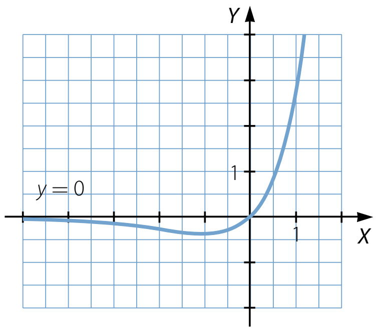
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

$y' = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$y' = 0 \rightarrow x = -1$

- En $(-\infty, -1) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(-1, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = -1$ presenta un mínimo.



$y'' = e^x(1 + x) + e^x$

$y'' = 0 \rightarrow 1 + x + 1 = 0$

$\rightarrow x = -2$

- En $(-\infty, -2) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(-2, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = -2$ presenta un punto de inflexión.

b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene ya que $\dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = 0 \rightarrow \dfrac{1}{e^x} + e^x \neq 0$.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{1+1}{2} = 1 \rightarrow (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = +\infty$$

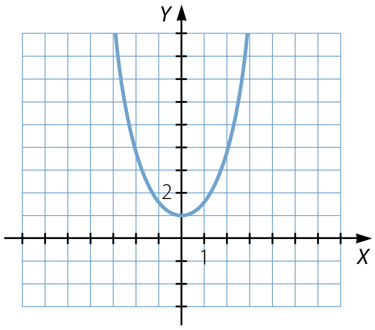
$$y' = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = 0 \rightarrow e^{x} = e^{-x} \rightarrow x = -x \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0$ $\rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

$$y'' = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} > 0 \rightarrow \text{Función cóncava}$$

No presenta puntos de inflexión.



c) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $3x^2e^{-x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{e^{x}} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} 3x^2e^{-x} = +\infty \rightarrow \text{No tiene asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3xe^{-x} = -\infty \rightarrow \text{No tiene asíntota oblicua.}$$

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2e^{-x} = +\infty$

$$y' = e^{-x}(6x - 3x^2) = 0 \rightarrow x(6 - 3x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

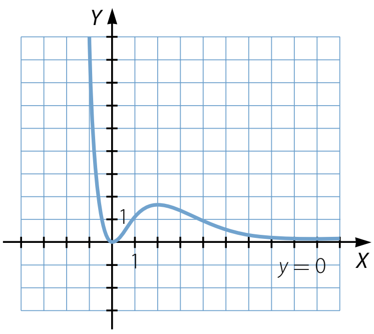
- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo y en $x = 2$, un máximo.

$$y'' = e^{-x}(3x^2 - 12x + 6) = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$$

- En $\left(-\infty, 2 - \sqrt{2}\right) \cup \left(2 + \sqrt{2}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = 2 \pm \sqrt{2}$ presenta dos puntos de inflexión.



d) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $\frac{x^2-1}{e^{x^2}} = 0 \to x = \pm 1 \to (-1, 0), (1, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = -1 \to (0, -1)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{h \to \infty} \frac{x^2-1}{e^{x^2}} = 0 \to \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$y' = \frac{2x-(x^2-1)2x}{e^{x^2}} = \frac{4x-2x^3}{e^{x^2}} = 0 \to x(4-2x^2) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

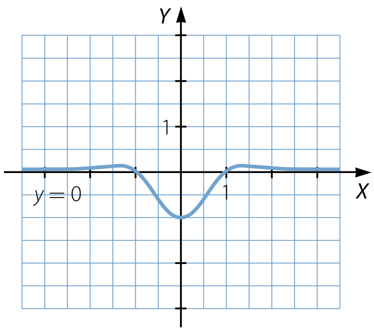
- En $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right) \to y' > 0 \to$ Función creciente
- En $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \to y' < 0 \to$ Función decreciente

En $x = \pm\sqrt{2}$ presenta dos máximos y en $x = 0$, un mínimo.

$$y'' = \frac{4x^4-14x^2+4}{e^{x^2}} = 0 \to \begin{cases} x = \pm 0,56 \\ x = 3,17 \end{cases}$$

- En $(-\infty; -3,17) \cup (-0,56; 0,56) \cup (3,17; +\infty) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava
- En $(-3,17; -0,56) \cup (0,56; 3,17) \to y'' < 0 \to$ Función convexa

En $x = -0,56$; $x = 0,56$ y $x = 3,17$ presenta puntos de inflexión.



e) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \to \frac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \to x = -1 \to (-1, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 1 \to (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \to \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty \to \text{No tiene asíntota horizontal cuando } x \to -\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^2}{xe^x} = -\infty \to \text{No tiene asíntota oblicua.}$$

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty$

$$y' = \frac{2x+2-(x+1)^2}{e^x} = \frac{-x^2+1}{e^x} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

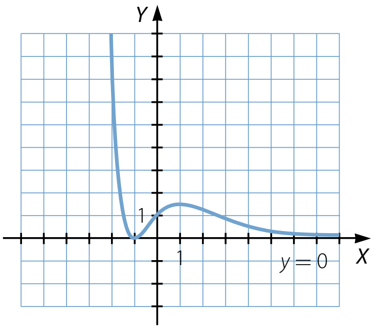
- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(-1, 1) \rightarrow y' > 0 \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = -1$ presenta un mínimo y en $x = 1$ un máximo.

$$y'' = \frac{-2x+x^2-1}{e^x} = 0 \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

- En $\left(-\infty, 1-\sqrt{2}\right) \cup \left(1+\sqrt{2}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = 1 \pm \sqrt{2}$ presenta puntos de inflexión.



f) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = e \rightarrow (0, e)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to \infty} e^{1-x^2} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$y' = (-2x)e^{1-x^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

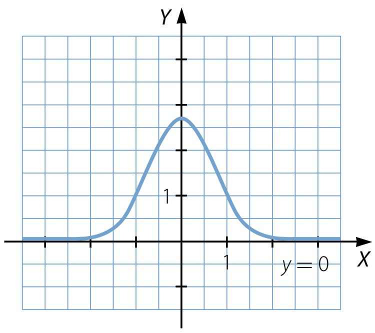
- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = 0$ presenta un máximo.

$$y'' = -2e^{1-x^2} - 2x(-2x)e^{1-x^2} = 0 \rightarrow 4x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0$
  $\rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow y'' < 0$
  $\rightarrow$ Función convexa

En $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ presenta puntos de inflexión.



093 **Sea la función $f(x) = x + e^{-x}$.**
Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas. Esbozar su gráfica.

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba B. Problema 2)

Dom $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 - e^{-x} = 0 \rightarrow e^{-x} = 1 \rightarrow e^{-x} = e^0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

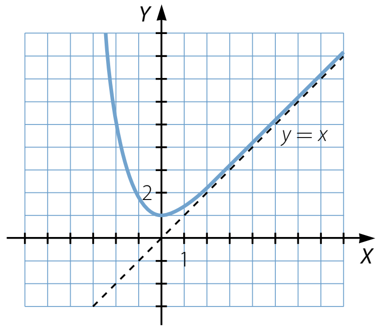
$f''(x) = e^{-x} > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

No presenta puntos de inflexión.

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} (x + e^{-x}) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x + e^{-x}) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + e^{-x}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x + e^{-x} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \rightarrow n = 0\end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = x$$



Cuando $x \rightarrow -\infty$ no existe el valor de n por lo que no tiene asíntota oblicua.

Tiene una rama parabólica:

$$\lim_{x \to -\infty} (x + e^{-x}) = +\infty$$

094 **Sea la función $f(x) = x^2 e^x$. Calcula sus asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión. Represéntala gráficamente.**

(La Rioja. Junio 2007. Propuesta A. Ejercicio 5)

Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $x^2 e^x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^x = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x \rightarrow \infty \cdot 0 \rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$\rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^x = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota oblicua.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^x = +\infty$

$f'(x) = e^x(2x + x^2) = 0 \to x(2 + x) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

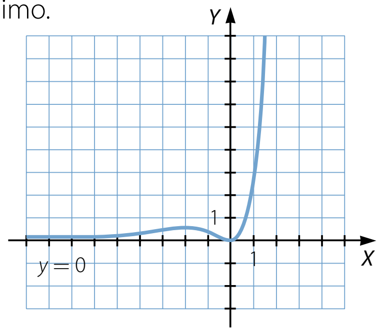
- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente
- En $(-2, 0) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

En $x = -2$ presenta un máximo y en $x = 0$, un mínimo.

$f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2) = 0 \to x = -2 \pm \sqrt{2}$

- En $\left(-\infty, -2 - \sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + \sqrt{2}, +\infty\right)$
  $\to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava
- En $\left(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}\right) \to f''(x) < 0$
  $\to f(x)$ convexa

En $x = -2 \pm \sqrt{2}$ presenta puntos de inflexión.



095 **Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x - 1)^2 e^{-x}$.**

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si existen, sus extremos relativos o locales y sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

c) Esboza la gráfica de f.

(Andalucía. Septiembre 2005. Opción A. Ejercicio 2)

a) Dom $f = \mathbb{R}$

No hay asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)^2 e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-1)^2}{e^x} = 0 \to$ Asíntota horizontal: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)^2 e^{-x} = +\infty \to$ No tiene asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-1)^2 e^{-x}}{x} = +\infty \to$ No tiene asíntota oblicua.

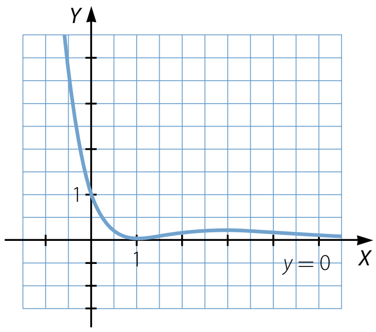
b) $y' = e^{-x}\left(2x - 2 - (x-1)^2\right) = e^{-x}(-x^2 + 4x - 3) = 0 \to \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

- En $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $(1, 3) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

En $x = 1$ presenta un mínimo y en $x = 3$, un máximo.

c) Para esbozar la gráfica nos faltan los puntos de corte:

- Con el eje X:
  $(x-1)^2 e^{-x} = 0 \to x = 1 \to (1, 0)$
- Con el eje Y:
  $x = 0 \to y = 1 \to (0, 1)$



096 **Dibuja la gráfica de estas funciones, analizando previamente sus características.**

a) $y = x \ln x$ b) $y = \log_2 (x^2 + 1)$ c) $y = \ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ d) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

a) Dominio $= (0, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $x \ln x = 0 \rightarrow x = 0$, como no está en el dominio, no tiene cortes con este eje.
- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0 \rightarrow \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \ln x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \ln x = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$

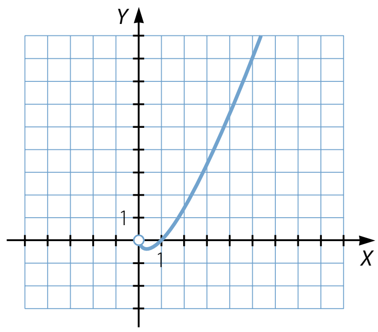
$y' = 1 + \ln x = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} \rightarrow x = \dfrac{1}{e}$

- En $\left(0, \dfrac{1}{e}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = \dfrac{1}{e}$ presenta un mínimo.

$y'' = \dfrac{1}{x} > 0 \rightarrow$ Función cóncava

No presenta dos puntos de inflexión.



b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $\log_2 (x^2 + 1) = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 1 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \log_2 1 = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \log_2(x^2 + 1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \log_2(x^2 + 1) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log_2 (x^2 + 1)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 (x^2 + 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \log_2 (x^2 + 1) = +\infty$

$$y' = \frac{2x}{\ln 2(x^2+1)} = 0 \rightarrow x = 0$$

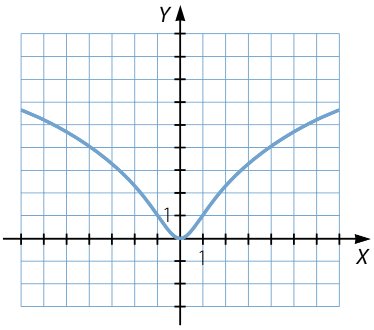
- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

$$y'' = \frac{2-2x^2}{\ln 2(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(-1, 1) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = \pm 1$ presenta dos puntos de inflexión.



c) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$$\ln \frac{e^x+e^{-x}}{2} = 0 \rightarrow \frac{e^x+e^{-x}}{2} = e^0 = 1 \rightarrow e^x + e^{-x} = 2$$
$$\rightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = \ln 1 = 0 \rightarrow (0, 0)$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \ln \frac{1+1}{2} = \ln 1 = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \ln \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} - x\right) = -0,69 \rightarrow n = -0,69 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{Asíntota oblicua:} \\ y = x - 0,69\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}{x} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\ln \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} + x\right) = -0,69 \rightarrow n = -0,69 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\text{Asíntota oblicua:} \\ y = -x - 0,69\end{array}$$

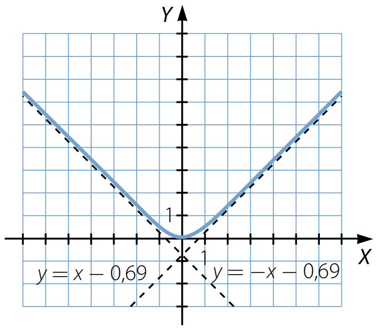
$$y' = \frac{2\left(\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right)}{e^x + e^{-x}} = 0 \to e^x - \frac{1}{e^x} = 0 \to e^{2x} = 1 \to e^x = 1 \to x = \ln 1 = 0$$

- En $(-\infty, 0) \to y' < 0$
  $\to$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \to y' > 0$
  $\to$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

$$y'' = \frac{4e^{-x}e^x}{e^{-2x} + 2e^{-x}e^x + e^{2x}} > 0$$
$\to$ Función cóncava

No presenta puntos de inflexión.



d) Dominio $= (0, +\infty) - \{1\}$

- Cortes con el eje X: $\frac{x}{\ln x} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{\ln x} = \infty \to$ Asíntota vertical: $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0 \to$ No tiene asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x \ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

$$y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \to \ln x = 1 \to x = e$$

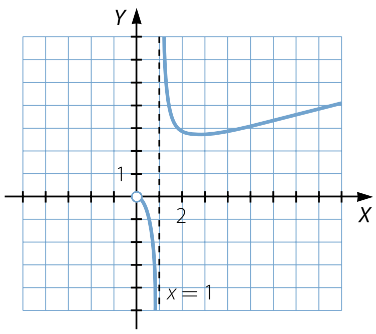
- En $(0, 1) \cup (1, e) \to y' < 0 \to$ Función decreciente
- En $(e, +\infty) \to y' > 0 \to$ Función creciente

En $x = e$ presenta un mínimo.

$$y'' = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \to \ln x = 2 \to x = e^2$$

- En $(0, 1) \cup (e^2, +\infty) \to y'' < 0$
  $\to$ Función convexa
- En $(1, e^2) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava

En $x = e^2$ presenta un punto de inflexión.



097 Sea $f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x^2}$ con $x \in (0, +\infty)$. Se pide:

Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y las asíntotas. Esbozar su gráfica.

Dom $f = (0, +\infty)$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{\ln x}{x^2}\right) = -\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1 \rightarrow \text{Asíntotas horizontales: } y = 1$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \rightarrow 1 = 2\ln x \rightarrow x = \sqrt{e}$$

- En $\left(0, \sqrt{e}\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(\sqrt{e}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = \sqrt{e}$ presenta un máximo.

$$f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4} = 0 \rightarrow x = \sqrt[6]{e^5}$$

- En $\left(0, \sqrt[6]{e^5}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\sqrt[6]{e^5}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = \sqrt[6]{e^5}$ presenta un punto de inflexión.

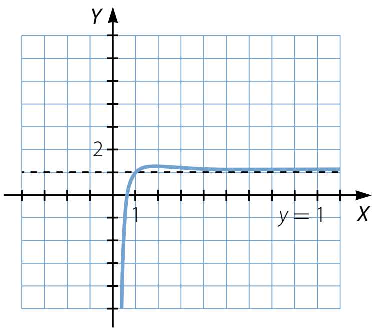
- Cortes con el eje X:

  $f(x) = 0 \rightarrow 1 + \dfrac{\ln x}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 + \ln x = 0$

  $$\left.\begin{array}{l} f(0,1) < 0 \\ f(1) > 0 \\ f(x) \text{ continua } [0,1;\ 1] \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{T. Bolzano}} \text{Existe una raíz en ese intervalo.}$$

  Esta raíz es única porque $f(x)$ es creciente en $\left(0, \sqrt{e}\right)$ y decreciente en $\left(\sqrt{e}, +\infty\right)$, y tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.



098 Sea $f(x) = 2 - x + \ln x$, con $x \in (0, +\infty)$. Se pide:

Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas de *f*. Esbozar la gráfica de *f*.

(Castilla y León. Septiembre 2008. Prueba B. Problema 2)

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x} = 0 \rightarrow -x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

- En $(-\infty, 1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = 1$ presenta un máximo.

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \rightarrow f(x) \text{ convexa.}$$

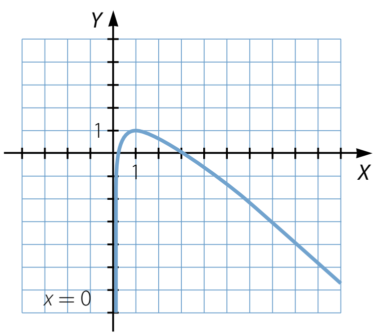
No presenta puntos de inflexión.

$$\lim_{x \to 0^+} (2 - x + \ln x) = -\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (2 - x + \ln x) = -\infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - x + \ln x}{x} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x \to +\infty} (2 - x + \ln x + x) = \lim_{x \to +\infty} (2 + \ln x) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - x + \ln x) = -\infty$



099 **Estudia las características de esta función definida a trozos y dibuja su gráfica.**

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

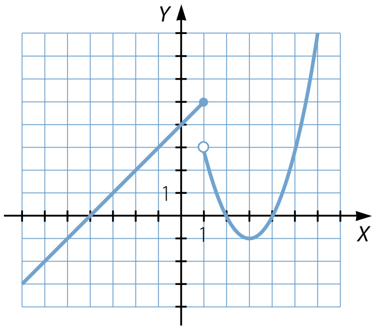
Dom $f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^+} (x^2 - 6x + 8) = 3 \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^-} (x + 4) = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Discontinuidad de salto finito en } x = 1$$

- En $(-\infty, 1] \rightarrow$ Recta que pasa por $(-4, 0)$ y $(1, 5)$
- En $(1, +\infty) \rightarrow$ Parábola de vértice $(3, -1)$

Cortes con eje X: $x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

En $x = 1 \rightarrow f(1) = 3$



100 **Dibuja la gráfica de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \leq x < 4 \\ x^2 - 2x - 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- En $(-\infty, -5)$ la función no está definida.

$$\left.\begin{array}{l} f(4) = 16 - 8 - 5 = 3 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} (x^2 - 2x - 5) = 16 - 8 - 5 = 3 \\ \lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ continua en } x = 4$$

- En $[-5, 4) \rightarrow f(x) = \sqrt{25 - x^2}$:

  $x = -5 \rightarrow y = 0 \rightarrow (-5, 0)$

  $x = 4 \rightarrow y = 3 \rightarrow (4, 3)$

  No tiene asíntotas en el intervalo en el que está definida.

  $$y' = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$$

  En $[-5, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

  En $(0, 4) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

  En $x = 0$ presenta un máximo.

  $$y'' = \frac{-25}{\sqrt{25 - x^2}} < 0 \rightarrow \text{Función convexa}$$

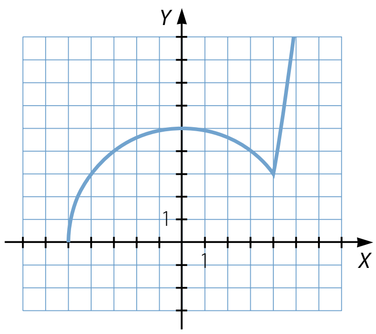
- En $[4, +\infty) \rightarrow f(x) = x^2 - 2x - 5$

  Parábola de vértice $(1, -6)$.

  No tiene cortes con los ejes en el intervalo en el que está definida.

  $x = 4 \rightarrow y = 3 \rightarrow (4, 3)$

  $$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x - 5) = +\infty$$



101 Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de definición, estudie su continuidad y halle sus asíntotas.
b) Esboce una gráfica de la función.

(Asturias. Junio 2008. Bloque 5)

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{Discontinuidad de salto infinito en } x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 4 - 3 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 3) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-1} = 1 \end{array}\right\} \to \text{Continua en } x = 2$$

Así, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = 1$$

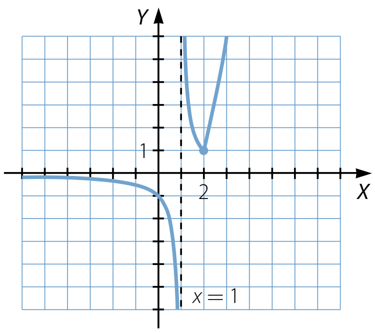
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \to \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3) = +\infty \to \text{Rama parabólica por ser función polinómica.}$$

b) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- En $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $(2, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

$$x = 2 \to \left\{\begin{array}{l} f'(2^-) = \dfrac{-1}{(2-1)^2} = -1 \\ f'(2^+) = 2 \cdot 2 = 4 \end{array}\right. \to \text{No derivable}$$



102 Se considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -4 \\ x + 2 & \text{si } -4 \le x < 2 \\ \dfrac{8}{x} & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$

Representar gráficamente la función.

(La Rioja. Junio 2004. Opción A. Ejercicio 5)

Dom $f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -4^-} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -4^+} (x + 2) = -2 \end{array}\right\} \to \text{Discontinuidad de salto finito en } x = -4$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = \dfrac{8}{2} = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{8}{x} = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 2) = 4 \end{array}\right\} \to \text{Continua en } x = 2$$

Así, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-4\}$.

- En $(-\infty, -4) \to f(x) = -1 \to$ Función constante
- En $[-4, 2) \to f(x) = x + 2 \to$ Recta que pasa por $(-4, -2)$ y $(2, 4)$
- En $[2, +\infty) \to f(x) = \dfrac{8}{x} \to$ Definida en todo el intervalo

  No corta a ninguno de los dos ejes.

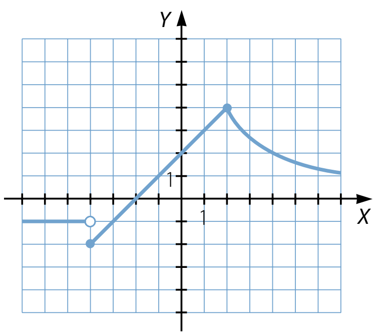
  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8}{x} = 0 \to$ Asíntota horizontal: $y = 0$

  No tiene asíntotas oblicuas.

  $f'(x) = \dfrac{-8}{x^2} < 0 \to$ Función decreciente

  $f''(x) = \dfrac{16}{x^3} > 0 \to$ Función cóncava



103 Estudia si la función $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\le -1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1<x\le 2 \\ -3 & \text{si } 2<x \end{cases}$ es continua en los puntos $x=-1$ y $x=2$.

Representa gráficamente dicha función.

(Castilla-La Mancha. Junio 2005. Bloque 1. Pregunta A)

Dom $f=\mathbb{R}$

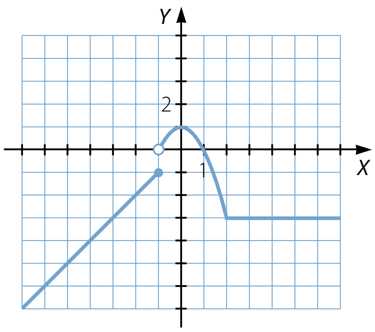
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} x=-1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} 1-x^2=0 \end{array}\right\}\to \text{Discontinuidad de salto finito en } x=-1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=1-4=-3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} 1-x^2=-3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} -3=-3 \end{array}\right\}\to \text{Continua en } x=2$$

Así, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$.

- En $(-\infty,-1]\to f(x)=x\to$ Recta que pasa por $(-1,-1)$ y $(-2,-2)$
- En $(-1,2]\to f(x)=1-x^2\to$ Parábola de vértice $(0,1)$

  Cortes con el eje X: $1-x^2=0\to\begin{cases} x=-1 \\ x=0 \end{cases}$
- En $(2,+\infty)\to f(x)=-3\to$ Función constante



104 Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} sen\ x & \text{si } x\le 0 \\ x^2+bx & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Para $b=-2$ y el intervalo $[-2\pi,3]$, determina los puntos de corte con los ejes, los extremos relativos (máximos y mínimos), la curvatura y dibuja la gráfica de la función f.

(Cantabria. Junio 2007. Bloque 2. Opción A)

Dom $f=[-2\pi,3]$

- Cortes con el eje X: $\begin{cases} sen\ x=0\to x=0,\ x=-\pi,\ x=-2\pi \\ x^2-2x=0\to x(x-2)=0\to x=2 \end{cases}$
- Corte con el eje Y: $x=0\to y=sen\,0=0$

En $[-2\pi, 0]$: $f'(x) = \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{-\pi}{2}, x = \frac{-3\pi}{2}$

- En $\left(-2\pi, \frac{-3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{-\pi}{2}, 0\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = \frac{-\pi}{2}$ presenta un mínimo y en $x = \frac{-3\pi}{2}$, un máximo.

En $(0, 3]$: $f'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$

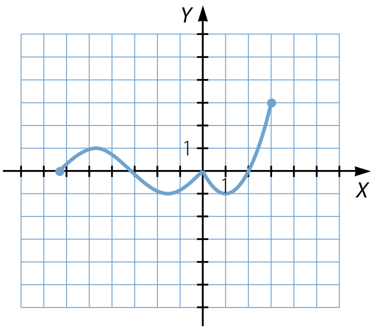
- En $(0, 1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(1, 3) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 1$ presenta un mínimo.

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$

- En $(-2\pi, -\pi) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(-\pi, 0) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(0, 3) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

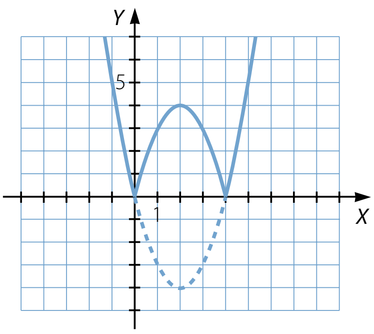
En $x = -\pi$ presenta un punto de inflexión.



105 **Estudia y representa gráficamente la siguiente función: $g(x) = |-x^2 + 4x|$**

La función $y = -x^2 + 4x$ tiene como gráfica una parábola de vértice (2, 4) que corta al eje Y en el punto (0, 0), y al eje X en los puntos (0, 0) y en (4, 0).

La función toma valores negativos en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ por lo que haciendo una simetría respecto del eje X se obtiene la gráfica pedida.



106 Sea *f* la función dada por $f(x) = x^2 - 3|x| + 2,\ x \in \mathbb{R}$.

a) Estúdiese la derivabilidad de *f* en $x = 0$ mediante la definición de derivada.

b) Determínense los intervalos de monotonía de *f* y sus extremos relativos.

c) Esbócese la gráfica de *f*.

(Castilla y León. Septiembre 2004. Prueba A. Problema 2)

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^2+3h+2-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} (h+3) = 3 \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2-3h+2-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} (h-3) = -3 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ No es derivable en $x = 0$.

b) En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) = 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3}{2}$

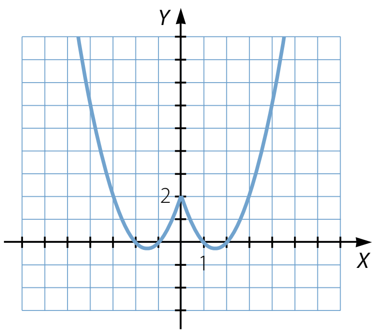
- En $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(\dfrac{-3}{2}, 0\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $[0, +\infty) \rightarrow f'(x) = 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

- En $\left(0, \dfrac{3}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = \pm\dfrac{3}{2}$ presenta dos mínimos y en $x = 0$, un máximo.

c)



107 Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $y = -x^4 + 6x^2 - 5$

b) $y = \dfrac{4x^2 + 1}{2x}$

c) $y = \sqrt{16 - x^2}$

d) $y = 8x^2 - x^4$

e) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

f) $y = \sqrt{x^3 - 4x}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje *X*: $f(x) = 0 \rightarrow -x^4 + 6x^2 - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$
- Corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -5 \rightarrow (0, -5)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 6x^2 - 5) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4 + 6x^2 - 5) = -\infty$

$$f'(x) = -4x^3 + 12x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

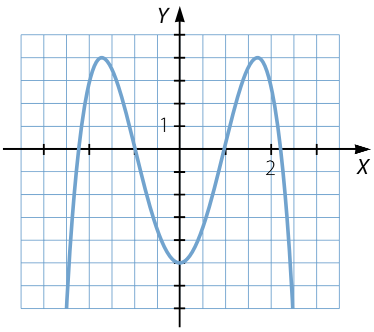
- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$ presenta dos máximos y en $x = 0$, un mínimo.

$$f''(x) = -12x^2 + 12 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(-1, 1) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = -1$ y $x = 1$ presenta puntos de inflexión.



b) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje *X*: $y = 0 \rightarrow \dfrac{4x^2 + 1}{2x} = 0 \rightarrow 4x^2 + 1 \neq 0$
  $\rightarrow$ No tiene puntos de corte con este eje.
- Corte con el eje *Y*: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^2 + 1}{2x} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 + 1}{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 + 1}{2x} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

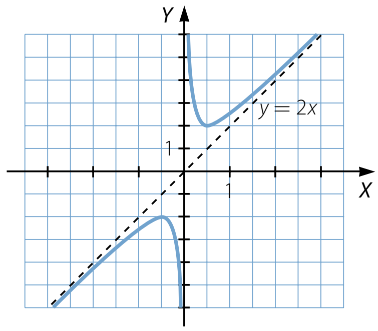
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 + 1}{2x^2} = 2 \rightarrow m = 2 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{4x^2 + 1}{2x} - 2x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = 2x$$

$$y' = \frac{8x^2-2}{4x^2} = \frac{4x^2-1}{2x^2} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

- En $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -\frac{1}{2}$ presenta un máximo

y en $x = \frac{1}{2}$, un mínimo.



$$y'' = \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

No hay puntos de inflexión.

c) $16 - x^2 \geq 0 \rightarrow (4-x)(4+x) \geq 0 \rightarrow x \in [-4, 4] \rightarrow$ Dominio $= [-4, 4]$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{16-x^2} = 0 \rightarrow 16 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 4$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

No tiene asíntotas.

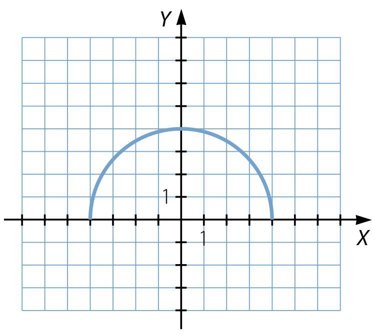
$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-4, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(0, 4) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = 0$ presenta un máximo.

$$y'' = \frac{-16}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}} = \frac{16}{(x^2-16)\sqrt{16-x^2}} < 0 \rightarrow \text{Función convexa}$$

No presenta puntos de inflexión.



d) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $8x^2 - x^4 = 0 \rightarrow x^2(8 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{8} \end{cases}$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

Solo tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} (8x^2 - x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (8x^2 - x^4) = -\infty$$

$$y' = 16x - 4x^3 = 0 \rightarrow x(16 - 4x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

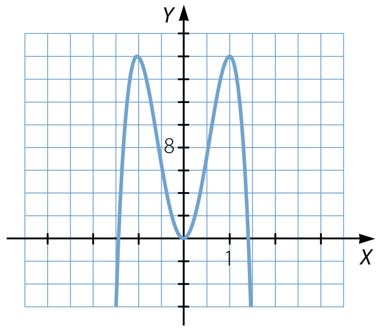
- En $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -2$ y $x = 2$ presenta dos máximos y en $x = 0$, un mínimo.

$$y'' = 16 - 12x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{16}{12} = \frac{8}{6} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{6}}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{8}{6}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{8}{6}}, +\infty\right) \rightarrow y'' < 0$
  $\rightarrow$ Función convexa
- En $\left(-\sqrt{\frac{8}{6}}, \sqrt{\frac{8}{6}}\right) \rightarrow y'' > 0$
  $\rightarrow$ Función cóncava

En $x = -\sqrt{\frac{8}{6}}$ y $x = \sqrt{\frac{8}{6}}$ presenta dos puntos de inflexión.



e) Dominio $= \mathbb{R} - \{2\}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{4} \rightarrow \left(0, \frac{1}{4}\right)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 2$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

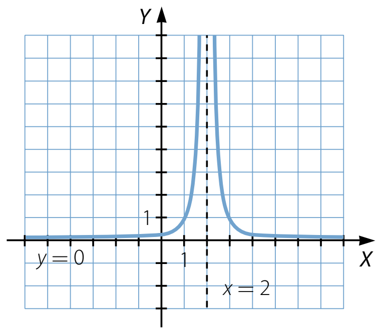
No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$y' = \frac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$$

- En $(-\infty, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(2, +\infty) \rightarrow y' < 0$
  $\rightarrow$ Función decreciente

$$y'' = \frac{6}{(x-3)^4} > 0 \rightarrow \text{Función cóncava}$$

No presenta puntos de inflexión.



f) $x^3 - 4x \geq 0 \rightarrow x(x-2)(x+2) \geq 0 \rightarrow x \in [-2, 0] \cup [2, +\infty)$

$\rightarrow$ Dominio $= [-2, 0] \cup [2, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{x^3 - 4x} = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pm 2$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 - 4x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 - 4x}}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

$y' = \dfrac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x}} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

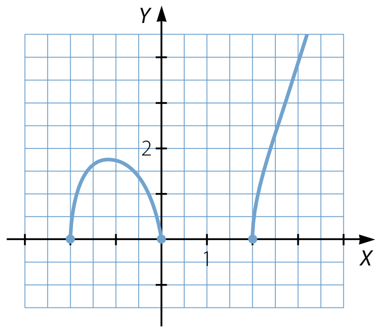
- En $\left(-2, -\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right) \cup \left(2, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(-\sqrt{\dfrac{4}{3}}, 0\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -\sqrt{\dfrac{4}{3}}$ presenta un máximo.

$y'' = \dfrac{3x^4 - 24x^2 - 16}{4(x^3 - 4x)\sqrt{x^3 - 4x}} < 0$

$\rightarrow$ Función convexa

No presenta puntos de inflexión.



108 **Estudia y representa estas funciones.**

a) $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

b) $y = e^{(x^2 + 17x^4)}$

c) $y = x + \dfrac{1}{x}$

d) $y = \ln(16 - x^2 - x^4)$

a) Dominio $= \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = \dfrac{8}{-4} = -2 \rightarrow (0, -2)$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{8}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 2$

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{8}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$y' = \frac{-16x}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

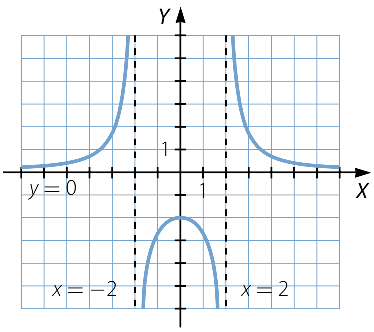
- En $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(0, 2) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = 0$ presenta un máximo.

$$y'' = \frac{48x^2 + 64}{(x^2-4)^3}$$

- En $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \rightarrow y'' > 0$
  $\rightarrow$ Función cóncava
- En $(-2, 2) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

No presenta puntos de inflexión.



b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = e^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^2+17x^4}}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x^2+17x^4}}{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty$$

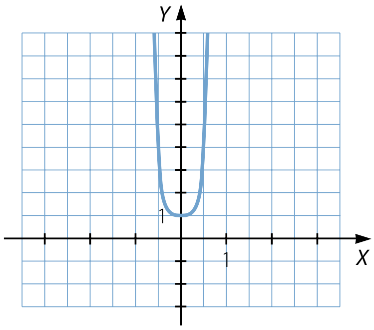
$$y' = (2x + 68x^3)e^{x^2+17x^4} = 0 \rightarrow 2x + 68x^3 = 0 \rightarrow x(2 + 68x^2) = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

$$y'' = e^{x^2+17x^4}\left(2 + 204x^2 + (2x + 68x^3)^2\right) > 0 \rightarrow \text{Función cóncava}$$

No presenta puntos de inflexión.



c) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X:

  $f(x) = 0 \to x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} \neq 0 \to$ No tiene puntos de corte con este eje.
- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \left(x + \frac{1}{x} \right) = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = -\infty \end{array} \right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1 \to m = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \to n = 0 \end{array} \right\} \to \text{Asíntota oblicua: } y = x$$

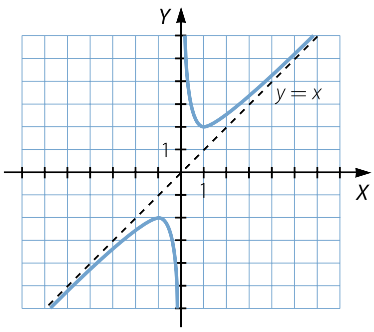
$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \to x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to y' > 0 \to$ Función creciente
- En $(-1, 0) \cup (0, 1) \to y' < 0 \to$ Función decreciente

En $x = -1$ presenta un máximo y en $x = 1$, un mínimo.

$$y'' = \frac{2}{x^3}$$

- En $(-\infty, 0) \to y' < 0 \to$ Función convexa
- En $(0, +\infty) \to y' > 0 \to$ Función cóncava



d) $16 - x^2 - x^4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 3,53 \\ x^2 = -4,53 \end{cases} \rightarrow x = \pm\sqrt{3,53} = \pm 1,88$

$16 - x^2 - x^4 > 0 \rightarrow x \in (-1,88;\ 1,88) \rightarrow$ Dominio $= (-1,88;\ 1,88)$

- Cortes con el eje X:

$\ln(16 - x^2 - x^4) = 0 \rightarrow 16 - x^2 - x^4 = 1 \rightarrow x^4 + x^2 - 15 = 0$

$\rightarrow \begin{cases} x^2 = -4,41 \\ x^2 = 3,41 \end{cases} \rightarrow x = \pm\sqrt{3,41} \rightarrow x = \pm 1,85$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \ln 106 = 2,77$

$\lim\limits_{x \to -1,88} \ln(16 - x^2 - x^4) = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1,88$

$\lim\limits_{x \to 1,88} \ln(16 - x^2 - x^4) = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 1,88$

No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

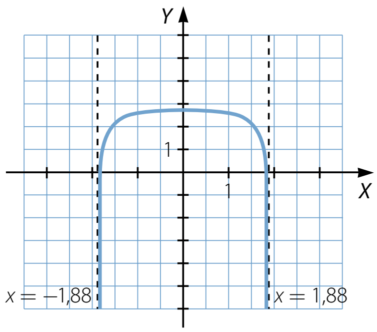
$$y' = \frac{-2x - 4x^3}{16 - x^2 - x^4} = 0 \rightarrow -2x - 4x^3 = 0 \rightarrow x(-2 - 4x^2) = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-1,88;\ 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(0;\ 1,88) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = 0$ presenta un máximo.

$$y'' = \frac{-4x^6 - 2x^4 - 194x^2 - 32}{(16 - x^2 - x^4)^2} < 0 \rightarrow \text{Función convexa}$$

No presenta puntos de inflexión.



109 **Representa gráficamente la función $f(x) = x^3 - 3x$.**

(Navarra. Junio 2006. Opción D. Pregunta 1)

Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

$\rightarrow \left(-\sqrt{3},\ 0\right),\ (0,\ 0),\ \left(\sqrt{3},\ 0\right)$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0,\ 0)$

Tiene ramas parabólicas: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x) = -\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

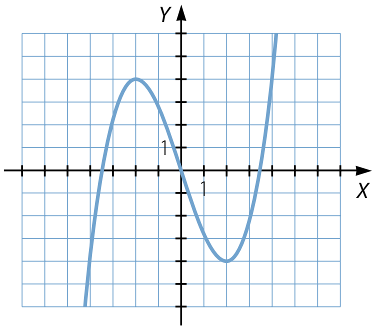
- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-1, 1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -1$ presenta un máximo y en $x = 1$, un mínimo.

$f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.



110 Dada la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, los puntos de inflexión y las asíntotas. Esbócese su gráfica.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba B. Problema 2)

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x-1}{x+1} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-1}{x+1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

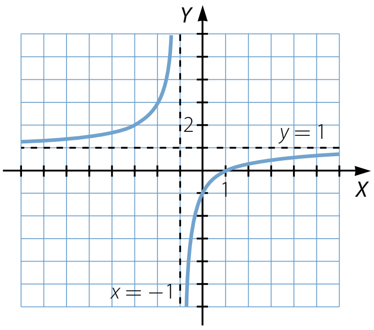
No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{-4}{(x+1)^3} \neq 0 \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión

- En $(-\infty, -1) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(-1, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa



111 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

a) Halle sus asíntotas, máximos y mínimos.

b) Represente gráficamente la función.

(Asturias. Junio 2008. Bloque 6)

a) Dom $f = \mathbb{R}$

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.ç

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(-1, 1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

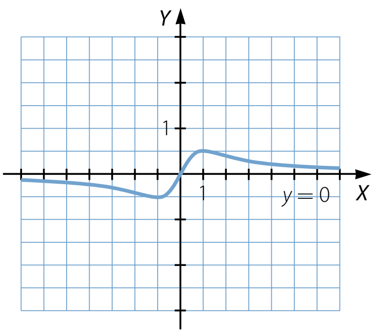
En $x = -1$ presenta un mínimo y en $x = 1$, un máximo.

b) La función corta a los ejes en el punto (0, 0).

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x + 1)^3} = 0 \rightarrow 2x^3 - 6x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$ presenta puntos de inflexión.



112 Estudia (dominio, crecimiento, máximos y mínimos, asíntotas) y representa gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-x^2}$$

(La Rioja. Junio 2006. Propuesta B. Ejercicio 4)

$$x - x^2 = 0 \rightarrow x(1-x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{2x-1}{x-x^2} = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$
- Corte con el eje Y: no tiene.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x-1}{x-x^2} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

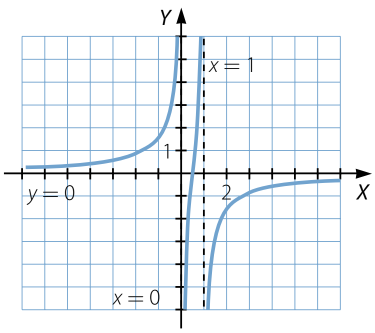
$$\lim_{x \to 1} \frac{2x-1}{x-x^2} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x-x^2} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x-x^2)^2} > 0 \rightarrow f(x) \text{ creciente}$$

No presenta máximos ni mínimos.



113 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$, se pide:

a) Dominio y cortes con el eje X.

b) Puntos de discontinuidad, tipos de discontinuidad y asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

c) Asíntotas horizontales y oblicuas.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

e) Representación gráfica aproximada teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores.

(Murcia. Septiembre 2007. Bloque 3. Cuestión A)

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^3}{1-x^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

b) f es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{1 - x^2} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 1$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3}{1 - x^2} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3}{1 - x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^3}{1 - x^2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Discontinuidad de salto infinito en } x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^3}{1 - x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^3}{1 - x^2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Discontinuidad de salto infinito en } x = -1$$

c) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{1 - x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{1 - x^2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

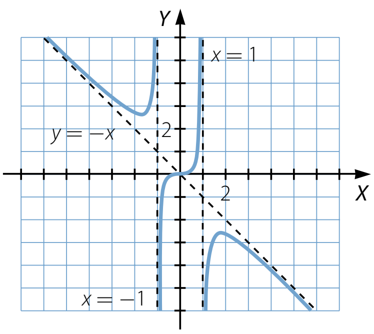
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{x(1 - x^2)} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{1 - x^2} + x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{1 - x^2} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = -x$$

d) $$f'(x) = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1 - x^2)^2} = 0 \rightarrow x^2(3 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = -\sqrt{3}$ presenta un mínimo y en $x = \sqrt{3}$, un máximo.

e)



114 Estudia (dominio, crecimiento, máximos y mínimos, asíntotas) y representa gráficamente la función $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

(La Rioja. Septiembre 2006. Propuesta A. Ejercicio 5)

Dominio $= (0, +\infty)$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

- En $(0, e) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(e, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = e$ presenta un máximo.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

Antes de representar la función, estudiamos los puntos de corte, y la concavidad y la convexidad:

- Cortes con el eje X: $\frac{\ln x}{x} = 0 \rightarrow \ln x = 0 \rightarrow x = e^0 = 1 \rightarrow (1, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene.

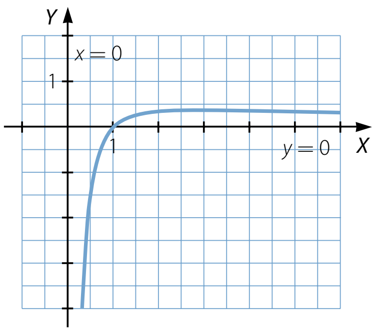
$$y'' = \frac{\frac{-1}{x}x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-1 - (1 - \ln x)2}{x^3} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3} = 0$$

$$\rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \rightarrow x = \sqrt{e^3}$$

- En $\left(0, \sqrt{e^3}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $\left(\sqrt{e^3}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = \sqrt{e^3}$ presenta un punto de inflexión.



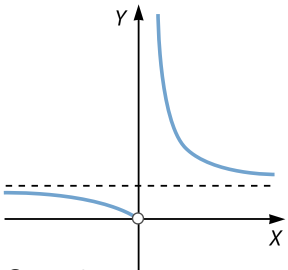
115 **Considera las tres funciones cuyas expresiones respectivas vienen dadas, para $x \neq 0$, por:**

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \qquad g(x) = e^{\frac{1}{x}} \qquad h(x) = \text{Ln}\,|x|$$

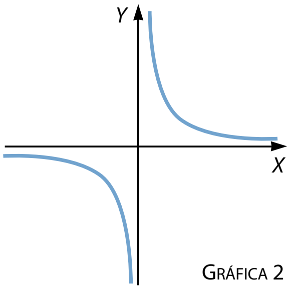
siendo Ln la función logaritmo neperiano.

a) Halla las ecuaciones de las asíntotas de las gráficas de *f*, *g* y *h*.

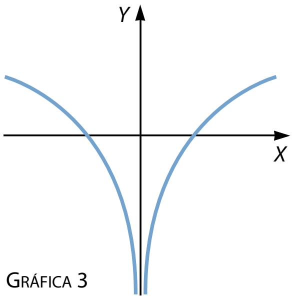
b) Identifica, entre las que siguen, la gráfica de cada función, justificando la respuesta.



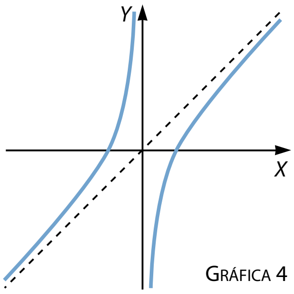
GRÁFICA 1



GRÁFICA 2



GRÁFICA 3



GRÁFICA 4

(Andalucía. Año 2005. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 1)

a) • Asíntotas de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2-1}{x} = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{x} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1 \to m = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2-1}{x} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{x} = 0 \to n = 0 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota oblicua: } y = x$$

• Asíntotas de $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \to \text{Asíntota horizontal: } y = 1$$

No tiene asíntotas oblicuas.

• Asíntotas de $h(x) = \ln|x|$

$$\lim_{x \to 0} \ln|x| = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln|x| = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \ln|x| = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln |x|}{x} = 0 \to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

b) Por lo estudiado en el apartado anterior, f corresponde a la gráfica 4, g corresponde a la gráfica 1 y h corresponde a la gráfica 3.

116 **Considera la función $y = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$. Halla los extremos locales y los puntos de inflexión. Haz una gráfica aproximada de esta función.**

(Baleares. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 3)

Dominio $= \mathbb{R}$

$$y' = \frac{2(x+1)e^x - (x+1)^2 e^x}{e^{2x}} = \frac{2x + 2 - x^2 - 1 - 2x}{e^x} = \frac{1 - x^2}{e^x} = 0 \to x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to y' < 0 \to$ Función decreciente
- En $(-1, 1) \to y' > 0 \to$ Función creciente

En $x = -1$ presenta un mínimo y en $x = 1$, un máximo.

$$y'' = \frac{-2xe^x - (1 - x^2)e^x}{e^{2x}} = \frac{-2x - 1 + x^2}{e^x} = 0 \to x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\to x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

- En $\left(-\infty, 1 - \sqrt{2}\right) \cup \left(1 + \sqrt{2}, +\infty\right) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava
- En $\left(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right) \to y'' < 0 \to$ Función convexa

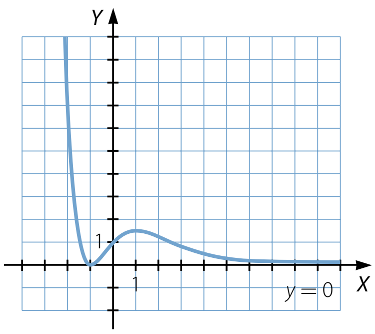
En $x = 1 \pm \sqrt{2}$ presenta dos puntos de inflexión.

Para representar la gráfica, estudiamos sus asíntotas y ramas parabólicas.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \to \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty$



117 **Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$.**

a) Comprueba que la recta $y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Con los datos anteriores, haz una representación aproximada de la gráfica de la función.

(Extremadura. Septiembre 2007. Repertorio B. Ejercicio 2)

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

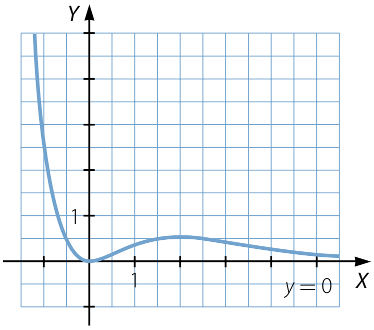
$\to$ Asíntota horizontal: $y = 0$

b) $f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x} = 0 \to x(2-x) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $(0, 2) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo y en $x = 2$, un máximo.

c) Para dibujar la gráfica necesitamos saber que: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^x} = +\infty$



118 **Calcula las asíntotas y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = (1 + x^2)^{-1}x$. A partir de los resultados obtenidos, dibuja la gráfica de la función $f(x)$.**

(Extremadura. Septiembre 2006. Repertorio B. Ejercicio 3)

Dom $f = \mathbb{R}$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{1 + x^2} = 0 \to$ Asíntota horizontal: $y = 0$

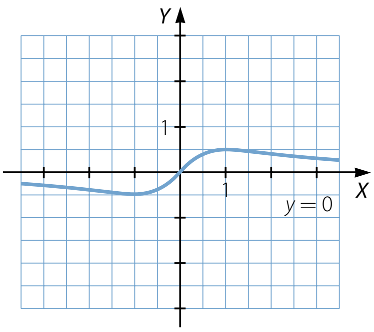
No tiene asíntotas oblicuas.

$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0 \to x = \pm 1$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to f'(x) < 0$
  $\to f(x)$ decreciente
- En $(-1, 1) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

En $x = -1$ presenta un mínimo y en $x = 1$, un máximo.

Además, la gráfica corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.



119 Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determina las constantes a, b, c y d de manera que simultáneamente:

- Su gráfica pase por el origen de coordenadas y por el punto (2, 2).
- La función posea un punto de inflexión en $x = 0$.
- La función posea un mínimo en $x = 1$.

(Asturias. Septiembre 2007. Bloque 4)

Pasa por el origen de coordenadas:

$f(0) = 0 \rightarrow d = 0$

Pasa por el punto (2, 2):

$f(2) = 2 \rightarrow 8a + 4b + 2c = 2 \rightarrow 4a + 2b + c = 1$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$

Tiene un punto de inflexión en $x = 0$:

$f''(0) = 0 \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$

Presenta un mínimo en $x = 1$:

$f'(1) = 1 \rightarrow 3a + 2b + c = 1 \rightarrow 3a + c = 1$

Por tanto, resulta que: $\left.\begin{array}{l} d = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ b = 0 \\ 3a + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 4a + c = 1 \\ 3a + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ c = -3 \end{array}\right.$

La función que buscamos es: $f(x) = x^3 - 3x$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Dada la función: $f(x) = e^{-x^2+2x}$

a) Encuentre su dominio y las posibles intersecciones con los ejes.
b) Encuentre los intervalos donde crece y decrece y los extremos relativos.
c) Encuentre sus posibles asíntotas.
d) Haga la representación gráfica aproximada de la función.

(Cataluña. Año 2006. Serie 3. Problema 5)

a) Dom $f = \mathbb{R}$
- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = e^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$

b) $f'(x) = e^{-x^2+2x}(-2x + 2) = 0 \rightarrow -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1$
- En $(-\infty, 1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

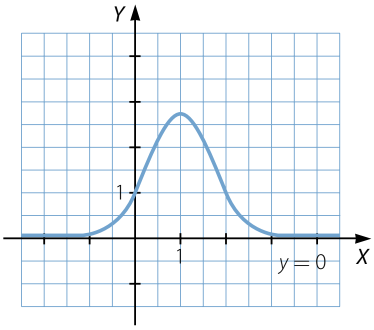
En $x = 1$ presenta un máximo.

c) No tiene asíntotas verticales.

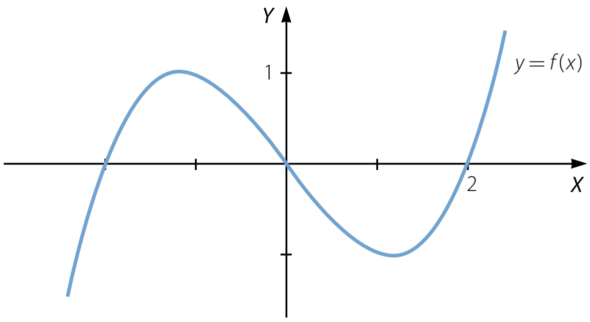
$\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x^2+2x} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas.

d)



2 Si la gráfica de una función $f(x)$ es:



representar aproximadamente la gráfica de la derivada de $f'(x)$.

(Extremadura. Junio 2004. Repertorio B. Ejercicio 4)

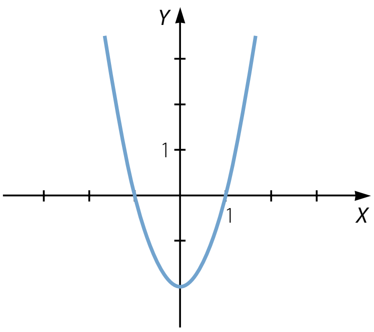
- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f(x)$ creciente $\rightarrow f'(x) > 0$
- En $(-1, 1) \rightarrow f(x)$ decreciente $\rightarrow f'(x) < 0$

En $x = -1$ presenta un máximo $\rightarrow f'(-1) = 0$

En $x = 1$ presenta un mínimo $\rightarrow f'(1) = 0$

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión $\rightarrow f''(0) = 0 \rightarrow$ Presenta un extremo relativo.

Una gráfica que cumple estas condiciones es, por ejemplo:



3 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x}$, se pide:

a) Dominio y cortes con el eje X.

b) Asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

c) Asíntotas horizontales y oblicuas.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.

e) Representación gráfica aproximada.

(Murcia. Septiembre 2008. Bloque 3. Cuestión A)

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{4\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{4-x} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

b) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x^2}{4-x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x^2}{4-x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 4$$

c) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{4-x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{4-x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x\left(4-x\right)} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{4-x} + x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x}{4-x} = -4 \rightarrow n = -4 \end{array}\right\}$$

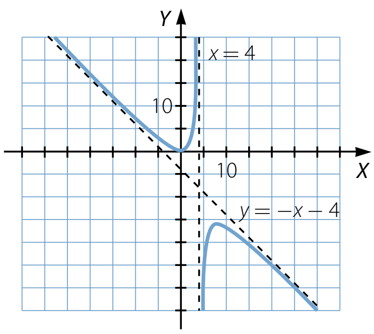
$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = -x - 4$

d) $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 8x}{(4-x)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 8x = 0 \rightarrow x(-x + 8) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$

- En $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(0, 4) \cup (4, 8) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 8$ presenta un máximo y en $x = 0$, un mínimo.

e)



4 Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x \leq -2 \\ 2x + 4 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ 4\cos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Haz un dibujo aproximado de su gráfica.

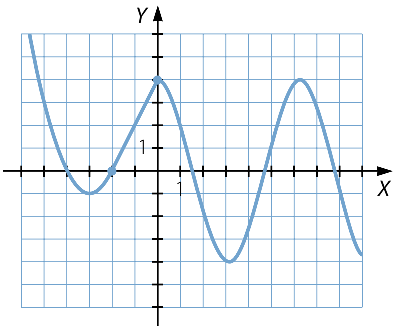
$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2^-} (x^2 + 6x + 8) = 4 - 12 + 8 = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} (2x + 4) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Continua en } x = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (2x + 4) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 4 \cos x = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Continua en } x = 0$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

- En $(-\infty, -2] \rightarrow$ Parábola de vértice $(-3, -1)$ y cortes con el eje X los puntos $(-2, 0)$ y $(-4, 0)$.
- En el intervalo $(-2, 0] \rightarrow$ Recta que pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(-4, 0)$.
- En $(0, +\infty) \rightarrow$ Función $y = \cos x$ multiplicada por 4.

La gráfica es:



5 **Considera las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = e^{x-1}$ y $g(x) = e^{1-x}$. Esboza las gráficas de f y g y determina su punto de corte.**

(Andalucía. Año 2007. Modelo 3. Opción A. Ejercicio 2)

$f(x) = e^{x-1}$

Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = \dfrac{1}{e} \rightarrow \left(0, \dfrac{1}{e}\right)$

No tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal:

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x-1} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x-1}}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota oblicua.

$f'(x) = e^{x-1} > 0 \rightarrow$ Función creciente

No tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = e^{x+1} > 0 \rightarrow$ Función cóncava

No presenta puntos de inflexión.

$g(x) = e^{1-x}$

Dom $g = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = e \rightarrow (0, e)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{1-x}}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota oblicua.

$g'(x) = -e^{1-x} < 0 \rightarrow$ Función decreciente

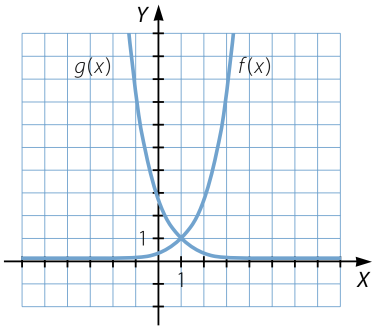
No presenta máximos ni mínimos.

$g''(x) = e^{x+1} > 0 \rightarrow$ Función cóncava

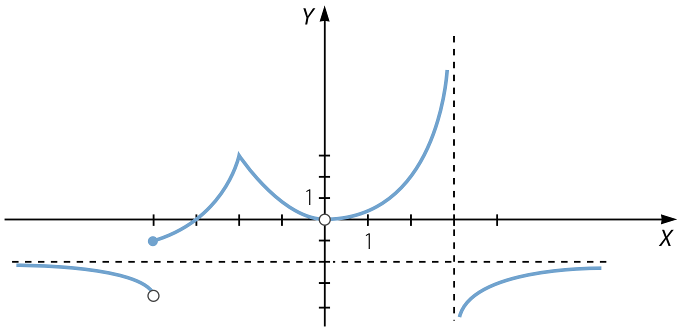
No presenta puntos de inflexión.

Puntos de corte de las dos gráficas:

$e^{x-1} = e^{1-x} \rightarrow x - 1 = 1 - x \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 1)$



6 **Determinar el dominio, recorrido, puntos de cortes con los ejes coordenados, asíntotas, máximos y mínimos, puntos de inflexión e intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de la siguiente función:**



(Canarias. Junio 2007. Opción B. Cuestión 2)

Dominio $= \mathbb{R} - \{0, 3\}$

Recorrido $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje *X*: $(-3, 0)$
- Corte con el eje *Y*: no tiene.

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 3$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -2 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = -2$

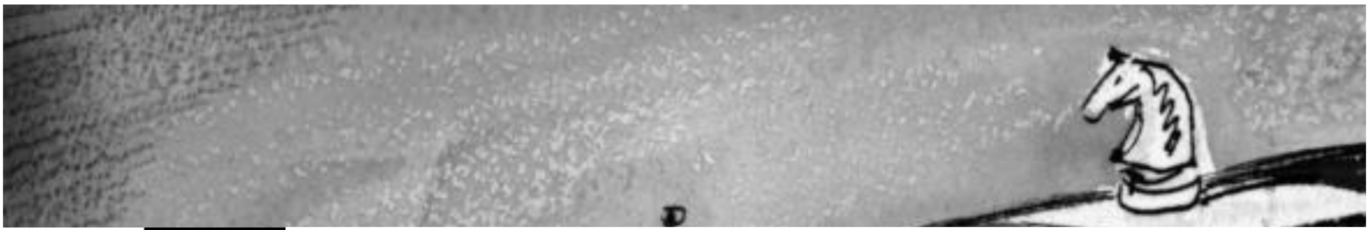
No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

- Crecimiento: $(-4, -2) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$
- Decrecimiento: $(-\infty, -4) \cup (-2, 0)$

Presenta un máximo en $(-2, 3)$ y un mínimo en $(-4, -1)$.

- Concavidad: $(-4, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 3)$
- Convexidad: $(-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$

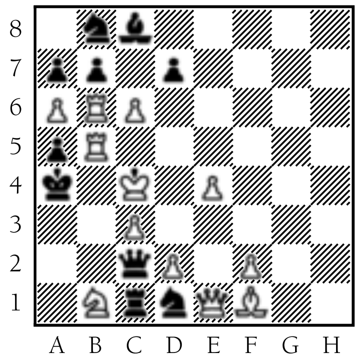
No presenta puntos de inflexión.



11 Integrales indefinidas

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La tabla de Flandes



–Según están dispuestas las piezas y teniendo en cuenta que acaban de mover negras, lo primero es averiguar cuál de las piezas negras ha realizado ese último movimiento. […] Para conseguirlo resulta más fácil descartar las piezas negras que no han podido mover porque están bloqueadas, o por la posición que ocupan… Es evidente que ninguno de los tres peones negros A7, B7 o D7 ha movido, porque todos siguen aún en las posiciones que ocupaban al empezar el juego… El cuarto y último peón, A5, tampoco ha podido mover, bloqueado como está entre un peón blanco y su propio rey negro… También descartamos el alfil negro de C8, todavía en su posición inicial de juego, porque el alfil se mueve en diagonal, y en sus dos posibles salidas diagonales hay peones de su mismo bando que aún no han movido… En cuanto al caballo negro de B8, no movió tampoco, pues sólo habría podido llegar ahí desde A6, C6 o D7, y esas tres casillas ya están ocupadas por otras piezas… ¿Comprenden?

–Perfectamente –Julia seguía la explicación inclinada sobre el tablero–. Eso demuestra que seis de las diez piezas negras no han podido mover…

–Más de seis. La torre negra que está en C1 es evidente que tampoco, pues mueve en línea recta y sus tres casillas contiguas se encuentran ocupadas… Eso hace siete piezas negras cuyo movimiento en la última jugada hay que descartar por imposible. Pero también podemos descartar el caballo negro D1.

–¿Por qué? –se interesó César–. Podría provenir de las casillas B2 o E3…

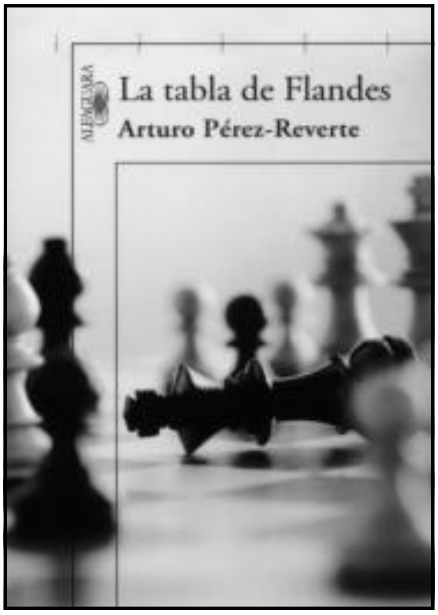
–No. En cualquiera de las dos, ese caballo habría estado dando jaque al rey blanco que tenemos en C4 […] Y ningún caballo o pieza que tenga a un rey en jaque abandona el jaque voluntariamente; esa es una jugada imposible. En vez de retirarse, comería al rey enemigo, concluyendo la partida. Semejante situación no puede darse nunca, por lo que deducimos que el caballo D1 tampoco movió.

–Eso –Julia no levantaba los ojos del tablero– reduce las posibilidades a dos piezas, ¿no?

ARTURO PÉREZ-REVERTE

La tabla de Flandes

Arturo Pérez-Reverte



Mientras Julia, una joven restauradora, limpia un cuadro y lo pone a punto para ser subastado, descubre la frase: *Quis necavit equitem*, cuya traducción sería *¿Quién mató al caballero?* La frase, que fue ocultada por el propio artista mediante varias capas de óleo, aumentará seguramente la cotización del cuadro, pero antes Julia quiere averiguar qué significa y por qué el pintor decidió ocultarla. Con la ayuda de un ex-novio, profesor de Historia, logra identificar a los tres personajes de esa tabla flamenca pintada en el siglo XVI por Van Huys: los dos hombres que juegan al ajedrez son el duque Fernando de Ostenburgo y uno de sus caballeros, Roger de Arras; la mujer que, en segundo plano, lee un libro, es a esposa del duque, Beatriz de Borgoña. Se entera también de que el caballero Roger fue asesinado tres años antes de que se pintara la tabla, pero el asesino nunca fue descubierto. ¿Quién fue su asesino y cuáles los motivos?

Con este enigmático planteamiento logra Pérez-Reverte enganchar tanto a Julia, la restauradora, como a los lectores de su novela *La tabla de Flandes*. ¿Por dónde empezar? César, un viejo anticuario que es como un padre para Julia, conjetura que la clave para resolver el enigma está en la partida de ajedrez, pues ocupa el centro de la composición. Según él, el caballo blanco, ya fuera del tablero, representa a Roger de Arras y por lo tanto, se trataría de averiguar, primero, qué pieza eliminó a ese caballo y, segundo, a qué personaje real representa. Un buen ajedrecista al que trasladan el problema propone «jugar hacia atrás», partiendo de la posición que tienen los trebejos en la tabla hasta llegar al punto en el que una pieza negra come el caballo blanco. Al día siguiente, el jugador de ajedrez –Muñoz– acude al estudio de Julia para exponerle a ésta y a su amigo César cómo evolucionan sus pesquisas y a ésa escena pertenece el párrafo seleccionado.

Razonando de este modo, con tesón y mucha habilidad, en los días sucesivos el ajedrecista consigue resolver completamente el problema. Su solución, transferida por Julia y César del plano simbólico al de la realidad histórica, resuelve el enigma de la pintura. Ya saben quién mató al caballero y por qué el pintor ocultó esa frase, pero antes el novelista ha puesto en marcha otra historia. Alguien, asumiendo el papel del jugador de las piezas negras, decide continuar la estancada partida del cuadro ajustándose a la misma *alegoría*: las piezas representan a personas reales y, cuando alguna de las negras *come* en el tablero, ocurre un asesinato en la realidad. La primera víctima es el ex-novio de Julia, el profesor que le había ayudado a iniciar su investigación sobre la tabla de Flandes. Conocer el desenlace de todas estas historias requiere leer la novela.

En matemáticas se usa una estrategia análoga a la que empleó el ajedrecista: partir del *final* y llegar al *principio*. Si sabemos que la derivada de una función es $3x^2 + x - 5$, ¿cuál es esa función? ¿Solo hay una?

La función es: $x^3 + \dfrac{x^2}{2} - 5x + k$ con k un número real.

Esta función no es única, para cada valor de k tenemos una diferente.

Integrales indefinidas

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Comprueba si los siguientes números son raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$.

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = -1$ d) $x = -4$

a) $P(1) = 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 8 = 0 \rightarrow 1$ es raíz de $P(x)$.

b) $P(2) = 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 8 = 36 \rightarrow 2$ no es raíz de $P(x)$.

c) $P(-1) = (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 8 = -18 \rightarrow -1$ no es raíz de $P(x)$.

d) $P(-4) = (-4)^4 + 3 \cdot (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 8 = 0 \rightarrow -4$ no es raíz de $P(x)$.

002 Factoriza estos polinomios.

a) $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$
b) $3x^3 - 8x^2 - 20x + 16$
c) $2x^4 - 15x^3 + 31x^2 + 12x$
d) $x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + 12$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -8 & 2 & 12 \\
-1 & & -2 & 10 & -12 \\
\hline
 & 2 & -10 & 12 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & -12 & \\
\hline
 & 2 & -6 & \boxed{0} &
\end{array}
\rightarrow 2x^3 - 8x^2 + 2x = 2\,(x + 1)\,(x - 2)\,(x - 3)$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -8 & -20 & 16 \\
-2 & & -6 & 28 & -16 \\
\hline
 & 3 & -14 & 8 & \boxed{0} \\
4 & & 12 & -8 & \\
\hline
 & 3 & -2 & \boxed{0} &
\end{array}
\rightarrow 3x^3 - 8x^2 - 20x + 16 = (x + 2)\,(x - 4)\,(3x - 2)$$

c) $2x^4 - 15x^3 + 31x^2 + 12x = x(2x^3 - 15x^2 + 31x + 12)$
El polinomio $2x^3 - 15x^2 + 31x + 12$ no tiene raíces racionales.

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 5 & -1 & -17 & 12 \\
1 & & 1 & 6 & 5 & -12 \\
\hline
 & 1 & 6 & 5 & -12 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & 7 & 12 & \\
\hline
 & 1 & 7 & 12 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & -12 & & \\
\hline
 & 1 & 4 & \boxed{0} & &
\end{array}
\rightarrow x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + 12 = (x - 1)^2(x + 3)(x + 4)$$

003 Realiza las siguientes divisiones de polinomios. Comprueba, en cada una de ellas, el resultado que obtienes.

a) $(2x^3 - 3x^2 - 5x - 5) : (x^2 - 2x - 1)$
b) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3) : (x^2 - 1)$
c) $(x^4 + 1) : (x^2 + 1)$
d) $(x^5 + 2x^3 - 1) : (x^2 - 3)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -3x^2 & -5x & -5 & x^2-2x-1 \\ \cline{5-5} -2x^3 & +4x^2 & +2x & & 2x+1 \\ \cline{1-4} & -x^2 & -3x & -5 & \\ & x^2 & +2x & +1 & \\ \cline{2-4} & & -x & -4 & \end{array}$$

$$\rightarrow 2x^3-3x^2-5x-5=(x^2-2x-1)(2x+1)+(-x-4)$$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -3x^2 & +4x & -3 & x^2-1 \\ \cline{5-5} -2x^3 & & +2x & & 2x-3 \\ \cline{1-4} & -3x^2 & +6x & -3 & \\ & +3x^2 & & +3 & \\ \cline{2-4} & & 6x & & \end{array}$$

$$\rightarrow 2x^3-3x^2+4x-3=(x^2-1)(2x-3)+6x$$

c)
$$\begin{array}{rrr|l} x^4 & & +1 & x^2+1 \\ \cline{4-4} -x^4 & -x^2 & & x^2-1 \\ \cline{1-3} & -x^2 & +1 & \\ & x^2 & +1 & \\ \cline{2-3} & & 2 & \end{array}$$

$$\rightarrow x^4+1=(x^2+1)(x^2-1)+2$$

d)
$$\begin{array}{rrrr|l} x^5 & +2x^3 & & -1 & x^2-3 \\ \cline{5-5} -x^5 & +3x^3 & & & x^3+5x \\ \cline{1-4} & 5x^3 & & -1 & \\ & -5x^3 & +15x & & \\ \cline{2-4} & & 15x & -1 & \end{array}$$

$$\rightarrow x^5+2x^3-1=(x^2-3)(x^3+5x)+(15x-1)$$

ACTIVIDADES

001 **Determina si la función $F(x)=x^4$ es una función primitiva de $f(x)=4x^3$. Escribe dos funciones que también sean primitivas de esta función.**

$F(x)=x^4 \rightarrow F'(x)=4x^3 \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

002 **Determina una primitiva de las funciones.**

a) $f(x)=5x^4$ **b) $f(x)=2e^x$** **c) $f(x)=\dfrac{x^3}{2}$**

a) $f(x)=5x^4 \rightarrow F(x)=x^5+k$

b) $f(x)=2e^x \rightarrow F(x)=2e^x+k$

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{2} \rightarrow F(x)=\dfrac{x^4}{8}+k$

003 Resuelve las siguientes integrales.

a) $\int (5x^4 + 3x^2)\, dx$

b) $\int (4\cos x + 2x)\, dx$

c) $\int (-\cos x + 3x)\, dx$

d) $\int (x^3 + 2)\, dx$

a) $\int (5x^4 + 3x^2)\, dx = x^5 + x^3 + k$

b) $\int (4\cos x + 2x)\, dx = 4\,\mathrm{sen}\, x + x^2 + k$

c) $\int (-\cos x + 3x)\, dx = -\mathrm{sen}\, x + \dfrac{3x^2}{2} + k$

d) $\int (x^3 + 2)\, dx = \dfrac{x^4}{4} + 2x + k$

004 Si $\int f(x)\, dx = F(x) + k$ y $\int g(x)\, dx = G(x) + k$, halla:

a) $\int [f(x) + g(x)]\, dx$

b) $\int [2f(x) - g(x)]\, dx$

c) $\int \left[\dfrac{1}{2} f(x) - 2g(x)\right] dx$

d) $\int [-f(x) + b \cdot g(x)]\, dx$

a) $\int [f(x) + g(x)]\, dx = F(x) + G(x) + k$

b) $\int [2f(x) - g(x)]\, dx = 2F(x) - G(x) + k$

c) $\int \left[\dfrac{1}{2} f(x) - 2g(x)\right] dx = \dfrac{1}{2} F(x) - 2G(x) + k$

d) $\int [-f(x) + b \cdot g(x)]\, dx = -F(x) + b \cdot G(x) + k$

005 Halla estas integrales.

a) $\int x^2\, dx$

b) $\int \dfrac{2}{x^3}\, dx$

c) $\int 2\sqrt[3]{x^2}\, dx$

a) $\int x^2\, dx = x^3 + k$

c) $\int 2\sqrt[3]{x^2}\, dx = \dfrac{6\sqrt[3]{x^5}}{5} + k$

b) $\int \dfrac{2}{x^3}\, dx = \dfrac{-4}{x^2} + k$

006 Calcula las siguientes integrales.

a) $\int -4(3-2x^2)\,dx$ b) $\int 2x\sqrt{x^2-1}\,dx$

a) $\int -4(3-2x^2)\,dx = -4\int (3-2x^2)\,dx = -4\left(3x - \frac{2x^3}{3}\right) + k$

b) $\int 2x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{2\sqrt{(x^2-1)^3}}{3} + k$

007 Calcula estas integrales de funciones potenciales.

a) $\int x(1+2x^2)\,dx$ b) $\int x^2(2-2x^3)\,dx$

a) $\int x(1+2x^2)\,dx = \frac{1}{4}\int 4x(1+2x^2)\,dx =$
$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(1+2x^2)^2 + k = \frac{1}{8}(1+2x^2)^2 + k$

b) $\int x^2(2-2x^3)\,dx = -\frac{1}{6}\int -6x^2(2-2x^3)\,dx =$
$= \frac{-1}{6}\cdot\frac{1}{2}(2-2x^3)^2 + k = \frac{-1}{6}(2-2x^3)^2 + k$

008 Halla las integrales.

a) $\int \sqrt{7+2x}\,dx$ b) $\int (x^2+1)^2\,dx$

a) $\int \sqrt{7+2x}\,dx = \frac{1}{2}\int 2\sqrt{7+2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{(7+2x)^3} + k =$
$= \frac{3}{4}\sqrt{(7+2x)^3} + k$

b) $\int (x^2+1)^2\,dx = \int (x^4+2x^2+1)\,dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + k$

009 Calcula estas integrales de tipo logarítmico.

a) $\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx$ b) $\int \frac{2}{x-3}\,dx$

a) $\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \ln|x^2+3| + k$

b) $\int \frac{2}{x-3}\,dx = 2\ln|x-3| + k$

010 Determina las integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{x}{(3x^2-2)^3}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{2-x^2}}\,dx$

a) $$\int \frac{x}{(3x^2-2)^3}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{(3x^2-2)^3}\,dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{-2(3x^2-2)^2}+k = -\frac{1}{12(3x^2-2)^2}+k$$

b) $$\int \frac{x}{\sqrt[3]{2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt[3]{2-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2-x^2)^2}+k = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(2-x^2)^2}+k$$

011 Calcula las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int 3^{\frac{x}{2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int e^{x+1}\,dx$ c) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}dx$ d) $\displaystyle\int (e^{-3x}+e^{x-2})\,dx$

a) $$\int 3^{\frac{x}{2}}\,dx = 2\int \frac{1}{2}3^{\frac{x}{2}}\,dx = 2\cdot\frac{3^{\frac{x}{2}}}{\ln 3}+k = \frac{2\cdot 3^{\frac{x}{2}}}{\ln 3}+k$$

b) $$\int e^{x+1}\,dx = e^{x+1}+k$$

c) $$\int \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}dx = \frac{1}{4}\int 4\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}}{\ln\frac{1}{2}}+k = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}}{4\ln 2}+k$$

d) $$\int (e^{-3x}+e^{x-2})\,dx = \int e^{-3x}\,dx + \int e^{x-2}\,dx = \frac{-e^{-3x}}{3}+e^{x-2}+k$$

012 Halla estas integrales de funciones exponenciales.

a) $\displaystyle\int 7^{x^2+1}\cdot 2x\,dx$ b) $\displaystyle\int 5e^{\frac{x}{2}+2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{3^{5x-1}}{7}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$

a) $$\int 7^{x^2+1}\cdot 2x\,dx = \frac{7^{x^2+1}}{\ln 7}+k$$

b) $$\int 5e^{\frac{x}{2}+2}\,dx = 10\int \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}+2}\,dx = 10e^{\frac{x}{2}+2}+k$$

c) $$\int \frac{3^{5x-1}}{7}\,dx = \frac{1}{35}\int 5\cdot 3^{5x-1}\,dx = \frac{1}{35}\cdot\frac{3^{5x-1}}{\ln 3}+k = \frac{3^{5x-1}}{35\ln 3}+k$$

d) $$\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \int x\,e^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}\int -2x\,e^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}e^{-x^2}+k = -\frac{1}{2e^{x^2}}+k$$

013 Calcula estas integrales de funciones trigonométricas.

a) $\int sen\ 2x\ dx$

b) $\int cos\ (x+1)\ dx$

c) $\int \frac{sen\ \frac{x}{2}}{2}\ dx$

d) $\int sen\ (-x)\ dx$

a) $\int sen\ 2x\ dx = \frac{1}{2}\int 2\ sen\ 2x\ dx = \frac{-cos\ 2x}{2} + k$

b) $\int cos\ (x+1)\ dx = sen\ (x+1) + k$

c) $\int \frac{sen\ \frac{x}{2}}{2}\ dx = \int \frac{1}{2}\ sen\ \frac{x}{2}\ dx = -cos\ \frac{x}{2} + k$

d) $\int sen\ (-x)\ dx = -\int -sen\ (-x)\ dx = cos\ (-x) + k$

014 Halla las siguientes integrales.

a) $\int \frac{1}{cos^2\ (x+1)}\ dx$

b) $\int -3\ sen\ (2x+1)\ dx$

c) $\int (x+1)\cdot cos\ (x^2+2x)\ dx$

d) $\int \frac{x}{cos^2\ (x^2-3)}\ dx$

a) $\int \frac{1}{cos^2\ (x+1)}\ dx = tg\ (x+1) + k$

b) $\int -3\ sen\ (2x+1)\ dx = \frac{-3}{2}\int 2\ sen\ (2x+1)\ dx = \frac{3}{2}\ cos\ (2x+1) + k$

c) $\int (x+1)\cdot cos\ (x^2+2x)\ dx = \frac{1}{2}\int 2(x+1)\cdot cos\ (x^2+2x)\ dx =$

$= \frac{1}{2}\ sen\ (x^2+2x) + k$

d) $\int \frac{x}{cos^2\ (x^2-3)}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{cos^2\ (x^2-3)}\ dx = \frac{1}{2}\ tg\ (x^2-3) + k$

015 Resuelve estas integrales de tipo funciones arco.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\ dx$

b) $\int \frac{1}{1+(x-3)^2}\ dx$

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\ dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}\ dx = arc\,sen\ 5x + k$

b) $\int \frac{1}{1+(x-3)^2}\ dx = arc\,tg\ (x-3) + k$

016 Halla la solución de las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+9x^4}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\,arc\,sen\,(2x-3)+k$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+9x^4}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{1+(3x^2)^2}\,dx = \frac{1}{6}\,arc\,tg\,(3x^2)+k$

017 Halla estas integrales integrando por partes.

a) $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx$

b) $\displaystyle\int x^2 sen\,x\,dx$

a) $\displaystyle\underbrace{\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x}_{\substack{u=\ln x \to du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x^2\,dx \to v=\frac{x^3}{3}}} - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}+k$

b) $\displaystyle\underbrace{\int x^2 sen\,x\,dx = -x^2\cos x}_{\substack{u=x^2 \to du=dx\,dx \\ dv=sen\,x\,dx \to v=-\cos x}} + \underbrace{\int 2x\cos x\,dx = -x^2\cos x+2x\,sen\,x}_{\substack{u=2x \to du=2dx \\ dv=\cos x\,dx \to v=sen\,x}} - \int 2sen\,x\,dx =$

$= -x^2\cos x + 2x\,sen\,x + 2\cos x + k$

018 Utiliza la integración por partes para calcular:

a) $\displaystyle\int e^x(7+2x)\,dx$

b) $\displaystyle\int (4x^2-3x+1)\cos x\,dx$

a) $\displaystyle\underbrace{\int e^x(7+2x)\,dx = (7+2x)e^x}_{\substack{u=7+2x \to du=2\,dx \\ dv=e^x\,dx \to v=e^x}} - \int 2e^x\,dx = (7+2x)e^x - 2e^x + k = e^x(5+2x)+k$

b) $\displaystyle\underbrace{\int (4x^2-3x+1)sen\,x\,dx = -(4x^2-3x+1)\cos x}_{\substack{u=4x^2-3x+1 \to du=(8x-3x)\,dx \\ dv=sen\,x\,dx \to v=-\cos x}} + \int (8x-3)\cos x\,dx =$

$\displaystyle\underbrace{= -(4x^2-3x+1)\cos x + (8x-3)sen\,x}_{\substack{u=8x-3 \to du=8\,dx \\ dv=\cos x\,dx \to v=sen\,x}} - \int 8\,sen\,x\,dx =$

$= -(4x^2-3x+1)\cos x + (8x-3)sen\,x + 8\cos x + k$

019 Resuelve estas integrales racionales.

a) $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$ b) $\int -\frac{3}{x^2+x-2}\,dx$

a) $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) dx =$

$= \int \frac{-1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx = -\ln|x+1| + \ln|x-1| + k$

b) $\int -\frac{3}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+2} + \frac{-1}{x-1}\right) dx =$

$= \int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{-1}{x-1}\,dx = \ln|x+2| - \ln|x-1| + k$

020 Calcula las integrales racionales.

a) $\int \frac{2x+1}{x^4-5x^2+4}\,dx$ b) $\int \frac{7x-2}{x^3-2x^2-x+2}\,dx$

a) $\int \frac{2x+1}{x^4-5x^2+4}\,dx = \int \left(\frac{\frac{5}{12}}{x-2} + \frac{\frac{-1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{6}}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{x+2}\right) dx =$

$= \frac{5}{12}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}\,dx =$

$= \frac{5}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + k$

b) $\int \frac{7x-2}{x^3-2x^2-x+2}\,dx = \int \left(\frac{4}{x-2} + \frac{\frac{-5}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-3}{2}}{x+1}\right) dx =$

$= 4\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{5}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$

$= 4\ln|x-2| - \frac{5}{2}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + k$

021 Resuelve estas integrales racionales.

a) $\int \frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx$ b) $\int -\frac{3x-2}{(2-x)^2}\,dx$

a) $\int \frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx = \int \left(\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}\right) dx =$

$= \int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx =$

$= \frac{-1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \ln|x-1| + k$

b) $$\int -\frac{3x-2}{(2-x)^2}\,dx = \int\left(\frac{-4}{(2-x)^2}+\frac{3}{2-x}\right)dx =$$
$$= 4\int \frac{-1}{(2-x)^2}\,dx - 3\int\frac{-1}{2-x}\,dx = \frac{-4}{2-x} - 3\ln|2-x| + k$$

022 Calcula las integrales racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{-2x^2+1}{x^3+6x^2+12x+8}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^4}\,dx$

a) $$\int \frac{-2x^2+1}{x^3+6x^2+12x+8}\,dx = \int\left(\frac{-7}{(x+2)^3}+\frac{8}{(x+2)^2}+\frac{-2}{x+2}\right)dx =$$
$$= -7\int\frac{1}{(x+2)^3}\,dx + 8\int\frac{1}{(x+2)^2}\,dx - 2\int\frac{1}{x+2}\,dx =$$
$$= \frac{7}{2(x+2)^2} - \frac{8}{x+2} - 2\ln|x+2| + k$$

b) $$\int \frac{x-2}{x^4}\,dx = \int\left(\frac{1}{x^3}+\frac{-2}{x^4}\right)dx = \int\frac{1}{x^3}\,dx - 2\int\frac{1}{x^4}\,dx = \frac{-1}{2x^2}+\frac{2}{3x^3}+k$$

023 Resuelve esta integral racional:

$$\int \frac{4x^2-2x}{(x+2)(x-3)^2}\,dx$$

$$\int \frac{4x^2-2x}{(x+2)(x-3)^2}\,dx = \int\left(\frac{6}{(x-3)^2}+\frac{\frac{16}{5}}{x-3}+\frac{\frac{4}{5}}{x+2}\right)dx =$$
$$= 6\int\frac{1}{(x-3)^2}\,dx + \frac{16}{5}\int\frac{1}{x-3}\,dx + \frac{4}{5}\int\frac{1}{x+2}\,dx =$$
$$= -\frac{6}{x-3} + \frac{16}{5}\ln|x-3| + \frac{4}{5}\ln|x+2| + k$$

024 Calcula la integral racional:

$$\int \frac{-x^2+7x}{x^3-x^2-x+1}\,dx$$

$$\int \frac{-x^2+7x}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \int\left(\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{-2}{x+1}\right)dx =$$
$$= 3\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int\frac{1}{x-1}\,dx - 2\int\frac{1}{x+1}\,dx =$$
$$= -\frac{3}{x-1} + \ln|x-1| - 2\ln|x+1| + k$$

025 Resuelve estas integrales racionales.

a) $\int \frac{2}{x^2+1}\,dx$ b) $\int -\frac{3x-2}{2+x^2}\,dx$

a) $\int \frac{2}{x^2+1}\,dx = 2arc\,tg\,x + k$

b) $\int -\frac{3x-2}{2+x^2}\,dx = \int -\frac{3x}{2+x^2}\,dx + \int \frac{2}{2+x^2}\,dx =$

$= -\frac{3}{2}\ln|2+x^2| + \frac{2}{\sqrt{2}} arc\,tg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + k$

026 Calcula las integrales racionales.

a) $\int \frac{-2x^2+1}{x^3-x^2+3x-3}\,dx$ b) $\int \frac{x-2}{x^2(x^2+1)}\,dx$

a) $\int \frac{-2x^2+1}{x^3-x^2+3x-3}\,dx = \int \left(\frac{\frac{-1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{-7}{4}x - \frac{7}{4}}{x^2+3}\right) dx =$

$= \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-1}\,dx + \int \frac{-\frac{7}{4}x - \frac{7}{4}}{x^2+3}\,dx =$

$= \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-1}\,dx + \int \frac{-\frac{7}{4}x}{x^2+3}\,dx + \int \frac{-\frac{7}{4}x}{x^2+3}\,dx =$

$= -\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{7}{8}\ln|3+x^2| - \frac{7}{4\sqrt{3}}\,arc\,tg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + k$

b) $\int \frac{x-2}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{-x+2}{x^2+1}\right) dx =$

$= \int \frac{-2}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{-x+2}{1+x^2}\,dx =$

$= \int \frac{-2}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{-x}{1+x^2}\,dx + \int \frac{2}{1+x^2}\,dx =$

$= \frac{2}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + 2\,arc\,tg\,x + k$

027 Resuelve estas integrales racionales.

a) $\int \frac{2x^4}{(x-1)^3}\,dx$ b) $\int -\frac{3x^3-2}{(2-x)^2}\,dx$

a) $\int \frac{2x^4}{(x-1)^3}\,dx = \int \left(2x + 6 + \frac{12}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}\right) dx =$

$= x^2 + 6x + 12\ln|x-1| - \frac{8}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + k$

b) $\displaystyle\int -\frac{3x^3-2}{(2-x)^2}\,dx = \int\left(-3x-12+\frac{-22}{2-x}+\frac{-36}{(2-x)^2}\right)dx =$

$\displaystyle = \frac{-3x^2}{2} - 12x + 22\ln|2-x| - \frac{36}{2-x} + k$

028 Calcula las integrales racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{-2x^5+1}{x^4-2x^2+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^6-1}{x^2(x^2+1)(x-1)}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{-2x^5+1}{x^4-2x^2+1}\,dx = \int\left(-2x+\frac{\frac{-1}{4}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{-9}{4}}{x-1}+\frac{\frac{3}{4}}{(x+1)^2}+\frac{\frac{-7}{4}}{x+1}\right)dx =$

$\displaystyle = \int -2x\,dx + \int \frac{\frac{-1}{4}}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{\frac{-9}{4}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{3}{4}}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{\frac{-7}{4}}{x+1}\,dx$

$\displaystyle = -x^2 + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{9}{4}\ln|x-1| - \frac{3}{4(x+1)} - \frac{7}{4}\ln|x+1| + k$

b) $\displaystyle\int \frac{x^6-1}{x^2(x^2+1)(x-1)}\,dx = \int\left(x+1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}+\frac{-1}{x^2+1}\right)dx =$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \mathrm{arctg}\,x + k$

029 Calcula estas integrales mediante un cambio de variable.

a) $\displaystyle\int x^2(7+2x^3)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\log^5 x}{x}\,dx$

a) $\displaystyle\int x^2(7+2x^3)\,dx = \frac{1}{6}\int t\,dt = \frac{t^2}{12} + k = \frac{(7+2x^3)^2}{12} + k$

$t = 7+2x^3$

$dt = 6x^2\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\log^5 x}{x}\,dx = \ln 10\int t^5\,dt = \ln 10\cdot\frac{t^6}{6} + k = \ln 10\cdot\frac{\log^6 x}{6} + k$

$t = \log x$

$\displaystyle dt = \frac{1}{\ln 10\cdot x}\,dx$

030 Halla las integrales con un cambio de variable.

a) $\int e^{x^2}(2x^3+2x)\,dx$ b) $\int \frac{4x}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx$

a) $$\int e^{x^2}(2x^3+2x)\,dx \underset{\substack{t=x^2\\ dt=2x\,dx}}{=} \int (e^t t + e^t)\,dt = \int e^t t\,dt + \int e^t\,dt = \int e^t t\,dt + e^t =$$

$$\underset{\substack{u=t\to du=dt\\ dv=e^t\,dt\to v=e^t}}{=} te^t - \int e^t dt + e^t = te^t + k = x^2e^{x^2} + k$$

b) $$\int \frac{4x}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx \underset{\substack{t=2-3x^2\\ dt=-6x\,dx}}{=} \frac{-2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{-4\sqrt{t}}{3} + k = \frac{-4\sqrt{2-3x^2}}{3} + k$$

031 Calcula estas integrales.

a) $\int sen^5\,x\;cos^2\,x\;dx$ b) $\int \sqrt{4-x^2}\;dx$

a) $$\int sen^5 x\,cos^2 x\;dx \underset{\substack{t=cos\,x\\ dt=-sen\,x\,dx}}{=} -\int (1-t^2)^2 t^2\;dt = -\int (t^6-2t^4+t^2)\,dt =$$

$$= -\frac{t^7}{7} + \frac{2t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + k = -\frac{cos^7 x}{7} + \frac{2cos^5 x}{5} - \frac{cos^3 x}{3} + k$$

b) $$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\int \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx \underset{\substack{\frac{x}{2}=sen\,t\\ dx=2\,cos\,t\,dt}}{=} 2\int \sqrt{1-sen^2\,t}\cdot 2\,cos\,t\;dt = 4\int cos^2 t\;dt =$$

$$= 4\int\left(\frac{1+cos\,2t}{2}\right)dt = 2t + 2\,sen\,2t + k =$$

$$= 2arc\,sen\,\frac{x}{2} + 2\,sen\,2\left(arc\,sen\,\frac{x}{2}\right) + k =$$

$$= 2arc\,sen\,\frac{x}{2} + 2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} + k =$$

$$= 2arc\,sen\,\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + k$$

032 Halla la solución de las integrales.

a) $\int sen^2\, x\, dx$ b) $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{4}\, dx$

a) $\int sen^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{x}{2} + \frac{sen\, 2x}{4} + k$

b) $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{4}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \sqrt{1-sen^2\, t}\,\sqrt{2}\cos t\, dt =$

$\frac{x}{\sqrt{2}} = sen\, t$

$dx = \sqrt{2}\cos t\, dt$

$$= \frac{1}{2}\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(t + \frac{sen\, 2t}{2}\right) + k = \frac{1}{4}\, arc\, sen \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{8}\sqrt{2-x^2} + k$$

033 Comprueba, en cada uno de los casos, que la función $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$.

a) $F(x) = 3x^5 - 2x + 1$ $f(x) = 15x^4 - 2$

b) $F(x) = (x^5 - 2)^3$ $f(x) = 15x^4(x^5 - 2)^2$

c) $F(x) = \frac{2-x}{x^3} + 7$ $f(x) = \frac{2x-6}{x^4}$

d) $F(x) = \frac{x-1}{x^2} - 3$ $f(x) = \frac{-x+2}{x^3}$

e) $F(x) = \ln\sqrt{x^2+2x}$ $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$

f) $F(x) = 5e^{-x^2} + 11$ $f(x) = -10xe^{-x^2}$

g) $F(x) = arc\, tg\sqrt{x}$ $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

h) $F(x) = \cos^2 x - 1.492$ $f(x) = -sen\, 2x$

a) $F(x) = 3x^5 - 2x + 1 \rightarrow F'(x) = 15x^4 - 2 \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

b) $F(x) = (x^5 - 2)^3 \rightarrow F'(x) = 15x^4(x^5 - 2) \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

c) $F(x) = \frac{2-x}{x^3} + 7 \rightarrow F'(x) = \frac{2x-6}{x^4} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

d) $F(x) = \frac{x-1}{x^2} - 3 \rightarrow F'(x) = \frac{-x+2}{x^3} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

e) $F(x) = \ln\sqrt{x^2+2x} \rightarrow F'(x) = \frac{x+1}{x^2+2x} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

f) $F(x) = 5e^{-x^2} + 11 \rightarrow F'(x) = -10xe^{-x^2} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

g) $F(x) = arc\, tg\sqrt{x} \rightarrow F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

h) $F(x) = \cos^2 x - 1.492 \rightarrow F'(x) = -2\, sen\, x \cos x = -sen\, 2x \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

034 Calcula una función primitiva $F(x)$ de cada una de las siguientes funciones que cumpla la condición que se indica.

a) $f(x) = 3x^2$ $\quad F(0) = 1$

b) $f(x) = \dfrac{4}{5x}$ $\quad F(1) = 4$

c) $f(x) = sen\ 3x$ $\quad F(\pi) = -\dfrac{1}{3}$

d) $f(x) = e^{2x}$ $\quad F(0) = \dfrac{2}{3}$

a) $f(x) = 3x^2 \rightarrow F(x) = x^3 + k$

$F(0) = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = x^3 + 1$

b) $f(x) = \dfrac{4}{5x} \rightarrow F(x) = \dfrac{4}{5}\ln|x| + k$

$F(1) = 4 \rightarrow k = 4 \rightarrow F(x) = \dfrac{4}{5}\ln x + 4$

c) $f(x) = sen\ 3x \rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{3} cos\ 3x + k$

$F(\pi) = -\dfrac{1}{3} \rightarrow \dfrac{1}{3} + k = -\dfrac{1}{3} \rightarrow k = -\dfrac{2}{3} \rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{3} cos\ 3x - \dfrac{2}{3}$

d) $f(x) = e^{2x} \rightarrow F(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} + k$

$F(0) = \dfrac{2}{3} \rightarrow \dfrac{1}{2} + k = \dfrac{2}{3} \rightarrow k = \dfrac{1}{6} \rightarrow F(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} + \dfrac{1}{6}$

035 Halla mentalmente una primitiva de cada una de las funciones polinómicas, y comprueba que tu respuesta es correcta.

a) $f(x) = 1.001$

b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = x$

d) $f(x) = 3x^2$

e) $f(x) = x^2$

f) $f(x) = 4x^3$

g) $f(x) = (n+1)x^n$

h) $f(x) = x^n$

a) $F(x) = 1.001x + k \rightarrow F'(x) = 1.001$

b) $F(x) = x^2 + k \rightarrow F'(x) = 2x$

c) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + k \rightarrow F'(x) = x$

d) $F(x) = x^3 + k \rightarrow F'(x) = 3x^2$

e) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + k \rightarrow F'(x) = x^2$

f) $F(x) = x^4 + k \rightarrow F'(x) = 4x^3$

g) $F(x) = x^{n+1} + k \rightarrow F'(x) = (n+1)x^n$

h) $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k \rightarrow F'(x) = x^n$

036 Calcula mentalmente una primitiva de cada una de estas funciones con radicales, y comprueba que tu respuesta es correcta.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+10}}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

a) $F(x) = \sqrt{x} + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $F(x) = 2\sqrt{x} + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $F(x) = 2\sqrt{x+1} + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

d) $F(x) = 2\sqrt{x-4} + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$

e) $F(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{3x+10} + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+10}}$

f) $F(x) = \text{arc sen}\, x + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

037 Halla mentalmente una primitiva de cada una de las siguientes funciones racionales, y comprueba que tu respuesta es correcta.

a) $f(x) = \dfrac{19}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{19x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{19+x}$

d) $f(x) = \dfrac{4}{2x+3}$

e) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

a) $F(x) = 19 \ln|x| + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{19}{x}$

b) $F(x) = \dfrac{\ln|x|}{19} + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{19x}$

c) $F(x) = \ln|19+x| + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{19+x}$

d) $F(x) = 2\ln|2x+3| + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{4}{2x+3}$

e) $F(x) = \dfrac{1}{x} + k \rightarrow F'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

f) $F(x) = \text{arc tg}\, x + k \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

038 Calcula mentalmente una primitiva de cada una de estas funciones exponenciales, y comprueba tu respuesta.

a) $f(x) = e^x$
b) $f(x) = e^{2x}$
c) $f(x) = e^{5x+55}$
d) $f(x) = 2^x$
e) $f(x) = 2^{x-7}$
f) $f(x) = 2^{9x+5}$

a) $F(x) = e^x + k \rightarrow F'(x) = e^x$

b) $F(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} + k \rightarrow F'(x) = e^{2x}$

c) $F(x) = \dfrac{e^{5x+55}}{5} + k \rightarrow F'(x) = e^{5x+55}$

d) $F(x) = \dfrac{2^x}{\ln 2} + k \rightarrow F'(x) = 2^x$

e) $F(x) = \dfrac{2^{x-7}}{\ln 2} + k \rightarrow F'(x) = 2^{x-7}$

f) $F(x) = \dfrac{2^{9x+5}}{9 \ln 2} + k \rightarrow F'(x) = 2^{9x+5}$

039 Obtén mentalmente una primitiva de cada una de estas funciones trigonométricas, y comprueba tu respuesta.

a) $f(x) = \cos x$
b) $f(x) = \cos 3x$
c) $f(x) = \cos (x + 3)$
d) $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$
e) $f(x) = \operatorname{sen} (x - \pi)$
f) $f(x) = 3 \operatorname{sen} (x - \pi)$

a) $F(x) = \operatorname{sen} x + k \rightarrow F'(x) = \cos x$

b) $F(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3} + k \rightarrow F'(x) = \cos 3x$

c) $F(x) = \operatorname{sen} (x + 3) + k \rightarrow F'(x) = \cos (x + 3)$

d) $F(x) = -3 \cos x + k \rightarrow F'(x) = 3 \operatorname{sen} x$

e) $F(x) = -\cos (x - \pi) + k \rightarrow F'(x) = \operatorname{sen} (x - \pi)$

f) $F(x) = -3 \cos (x - \pi) + k \rightarrow F'(x) = 3 \operatorname{sen} (x - \pi)$

040 Contesta a estas preguntas.

a) ¿Por qué una primitiva de una función polinómica $f(x)$ es otra función polinómica $F(x)$?

b) Si $f(x)$ es de grado n, ¿cuál es el grado de $F(x)$?

a) Porque la derivada de un una función polinómica siempre es otra función polinómica.

b) El grado de $F(x)$ es $n + 1$, considerando que $f(x)$ es un polinomio o que n sea distinto de -1.

041 **¿Puede ser una función logarítmica una primitiva de una función racional? ¿Y una función trigonométrica?**

La función logarítmica puede ser primitiva de una función racional, por ejemplo, si $f(x) = \frac{1}{x} \to F(x) = \ln |x|$.

La función trigonométrica no puede ser primitiva de una función racional porque la derivada de una función trigonométrica siempre es otra función trigonométrica.

042 **Calcula estas integrales de funciones polinómicas.**

a) $\int (4x - 25)\, dx$

b) $\int (5x^2 + 2x - 7)\, dx$

c) $\int \left(\frac{4}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{3}\right) dx$

d) $\int \left(-\frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + 1\right) dx$

e) $\int \left(-\frac{3}{5}x^7 - x^4 + 2x\right) dx$

f) $\int (x-5)^2\, dx$

g) $\int (x+1)^3\, dx$

h) $\int (x+1)(x-1)^3\, dx$

a) $\int (4x - 25)\, dx = 2x^2 - 25x + k$

b) $\int (5x^2 + 2x - 7)\, dx = \frac{5x^3}{3} + x^2 - 7x + k$

c) $\int \left(\frac{4}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{3}\right) dx = \frac{x^4}{3} - \frac{5x^3}{3} + \frac{x}{3} + k$

d) $\int \left(-\frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + 1\right) dx = \frac{-x^7}{28} - \frac{x^5}{20} + x + k$

e) $\int \left(-\frac{3}{5}x^7 - x^4 + 2x\right) dx = \frac{-3x^8}{40} - \frac{x^5}{5} + x^2 + k$

f) $\int (x-5)^2 dx = \frac{(x-5)^3}{3} + k$

g) $\int (x+1)^3 dx = \frac{(x+1)^4}{4} + k$

h) $\int (x+1)(x-1)^3 dx = \int (x^4 - 2x^3 + 2x - 1)\, dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + x^2 - x + k$

043 **Halla las integrales de funciones con radicales.**

a) $\int 3\sqrt{5x}\, dx$

b) $\int \left(2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}\right) dx$

c) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 9\sqrt[5]{x}\right) dx$

d) $\int \left(\frac{8}{x} + \sqrt[3]{2x}\right) dx$

e) $\int \left(\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x}\right) dx$

f) $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$

a) $\int 3\sqrt{5x}\,dx = 2\sqrt{5x^3} + k$

b) $\int (2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x})\,dx = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4} + k$

c) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 9\sqrt[5]{x}\right) dx = 8\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{15}{2}\sqrt[5]{x^6} + k$

d) $\int \left(\frac{8}{x} + \sqrt[3]{2x}\right) dx = 8\ln|x| + \frac{3}{4}\sqrt[3]{2x^4} + k$

e) $\int (\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x})\,dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{32}{5}\sqrt[4]{x^5} + k$

f) $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx = 3\sqrt[3]{x^2} - 8\sqrt{x} + k$

044 Determina estas integrales de funciones racionales.

a) $\int \frac{4}{x-2}\,dx$

b) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) dx$

c) $\int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-4}\right) dx$

d) $\int \frac{1}{(x+4)^2}\,dx$

e) $\int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{7}{x+3}\right) dx$

f) $\int \left(\frac{2}{(x+3)^3} - \frac{5}{(x-3)^2}\right) dx$

g) $\int \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

h) $\int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}\right) dx$

a) $\int \frac{4}{x-2}\,dx = 4\ln|x-2| + k$

b) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) dx = \ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + k$

c) $\int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-4}\right) dx = 2\ln|x+3| - \ln|x-4| + k$

d) $\int \frac{1}{(x+4)^2}\,dx = -\frac{1}{x+4} + k$

e) $\int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{7}{x+3}\right) dx = \frac{-1}{x-1} + 7\ln|x+3| + k$

f) $\int \left(\frac{2}{(x+3)^3} - \frac{5}{(x-3)^2}\right) dx = \frac{-1}{(x+3)^2} + \frac{5}{(x-3)} + k$

g) $\int \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{x} + k$

h) $\int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}\right) dx = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{2}{x} + 3\ln|x| + k$

045 Obtén la integral de cada una de las siguientes funciones, indicando las propiedades que utilizas.

a) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+4}$

b) $f(x)=\dfrac{7}{x+3}-\dfrac{1}{x-5}$

c) $f(x)=\dfrac{1.492}{x-7}-\dfrac{5}{x}$

d) $f(x)=\dfrac{6}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2}$

a) $$\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+4}\right)dx \underset{\int(f+g)=\int f+\int g}{=} \int\frac{2}{x-1}\,dx+\int\frac{3}{x+4}\,dx \underset{\int a\cdot f=a\int f}{=}$$

$$=2\int\frac{1}{x-1}\,dx+3\int\frac{1}{x+4}\,dx \underset{\int\frac{f'}{f}=\ln|f|+k}{=} 2\ln|x-1|+3\ln|x+4|+k$$

b) $$\int\left(\frac{7}{x+3}-\frac{1}{x-5}\right)dx \underset{\int(f+g)=\int f+\int g}{=} \int\frac{7}{x+3}\,dx-\int\frac{1}{x-5}\,dx \underset{\int a\cdot f=a\int f}{=}$$

$$=7\int\frac{1}{x+3}\,dx-\int\frac{1}{x-5}\,dx \underset{\int\frac{f'}{f}=\ln|f|+k}{=} 7\ln|x+3|-\ln|x-5|+k$$

c) $$\int\left(\frac{1.492}{x-7}-\frac{5}{x}\right)dx \underset{\int(f+g)=\int f+\int g}{=} \int\frac{1.492}{x-7}\,dx-\int\frac{5}{x}\,dx \underset{\int a\cdot f=a\int f}{=}$$

$$=1.492\int\frac{1}{x-7}\,dx-5\int\frac{1}{x}\,dx \underset{\int\frac{f'}{f}=\ln|f|+k}{=} 1.492\ln|x-7|-5\ln|x|+k$$

d) $$\int\left(\frac{6}{x^2+1}-\frac{1}{x^2}\right)dx \underset{\int(f+g)=\int f+\int g}{=} \int\frac{6}{x^2+1}\,dx-\int\frac{1}{x^2}\,dx \underset{\int a\cdot f=a\int f}{=}$$

$$=6\int\frac{1}{x^2+1}\,dx-\int\frac{1}{x^2}\,dx \underset{\substack{\int\frac{f'}{1+f\cdot 2}=\text{arc tg } x\ f \\ \int f'f^n=\frac{f^{n+1}}{n+1}}}{=} 6\,\text{arc tg } x-\frac{1}{x}+k$$

046 Halla estas integrales de funciones exponenciales.

a) $\int e^{x-3}\,dx$

b) $\int e^{2x+14}\,dx$

c) $\int (3^x + e^x)\,dx$

d) $\int 5^{\frac{2}{3}x}\,dx$

e) $\int 7^{3x-\frac{1}{2}}\,dx$

f) $\int (3\cdot 2^{2x} + 7)\,dx$

a) $\int e^{x-3}\,dx = e^{x-3} + k$

b) $\int e^{2x+14}dx = \dfrac{e^{2x+14}}{2} + k$

c) $\int (3^x + e^x)\,dx = \dfrac{3^x}{\ln 3} + e^x + k$

d) $\int 5^{\frac{2}{3}x}\,dx = \dfrac{3\cdot 5^{\frac{2}{3}x}}{2\ln 5} + k$

e) $\int 7^{3x-\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{7^{3x-\frac{1}{2}}}{3\ln 7} + k$

f) $\int (3\cdot 2^{2x} + 7)\,dx = \dfrac{3\cdot 2^{2x}}{2\ln 2} + 7x + k$

047 Calcula las integrales de estas funciones.

a) $\int cos\ 2x\,dx$

b) $\int 4\,sen\,(x+\pi)\,dx$

c) $\int 3\,cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{3}\right)dx$

d) $\int 5\,sen\,(2x-\pi)\,dx$

e) $\int 3\,sec^2\,\dfrac{1}{5}x\,dx$

f) $\int \dfrac{7}{sen^2\,3x}\,dx$

g) $\int \dfrac{5}{cos^2\,\dfrac{x}{3}}\,dx$

h) $\int \dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

i) $\int \dfrac{3}{x^2+1}\,dx$

j) $\int \dfrac{1}{(3x)^2+1}\,dx$

a) $\int cos\ 2x\,dx = \dfrac{1}{2}sen\ 2x + k$

b) $\int 4\,sen\,(x+\pi)\,dx = -4\,cos\,(x+\pi) + k$

c) $\int 3\,cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{3}\right)dx = -9\,sen\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{3}\right) + k$

d) $\int 5\,sen\,(2x-\pi)\,dx = \frac{-5}{2}cos\,(2x-\pi)+k$

e) $\int 3\,sec^2\frac{1}{5}x\,dx = 15\int\frac{\frac{1}{5}}{cos^2\frac{1}{5}x}\,dx = 15\,tg\,\frac{1}{5}x+k$

f) $\int\frac{7}{sen^2 3x}\,dx = \frac{7}{3}\int\frac{3}{sen^2 3x}\,dx = -\frac{7}{3}\,cotg\,3x+k$

g) $\int\frac{5}{cos^2\frac{x}{3}}\,dx = 15\int\frac{\frac{1}{3}}{cos^2\frac{x}{3}}\,dx = 15\,tg\,\frac{x}{3}+k$

h) $\int\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 3\,arc\,sen\,x+k$

i) $\int\frac{3}{x^2+1}\,dx = 3\,arc\,tg\,x+k$

j) $\int\frac{1}{(3x)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\,arc\,tg\,3x+k$

048 Resuelve estas integrales.

a) $\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx$

b) $\int\frac{8x-3}{4x^2-3x+1}\,dx$

c) $\int\frac{6x^2+1}{2x^3+x-9}\,dx$

d) $\int\frac{sen\,x}{cos\,x}\,dx$

e) $\int cotg\,x\,dx$

f) $\int 3x^2\,sen\,x^3\,dx$

g) $\int(2x+1)\,sen\,(x^2+x+5)\,dx$

h) $\int 6x\,cos\,(3x^2-5)\,dx$

i) $\int 6xe^{3x^2}\,dx$

j) $\int(3x^2+1)\,e^{x^3+x}\,dx$

k) $\int(12x^2-6x)e^{4x^3-3x^2+7}\,dx$

l) $\int xe^{7x^2}\,dx$

m) $\int\frac{-2}{4+x^2}\,dx$

n) $\int\frac{-2}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$

ñ) $\int -xe^{x^2}\,dx$

o) $\int\left(\frac{x+\ln x}{x}\right)dx$

a) $\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln\left|x^2+1\right|+k$

b) $\int\frac{8x-3}{4x^2-3x+1}\,dx = \ln\left|4x^2-3x+1\right|+k$

c) $\displaystyle\int \frac{6x^2+1}{2x^2+x-9}\,dx = \ln\left|2x^2+x-9\right| + k$

d) $\displaystyle\int \frac{sen\,x}{cos\,x}\,dx = -\ln\left|cos\,x\right| + k$

e) $\displaystyle\int cotg\,dx = \int \frac{cos\,x}{sen\,x}\,dx = \ln\left|sen\,x\right| + k$

f) $\displaystyle\int 3x^2\,sen\,x^3\,dx = -cos\,x^3 + k$

g) $\displaystyle\int (2x+1)\,sen\,(x^2+x+5)\,dx = -cos\,(x^2+x+5) + k$

h) $\displaystyle\int 6x\,cos\,(3x^2-5)\,dx = sen\,(3x^2-5) + k$

i) $\displaystyle\int 6x\,e^{3x^2}dx = e^{3x^2} + k$

j) $\displaystyle\int (3x^2+1)\,e^{x^3+x}dx = e^{x^3+x} + k$

k) $\displaystyle\int (12x^2-6x)e^{4x^3-3x^2+7}dx = e^{4x^3-3x^2+7} + k$

l) $\displaystyle\int xe^{7x^2}dx = \frac{e^{7x^2}}{14} + k$

m) $\displaystyle\int \frac{-2}{4+x^2}\,dx = \frac{-1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = -arc\,tg\,\frac{x}{2} + k$

n) $\displaystyle\int \frac{-2}{\sqrt{3-x^2}}\,dx = \frac{-2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}\,dx = -2arc\,sen\,\frac{x}{\sqrt{3}} + k$

ñ) $\displaystyle\int -x\,e^{x^2}\,dx = \frac{-1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{-e^{x^2}}{2} + k$

o) $\displaystyle\int \frac{x+\ln x}{x}\,dx = \int dx + \int \frac{\ln x}{x}\,dx = x + \int \frac{\ln x}{x}\,dx = x + \frac{\ln^2 x}{2} + k$

049 **Calcula las siguientes integrales.**

a) $\displaystyle\int cos\,(5x+1)\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,dx$

a) $\displaystyle\int cos\,(5x-1)\,dx = \frac{sen\,(5x-1)}{5} + k$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,dx = \frac{-2}{\sqrt{(x+2)}} + k$

050 Calcula la integral de cada una de las funciones, indicando las propiedades que utilizas.

a) $f(x) = x + \cos x$

b) $f(x) = 6e^x$

c) $f(x) = 5x^2 + 7x$

d) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4$

e) $f(x) = 10x^4 - 3\,\text{sen}\, x$

f) $f(x) = 8 \cdot 2^x + \dfrac{10}{\sqrt{x}}$

a) $$\int (x + \cos x)\, dx \underset{\int (f+g) = \int f + \int g}{=} \int x\, dx + \int \cos x\, dx \underset{\substack{\int f' f^n = \frac{f^{n+1}}{n+1} \\ \int f' \cos f = \text{sen}\, f}}{=} \frac{x^2}{2} + \text{sen}\, x + k$$

b) $$\int 6\, e^x dx \underset{\int a \cdot f = a \int f}{=} 6 \int e^x dx \underset{\int f' e^f = e^f}{=} 6\, e^x + k$$

c) $$\int (5x^2 + 7x)\, dx \underset{\int (f+g) = \int f + \int g}{=} \int 5x^2\, dx + \int 7x\, dx \underset{\int a \cdot f = a \int f}{=} 5 \int x^2\, dx + 7 \int x\, dx \underset{\int f' f^n = \frac{f^{n+1}}{n+1}}{=} \frac{5x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + k$$

d) $$\int (2x^3 - x^2 + 4)\, dx \underset{\int (f+g) = \int f + \int g}{=} \int 2x^3\, dx - \int x^2\, dx + \int 4x\, dx \underset{\int a \cdot f = a \int f}{=}$$

$$= 2 \int x^3\, dx - \int x^2\, dx + 4 \int x\, dx \underset{\int f' f^n = \frac{f^{n+1}}{n+1}}{=} \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x + k$$

e) $$\int (10x^4 - 3\,\text{sen}\, x)\, dx \underset{\int (f+g) = \int f + \int g}{=} \int 10x^4\, dx - \int 3\,\text{sen}\, x\, dx \underset{\int a \cdot f = a \int f}{=}$$

$$= 10 \int x^4\, dx - 3 \int \text{sen}\, x\, dx \underset{\substack{\int f' f^n = \frac{f^{n+1}}{n+1} \\ \int f' \text{sen}\, f = -\cos f}}{=} 2x^5 + 3\cos x + k$$

f) $$\int\left(8\cdot 2^x+\frac{10}{\sqrt{x}}\right)dx \underset{\int(f+g)=\int f+\int g}{=} \int(8\cdot 2^x)\,dx+\int\frac{10}{\sqrt{x}}\,dx \underset{\int a\cdot f=a\int f}{=}$$

$$=8\int 2^x\,dx+10\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \underset{\substack{\int f'\,a^f=\frac{a^f}{\ln a}\\ \int f'\,f^n=\frac{f^{n+1}}{n+1}}}{=} 8\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+20\sqrt{x}+k$$

051 Comprueba, con ejemplos, las siguientes afirmaciones.

a) La integral de un producto de funciones no coincide con el producto de las integrales de cada una de ellas.

b) La integral indefinida de un cociente de funciones no coincide con el cociente de las integrales de cada una de ellas.

a) $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+k\\ \displaystyle\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\to\int x\,dx\cdot\int x\,dx=\frac{x^4}{4}+k\end{array}\right\}\to\int x^2\,dx\neq\int x\,dx\cdot\int x\,dx$$

b) $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int 1\,dx=\int\frac{x}{x}\,dx=x+k\\ \displaystyle\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\to\frac{\int x\,dx}{\int x\,dx}=\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}+k=1+k\end{array}\right\}\to\int\frac{x}{x}dx\neq\frac{\int x\,dx}{\int x\,dx}$$

052 Calcular $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$.

(Castilla y León. Junio 2002. Prueba A. Cuestión 3)

$$\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx=\frac{-1}{2\operatorname{sen}^2 x}+k$$

053 Calcula $\displaystyle\int(2x-3)\operatorname{tg}(x^2-3x)\,dx$, siendo *tg* la función tangente.

(Andalucía. Septiembre 2006. Opción A. Ejercicio 2)

$$\int(2x-3)\operatorname{tg}(x^2-3x)\,dx=\int\frac{(2x-3)\operatorname{sen}(x^2-3x)}{\cos(x^2-3x)}\,dx=-\ln\left|\cos(x^2-3x)\right|+k$$

054 Sea la función $f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$. Encontrar una función primitiva de f.

(Asturias. Junio 2002. Bloque 4)

$$\int \frac{6x}{x^2+1}\,dx = 3\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = 3\ln\left|x^2+1\right| + k$$

055 Calcular $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx$.

(Castilla y León. Septiembre 2002. Prueba A. Cuestión 4)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{1+2x^2} + k$$

056 Calcula la integral indefinida $\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

(La Rioja. Septiembre 2003. Propuesta A. Ejercicio 4)

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$
$$= -\sqrt{1-x^2} + 4\,\text{arc sen}\,x + k$$

057 Calcula: $\int \frac{3x+4}{x^2+1}\,dx$

(Andalucía. Año 2007. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 2)

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{3x}{x^2+1}\,dx + 4\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| + 4\,\text{arc tg}\,x + k$$

058 Calcula la primitiva de $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + k$$

059 Calcular la primitiva que sigue: $\int \frac{2x+A}{x^2+4}\,dx$ en función del valor de A.

(País Vasco. Julio 2004. Bloque D. Cuestión D)

$$\int \frac{2x+A}{x^2+4}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + A\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \ln\left|x^2+4\right| + 2A\cdot\text{arc tg}\,\frac{x}{2} + k$$

060 Una función $y = f(x)$, con $x > -1$, tiene por derivada: $y' = \dfrac{a}{1+x}$, donde a es una constante. Determina la función si, además, sabemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$.

$$f(x) = \int \frac{a}{1+x}\,dx = a\ln|1+x| + k \to \begin{cases} f(0) = 1 \to a\ln 1 + k = 1 \to k = 1 \\ f(1) = -1 \to a\ln 2 + 1 = -1 \to a = \dfrac{-2}{\ln 2} \end{cases}$$

Por tanto la función es $f(x) = \dfrac{-2}{\ln 2}\ln|1+x| + 1$.

061 Calcular la primitiva de la función $f(x) = (x^2+1)^{-1}x$ que se anula en $x = 2$.

(Extremadura. Septiembre 2002. Repertorio B. Ejercicio 4)

$$F(x) = \int (x^2+1)^{-1}x\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + k$$

$$f(2) = 0 \to \frac{1}{2}\ln|1+2^2| + k = 0 \to k = -\frac{\ln 5}{2} = -\ln\sqrt{5}$$

$$\to F(x) = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| - \ln\sqrt{5}$$

062 De la función $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ se sabe que $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2) = 0$.

a) Determina f.

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

(Andalucía. Año 2004. Modelo 6. Opción A. Ejercicio 1)

a) $$f(x) = \int \frac{3}{(x+1)^2}\,dx = \frac{-3}{x+1} + k$$

$$f(2) = 0 \to \frac{-3}{3} + k = 0 \to k = 1 \to f(x) = \frac{-3}{x+1} + 1$$

b) $$F(x) = \int\left(\frac{-3}{x+1} + 1\right)dx = -3\ln|x+1| + x + k$$

$$F(0) = 1 \to k = 1 \to F(x) = -3\ln|x+1| + \frac{3}{2}x + 1$$

063 Calcular la primitiva de la función $f(x) = (x+1)^2 x^{-\frac{1}{2}}$ que se anule en $x = 1$.

(Extremadura. Septiembre 2005. Repertorio A. Ejercicio 4)

$$\int (x+1)^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx \underset{\substack{t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx}}{=} 2\int (t^2+1)^2\,dt = 2\left(\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + t\right) + k =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \sqrt{x} + k$$

$$F(1) = 0 \to \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + 1 + k = 0 \to k = -\frac{31}{15} \to F(x) = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \sqrt{x} - \frac{31}{15}$$

064 Determina la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ tiene de ecuación $5x - y - 3 = 0$.

(Andalucía. Año 2001. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 2)

$$f''(x) = 3$$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int 3\,dx = 3x + k_1$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (3x + k_1)\,dx = \frac{3}{2}x^2 + k_1x + k_2$$

La recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 5x - 3$ $\to$ La pendiente es $m = 5$.

Para $x = 1 \to y = 5 \cdot 1 - 3 = 2 \to$ La función pasa por el punto $(1, 2)$.

$$f'(1) = 5 \to 3 + k_1 = 5 \to k_1 = 2$$

$$f(1) = 2 \to \frac{3}{2} + k_1 + k_2 = 2 \to \frac{3}{2} + 2 + k_2 = 2 \to k_2 = -\frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

065 Halla una función polinómica de tercer grado $f(x)$ que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

- Su derivada es $f'(x) = x^2 - 3x$.
- El valor del máximo relativo es el doble del mínimo relativo.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (x^2 - 3x)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + k$$

Calculamos su máximo y mínimo relativo.

$$f'(x) = 0 \to \begin{cases} x = 3 \to f(3) = 9 - \dfrac{27}{2} + k = \dfrac{-9}{2} + k \\ x = 0 \to f(0) = k \end{cases}$$

Imponemos la condición.

$$f(0) = 2f(3) \to k = 2\left(\frac{-9}{2} + k\right) \to k = 9$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9$$

066 De una función derivable se sabe que pasa por el punto $(-1, -4)$ y que su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Determina la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} + k_1 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln|x| + k_2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Como pasa por el punto $(-1, -4)$:

$$f(-1) = -4 \rightarrow -2 - \frac{1}{2} + k_1 = -4 \rightarrow k_1 = -\frac{3}{2}$$

Como existe la derivada en $x = 1$, necesariamente la función es continua y derivable en dicho punto.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \rightarrow 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 + k_2 \rightarrow k_2 = 0$$

La función es: $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \ln|x| & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) La recta tangente es: $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$$f'(2) = \frac{1}{2} \rightarrow y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x-2) \rightarrow y = \frac{x-2}{2} + \ln 2$$

067 **Calcula estas integrales por partes.**

a) $\displaystyle\int x^3 \ln x \, dx$

b) $\displaystyle\int \ln(2x+1)\, dx$

c) $\displaystyle\int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx$

d) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

f) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} 2x \, dx$

g) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} 2x \, dx$

h) $\displaystyle\int (2x+3)e^{2x}\, dx$

i) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\, dx$

j) $\displaystyle\int (x^2 - 5)\cos x \, dx$

k) $\displaystyle\int (2x^2 + x - 2)e^{3x}\, dx$

l) $\displaystyle\int (2 + e^{2x})\cos(x+1)\, dx$

a) $$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^3}{4}\, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + k = \frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + k$$

$u = \ln x \rightarrow du = \dfrac{1}{x}\, dx$

$dv = x^3\, dx \rightarrow v = \dfrac{x^4}{4}$

b) $$\int \ln(2x+1)\, dx = x \ln|2x+1| - \int \frac{2x}{2x+1}\, dx = x\ln|2x+1| - \int \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) dx =$$

$u = \ln(2x+1) \rightarrow du = \dfrac{2}{2x+1}\, dx$

$dv = dx \rightarrow v = x$

$$= x\ln|2x+1| - x + \frac{\ln|2x+1|}{2} + k = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln|2x+1| - x + k$$

c) $\displaystyle\int e^{-x}\text{sen } 2x\, dx = -e^{-x}\frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x\, dx =$

$u = e^{-x} \to du = -e^{-x}dx$

$dv = \text{sen } 2x\, dx \to v = \frac{-\cos 2x}{2}$

$u = e^{-x} \to du = -e^{-x}dx$

$dv = \cos 2x\, dx \to v = \frac{\text{sen } 2x}{2}$

$$= -e^{-x}\frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{-x}\frac{\text{sen } 2x}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-x}\text{sen } 2x\, dx\right)\int e^{-x}\text{sen } 2x\, dx =$$

$$= -e^{-x}\frac{\cos 2x}{2} - e^{-x}\frac{\text{sen } 2x}{4} - \frac{1}{4}\int e^{-x}\text{sen } 2x\, dx$$

$$\frac{5}{4}\int e^{-x}\text{sen } 2x\, dx = -e^{-x}\left(\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\text{sen } 2x}{4}\right)$$

$$\to \int e^{-x}\text{sen } 2x\, dx = \frac{-e^{-x}}{5}(2\cos 2x + \text{sen } 2x) + k$$

d) $\displaystyle\int \text{arc tg } x\, dx = x \cdot \text{arc tg } x - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx = x \cdot \text{arc tg } x - \frac{\ln\left|x^2+1\right|}{2} + k$

$u = \text{arc tg } x \to du = \frac{1}{x^2+1}\, dx$

$dv = dx \to v = x$

e) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\, dx \to 2\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \ln^2 x \to \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{\ln^2 x}{2} + k$

$u = \ln x \to du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = \frac{1}{x}\, dx \to v = \ln x$

f) $\displaystyle\int x \text{ sen } 2x\, dx = \frac{-x\cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2}\, dx = -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{\text{sen } 2x}{4} + k$

$u = x \to du = dx$

$dv = \text{sen } 2x\, dx \to v = \frac{-\cos 2x}{2}$

g) $\displaystyle\int x^2 \text{ sen } 2x\, dx = \frac{-x^2\cos 2x}{2} + \int x\cos 2x\, dx =$

$u = x^2 \to du = 2x\, dx$

$dv = \text{sen } 2x\, dx \to v = \frac{-\cos 2x}{2}$

$u = x \to du = dx$

$dv = \cos 2x\, dx \to v = \frac{\text{sen } 2x}{2}$

$$= \frac{-x^2\cos 2x}{2} + \frac{x\text{ sen } 2x}{2} - \int \frac{\text{sen } 2x}{2}\, dx = \frac{-x^2\cos 2x}{2} + \frac{x\text{ sen } 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + k$$

h) $\displaystyle\int (2x+3)e^{2x}\, dx = \frac{(2x+3)e^{2x}}{2} - \int e^{2x}\, dx = \frac{(2x+3)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + k = (x+1)e^{2x} + k$

$u = 2x+3 \to du = 2\, dx$

$dv = e^{2x}dx \to v = \frac{e^{2x}}{2}$

i) $$\int \frac{x}{e^x}\,dx = \frac{x}{e^x} + \int e^{-x}\,dx = \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + k = \frac{x-1}{e^x} + k$$

$u = x \rightarrow du = dx$
$dv = e^{-x}dx \rightarrow v = -e^{-x}$

j) $$\int (x^2-5)\cos x\,dx = (x^2-5)\,\text{sen}\,x - 2\int x\,\text{sen}\,x\,dx =$$

$u = x^2 - 5 \rightarrow du = 2x\,dx$
$dv = \cos x\,dx \rightarrow v = \text{sen}\,x$

$u = x \rightarrow du = dx$
$dv = \text{sen}\ x\ dx \rightarrow v = -\cos\ x$

$$= (x^2-5)\ \text{sen}\ x + 2x\ \cos\ x - 2\int \cos\ x\ dx = (x^2-5)\ \text{sen}\ x + 2x\ \cos\ x - 2\ \text{sen}\ x + k$$

k) $$\int (2x^2+x-2)e^{3x}dx = \frac{(2x^2+x-2)e^{3x}}{3} - \int \frac{(4x+1)e^{3x}}{3}\,dx = \frac{(2x^2+x-2)e^{3x}}{3} -$$

$u = 2x^2 + x - 2 \rightarrow du = (4x+1)\,dx$
$dv = e^{3x}dx \rightarrow v = \dfrac{e^{3x}}{3}$

$u = 4x + 1 \rightarrow du = 4\,dx$
$dv = e^{3x}dx \rightarrow v = \dfrac{e^{3x}}{3}$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{(4x+1)e^{3x}}{3} - \int \frac{4e^{3x}}{3}\,dx\right) = \frac{(2x^2+x-2)e^{3x}}{3} - \frac{(4x+1)e^{3x}}{9} + \frac{4}{27}e^{3x} + k$$

l) $$\int (2+e^{2x})\cos(x+1)\,dx = \int 2\cos(x+1)\,dx + \int e^{2x}\cos(x+1)\,dx =$$

$$= 2\,\text{sen}(x+1) + e^{2x}\text{sen}(x+1) - \int 2e^{2x}\text{sen}(x+1)\,dx =$$

$u = e^{2x} \rightarrow du = 2e^{2x}dx$
$dv = \text{sen}\,(x+1)\,dx \rightarrow v = -\cos\,(x+1)$

$$= 2\ \text{sen}\,(x+1) + e^{2x}\text{sen}\,(x+1) + 2e^{2x}\cos\,(x+1) - 2\int 2e^{2x}\cos\,(x+1) =$$

$$= 2\ \text{sen}\,(x+1) + \frac{e^{2x}\text{sen}\,(x+1) + 2e^{2x}\cos\,(x+1)}{5} + k$$

068 Utilizando el método de integración por partes, calcule $I = \int \ln\ x\ dx$.

(Murcia. Septiembre 2002. Bloque 4. Cuestión 1)

$$I = \int \ln x\ dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + k$$

$u = \ln x \rightarrow du = \dfrac{1}{x}\,dx$
$dv = dx \rightarrow v = x$

069 Utilizar el método de integración por partes para encontrar una primitiva de la función $f(x) = x\cos 3x$.

(País Vasco. Septiembre 2002. Bloque D. Cuestión D)

$$\int x\cos 3x\ dx = \frac{x\,\text{sen}\ 3x}{3} - \int \frac{\text{sen}\ 3x}{3}\,dx = \frac{x\,\text{sen}\ 3x}{3} + \frac{\cos\ 3x}{9} + k$$

$u = x \rightarrow du = dx$
$dv = \cos 3x\ dx \rightarrow v = \dfrac{\text{sen}\ 3x}{3}$

070 Aplicar el método de integración por partes para calcular las siguientes primitivas.

a) $I = \int x\, e^{2x}\, dx$ b) $J = \int x \ln x\, dx$

(País Vasco. Junio 2004. Bloque D. Cuestión D)

a) $$\underbrace{\int x e^{2x} dx = \frac{x e^{2x}}{2}}_{\substack{u = x \to du = dx \\ dv = e^{2x}dx \to v = \frac{e^{2x}}{2}}} - \int \frac{e^{2x}}{2}\, dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + k$$

b) $$\underbrace{\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}}_{\substack{u = \ln x \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x\, dx \to v = \frac{x^2}{2}}} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + k$$

071 Calcula la integral $\int \frac{2}{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx$ indicando los pasos realizados.

(C. Valenciana. Junio 2003. Ejercicio A. Problema 2)

$$\int \frac{2}{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{2}{\pi} \underbrace{\int x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{2}{\pi}}_{\substack{u = x \to du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx \to v = -\cos x}}\left(-x\cos x + \int \cos x\, dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-x\cos x + \operatorname{sen} x\right) + k$$

072 Sea la función $f(x) = x^2 e^x$. Calcular una primitiva.

(Asturias. Septiembre 2002. Bloque 4)

$$\underbrace{\int x^2 e^x dx = x^2 e^x}_{\substack{u = x^2 \to du = 2x\, dx \\ dv = e^x dx \to v = e^x}} - \underbrace{\int 2x\, e^x dx = x^2 e^x}_{\substack{u = x \to du = dx \\ dv = e^x dx \to v = e^x}} - 2\left(x\, e^x - \int e^x dx\right) =$$

$$= x^2 e^x - 2x\, e^x + 2\, e^x + k = (x^2 - 2x + 2)\, e^x + k$$

073 Calcula $\int (x^2 - 1)e^{-x}\, dx$.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 2)

$$\underbrace{\int (x^2 - 1)e^{x} dx = -(x^2-1)e^{-x}}_{\substack{u = x^2 - 1 \to du = 2x\, dx \\ dv = e^{-x}dx \to v = -e^{-x}}} + \underbrace{\int 2x\, e^{-x} dx = -(x^2-1)e^{-x}}_{\substack{u = 2x \to du = 2\, dx \\ dv = e^{-x}dx \to v = -e^{-x}}} - 2x\, e^{-x} + \int 2\, e^{-x} dx =$$

$$= -(x^2 - 1)e^{-x} - 2x\, e^{-x} - 2e^{-x} + k = (-x^2 - 2x - 1)e^{-x} + k$$

074 Calcular la primitiva siguiente: $\int \ln(25+x^2)\,dx$

(Canarias. Junio 2003. Opción A. Cuestión 2)

$$\int \ln(25+x^2)\,dx = x\ln(25+x^2) - \int \frac{2x^2}{25+x^2}\,dx =$$

$u = \ln(25+x^2) \rightarrow du = \frac{2x}{25+x^2}\,dx$

$dv = dx \rightarrow v = x$

$$= x\ln(25+x^2) - \int\left(2-\frac{50}{25+x^2}\right)dx = x\ln(25+x^2) - \int 2\,dx + \int \frac{50}{25+x^2}\,dx =$$

$$= x\ln(25+x^2) - 2x + 10\,arc\,tg\,\frac{x}{5} + k$$

075 Halla una función primitiva de:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

que pase por el punto $P(e, 2)$.

$$F(x) = \int\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)dx = \ln|x| - x\ln|x| + x + k$$

$$F(e) = 2 \rightarrow 1 - e + e + k = 2 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = \ln|x| - x\ln|x| + x + 1$$

076 En cada uno de los siguientes casos, obtén una función $f(x)$ que cumpla las condiciones que se señalan:

a) $f'(x) = x^2\,sen\,x,\ f(0) = -1$

b) $f'(x) = x\ln x,\ f(1) = \frac{1}{2}$

a) $$\int x^2\,sen\,x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2x\,sen\,x + 2\cos x + k =$$

$u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx$

$dv = sen\,x\,dx \rightarrow v = -\cos x$

$u = x \rightarrow du = dx$

$\cos x\,dv = dx \rightarrow v = sen\,x$

$$= (2-x^2)\cos x + 2x\,sen\,x + k$$

$$f(0) = -1 \rightarrow 2 + k = -1 \rightarrow k = -3 \rightarrow f(x) = (1-x^2)\cos x + x\,sen\,x - 3$$

b) $$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + k$$

$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$

$dv = x\,dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$$f(1) = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{4} + k = \frac{1}{2} \rightarrow k = \frac{3}{4} \rightarrow f(x) = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}$$

077 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f'(x) = x^2\,sen\,2x$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 5. Opción B. Cuestión 2)

$$\int x^2 \operatorname{sen} 2x\,dx = \underbrace{-\frac{x^2\cos 2x}{2} + \int x\cos 2x\,dx}_{\substack{u = x^2 \to du = 2x\,dx \\ dv = \operatorname{sen} 2x\,dx \to v = -\frac{\cos 2x}{2}}} = \underbrace{-\frac{x^2\cos 2x}{2} + \frac{x\operatorname{sen} 2x}{2}}_{\substack{u = x \to du = dx \\ dv = \cos 2x\,dx \to v = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}}} - \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}dx =$$

$$= -\frac{x^2\cos 2x}{2} + \frac{x\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} = \frac{(1-2x^2)\cos 2x}{4} + \frac{x\operatorname{sen} 2x}{2} + k$$

$$f(0) = 1 \to \frac{1}{4} + k = 1 \to k = \frac{3}{4} \to f(x) = \frac{(1-2x^2)\cos 2x}{4} + \frac{x\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{3}{4}$$

078 Obtener la expresión de una función $f(x)$ sabiendo que $f'(x) = (x + 1)e^{2x}$ y que $f(0) = \frac{5}{4}$.

(Canarias. Septiembre 2001. Opción B. Cuestión 2)

$$\int (x+1)e^{2x}dx = \underbrace{\frac{(x+1)e^{2x}}{2}}_{\substack{u = x+1 \to du = dx \\ dv = e^{2x}dx \to v = \frac{e^{2x}}{2}}} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + k = \frac{(x+1)e^{2x}}{4} + k$$

$$f(0) = \frac{5}{4} \to \frac{1}{4} + k = \frac{5}{4} \to k = 1 \to f(x) = \frac{(2x+1)e^{2x}}{4} + 1$$

079 Dada la función $f(x) = (2x + 1)e^{(x^2+x)}$, determina la función $g(x)$ tal que $g'(x) = f(x)$ (es decir, una primitiva de $f(x)$) y que su gráfica pase por el punto (0, 2).

(Cataluña. Septiembre 2003. Cuestión 1)

$$g(x) = \int (2x+1)e^{x^2+x}dx = e^{x^2+x} + k$$

$$g(0) = 2 \to 1 + k = 2 \to k = 1 \to g(x) = e^{x^2+x} + 1$$

080 Halla la expresión de la familia de funciones tales que la pendiente de las rectas tangentes a sus gráficas en cualquier punto viene dada por $m = (2x + 3)e^{2x}$. Determina, entre todas ellas, la que pasa por el punto (0, 1).

La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada de la función.

$$F(x) = \int (2x+3)e^{2x}dx = \underbrace{\frac{(2x+3)e^{2x}}{2}}_{\substack{u = 2x+3 \to du = 2\,dx \\ dv = e^{2x}\,dx \to v = \frac{e^{2x}}{2}}} - \int e^{2x}dx = \frac{(2x+3)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + k =$$

$$= \frac{(2x+3)e^{2x}}{2} + k = (x+1)e^{2x} + k$$

$F(0) = 1 \to 1 + k = 1 \to k = 0 \to$ La función pedida es $F(x) = (x + 1)e^{2x}$.

081 Calcular $\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$.

(Castilla y León. Septiembre 2008. Prueba A. Cuestión 4)

$$\int \frac{1}{x\,(x+1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \ln|x| - \ln|x+1| + k$$

082 Calcula la siguiente integral indefinida: $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$

(Navarra. Junio 2005. Grupo 2. Opción C)

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + k$$

083 Calcule $\int \frac{dx}{x^2-4}$.

(Murcia. Junio 2003. Bloque 4. Cuestión 1)

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{\ln|x-2| - \ln|x+2|}{4} + k$$

084 Calcular la integral indefinida $\int \frac{dx}{(x-1)^2}$.

(La Rioja. Junio 2004. Propuesta A. Ejercicio 3)

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \frac{-1}{x-1} + k$$

085 Calcular la primitiva que sigue: $\int \frac{2dx}{x^3-x}$.

(País Vasco. Junio 2005. Bloque D. Problema D)

$$\int \frac{2}{x^3-x}\,dx = \int\left(-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx = -2\ln|x| + \ln|x+1| + \ln|x-1| + k$$

086 Calcula las siguientes integrales de funciones racionales.

a) $\int \frac{x+3}{x-1}\,dx$

b) $\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx$

c) $\int \frac{3}{x^2+x-2}\,dx$

d) $\int \frac{5x-1}{x^2-1}\,dx$

e) $\int \frac{x-2}{x^2-x}\,dx$

f) $\int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx$

g) $\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$

h) $\int \frac{12}{x^3+4x^2+x-6}\,dx$

a) $\int \frac{x+3}{x-1}\,dx = \int\left(1+\frac{4}{x-1}\right)dx = x + 4\ln|x-1| + k$

b) $\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx = \int\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)dx = x + \ln|2x+1| + k$

c) $\int \frac{3}{x^2+x-2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \ln|x-1| - \ln|x+2| + k$

d) $\int \frac{5x-1}{x^2-1}\,dx = \int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}\right)dx = 2\ln|x-1| + 3\ln|x+1| + k$

e) $\int \frac{x-2}{x^2-x}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x}\right)dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x| + k$

f) $\int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx = \int\left(\frac{3}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}\right)dx = \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + k$

g) $\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{3}\,arc\,tg\,\frac{x}{3} + k$

h) $\int \frac{12}{x^3+4x^2+x-6}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x+2}+\frac{3}{x+3}\right)dx =$

$= \ln|x-1| - 4\ln|x+2| + 3\ln|x+3| + k$

087 **Halla estas integrales de funciones racionales.**

a) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$

b) $\int \frac{x-2}{x^2+2x-3}\,dx$

c) $\int \frac{x-4}{x^2+2x-3}\,dx$

d) $\int \frac{2x+8}{x^2-4}\,dx$

e) $\int \frac{x^2}{x-4}\,dx$

f) $\int \frac{x}{x^4+1}\,dx$

g) $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$

h) $\int \frac{x^3}{(x+1)^4}\,dx$

i) $\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}\,dx$

j) $\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx$

a) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx = \ln|x-3| - \ln|x-2| + k$

b) $\int \frac{x-2}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{1}{4}\left(\frac{5}{x+3}-\frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{5}{4}\ln|x+3| - \frac{1}{4}\ln|x-1| + k$

c) $\int \frac{x-4}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{1}{4}\left(\frac{7}{x+3}-\frac{3}{x-1}\right)dx = \frac{7}{4}\ln|x+3| - \frac{3}{4}\ln|x-1| + k$

d) $\int \frac{2x+8}{x^2-4}\,dx = \int\left(\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx = 3\ln|x-2| - \ln|x+2| + k$

e) $$\int \frac{x^2}{x-4}\,dx = \int\left(x+4+\frac{16}{x-4}\right)dx = \frac{x}{2}+4x+16\ln|x-4|+k$$

f) $$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\,arc\,tg\,x^2+k$$

g) $$\int \frac{x^4-x^3-x+1}{x^3-x^2}\,dx = \int\left(x-\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+k$$

h) $$\int \frac{x^3}{(x+1)^4}\,dx = \int\left(\frac{-1}{(x+1)^4}+\frac{3}{(x+1)^3}-\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{3(x+1)^3}-\frac{3}{2(x+1)^2}+\frac{3}{x+1}+\ln|x+1|+k$$

i) $$\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}\,dx = \int\left(\frac{-1}{(x+3)^3}+\frac{2}{(x+3)^2}\right)dx = \frac{1}{2(x+3)^2}-\frac{2}{x+3}+k$$

j) $$\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx = \int\left(\frac{-2}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}\right)dx = \frac{2}{x+1}+2\ln|x+1|+k$$

088 Halla la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx$.

(Navarra. Junio 2007. Grupo 2. Opción C)

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx = \int \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{\ln|x-2|}{5}-\frac{\ln|x+3|}{5}+k$$

089 Calcúlese $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx$.

(Castilla y León. Septiembre 2005. Prueba B. Cuestión 1)

$$\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{(x+2)^2}{9}+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\,arc\,tg\left(\frac{x+2}{3}\right)+k$$

090 Calcular $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+3x-10}\,dx$.

(Canarias. Septiembre 2004. Opción B. Cuestión 2)

$$\int \frac{3x}{x^2+3x-10}\,dx = \int \frac{1}{7}\left(\frac{6}{x-2}+\frac{15}{x+5}\right)dx = \frac{6}{7}\ln|x-2|+\frac{15}{7}\ln|x+5|+k$$

091 Calcule $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$.

(Murcia. Septiembre 2003. Bloque 4. Cuestión 2)

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) dx = \ln|x-3| - \ln|x-2| + k$$

092 Calcula $\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\,dx$.

(Andalucía. Septiembre 2006. Opción A. Ejercicio 2)

$$\int \frac{5x^2 - 5x - 160}{x^2 - 25}\,dx = \int \left(5 - \frac{6}{x-5} + \frac{1}{x+5} \right) dx =$$
$$= 5x - 6\ln|x-5| + \ln|x+5| + k$$

093 Calcula la integral $\int \frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2}\,dx$.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 2. Opción A. Ejercicio 2)

$$\int \frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2}\,dx = \int \left(3x + 4 + \frac{3}{x-2} - \frac{3}{x+1} \right) dx =$$
$$= \frac{3x^2}{2} + 4x + 3\ln|x-2| - 3\ln|x+1| + k$$

094 Calcular la integral $\int \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1}\,dx$.

(Murcia. Junio 2008. Bloque 4. Cuestión A)

$$\int \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1}\,dx = \int \left(x - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} \right) dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + k$$

095 Calcular $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}\,dx$.

(Canarias. Junio 2006. Opción B. Cuestión 1)

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}\,dx = \int \left(x + 1 + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x-2| - \ln|x-1| + k$$

096 Calcula la siguiente integral: $\int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2006. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx = \int\left(x+\frac{1-4x}{x^2+4}\right)dx =$$

$$= \int\left(x+\frac{1}{x^2+4}-\frac{4x}{x^2+4}\right)dx = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{x}{2}-2\ln|x^2+4|+k$$

097 Se consideran las funciones reales $f(x)=12x^3-8x^2+9x-5$ y $g(x)=6x^2-7x+2$. Calcular la función $H(x)=\int\frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ que cumple $H(1)=1$.

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 3. Problema 1)

$$H(x)=\int\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}\,dx=\int\left(2x+1+\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}\right)dx=$$

$$=x^2+x+\ln|6x^2-7x+2|+k$$

098 Calcula $I=\int\frac{2}{2-e^x}\,dx$ haciendo el cambio de variable $t=e^x$.

(Andalucía. Año 2007. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 2)

$$I=\int\frac{2}{2-e^x}\,dx \underset{\substack{t=e^x\\ dt=e^x dx}}{=} \int\frac{2}{2-t}\cdot\frac{dt}{t}=\int\left(\frac{1}{2-t}+\frac{1}{t}\right)dt=$$

$$=\ln|2-t|+\ln|t|+k=\ln|2-e^x|+x+k$$

099 Sea la integral $\int e^{2x}\,sen\,e^x\,dx$.

a) Intégrala mediante el cambio $t=e^x$.

b) Calcula la constante de integración para que la función integral pase por el origen de coordenadas.

(Aragón. Junio 2002. Opción B. Cuestión 3)

a) $$\int e^{2x}sen\,e^x dx \underset{\substack{t=e^x\\ dt=e^x dx}}{=} \int\frac{t^2 sen\,t}{t}\,dt=\int t\,sen\,t\,dt \underset{\substack{u=t\to du=dt\\ dv=sen\,t\,dt\to v=-cos\,t}}{=} -t\cos t+\int cos\,t\,dt=$$

$$=-t\cos t+sen\,t+k=-e^x cos\,e^x+sen\,e^x+k$$

b) $f(0)=0\to -cos\,1+sen\,1+k=0\to k=cos\,1-sen\,1$

$\to f(x)=-e^x cos\,e^x-sen\,e^x+cos\,1+sen\,1$

100 Sea $\ln x$ el logaritmo neperiano de x y sea $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$. Usa el cambio de variable $t = \ln x$ para calcular una primitiva de f.

(Andalucía. Año 2002. Modelo 1. Opción A. Ejercicio 1)

$$F(x) = \int \frac{1}{x\,(\ln x)^2}\,dx \underset{\substack{t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx}}{=} \int \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{-1}{t} + k = \frac{-1}{\ln x} + k$$

101 Considera la integral $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)^3}\,dx$.

a) Calcularla realizando el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$.

b) Calcula la misma integral pero haciendo el cambio de variable $\operatorname{tg} x = t$.

c) ¿Se obtiene el mismo resultado? Justifica la respuesta.

(La Rioja. Junio 2000. Propuesta A. Ejercicio 6)

a) $$\int \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)^3}\,dx \underset{\substack{t = \operatorname{sen} x \\ dt = \cos x\,dx}}{=} \int \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{-1}{2t^2} + k = \frac{-1}{2\,(\operatorname{sen} x)^2} + k$$

b) $$\int \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)^3}\,dx \underset{\substack{t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx}}{=} \int \frac{1}{\operatorname{tg} x\ \operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{-1}{2t^2} + k = \frac{-1}{2\,(\operatorname{tg} x)^2} + k$$

c) $$\frac{-1}{2\,(\operatorname{tg} x)^2} + k = \frac{-\cos^2 x}{2\operatorname{sen}^2 x} + k = \frac{\operatorname{sen}^2 x - 1}{2\operatorname{sen}^2 x} + k =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + k = \frac{-1}{2\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2} + k = \frac{-1}{2\operatorname{sen}^2 x} + k'$$

Los resultados solo difieren en una constante por lo que obtenemos la misma integral.

102 Halla, realizando un cambio de variable, las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \cos x\ \operatorname{sen}^3 x\ dx$

b) $\displaystyle\int x \ln(1 + x^2)\ dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\ln 2x}{x}\,dx$

d) $\displaystyle\int 2x\ \operatorname{sen} x^2\ dx$

e) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\ dx$

f) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2 - 1}\,dx$

g) $\displaystyle\int \cos^2 x\ \operatorname{sen} x\ dx$

h) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, e^{\cos x}\ dx$

i) $\displaystyle\int \cos^2 x\ \operatorname{sen}^3 x\ dx$

j) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\,dx$

k) $\displaystyle\int (x^2 + 1)e^{x^3 + 3x}\ dx$

l) $\displaystyle\int \cos^5 x\ \operatorname{sen}^3 x\ dx$

a) $$\int \cos x \,\text{sen}^3 x \,dx = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + k = \frac{\text{sen}^4 x}{4} + k$$

$t = \text{sen}\,x$
$dt = \cos x\,dx$

b) $$\int x \ln(1+x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \ln t\,dt = \frac{1}{2}(t\ln t - t) + k =$$

$t = 1 + x^2$
$dt = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left((1+x^2)\ln(1+x^2) - (1+x^2)\right) + k$$

c) $$\int \frac{\ln 2x}{x}dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + k = \frac{\ln^2(2x)}{2} + k$$

$t = \ln 2x$
$dt = \dfrac{1}{x}\,dx$

d) $$\int 2x\,\text{sen}\,x^2\,dx = \int \text{sen}\,t\,dt = -\cos t + k = -\cos x^2 + k$$

$t = x^2$
$dt = 2x\,dx$

e) $$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int 2(t^2-1)t^2\,dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + k =$$

$t = \sqrt{x+1} \rightarrow t^2 - 1 = x$
$2t\,dt = dx$

$$= \sqrt{x+1}\left(\frac{2(x+1)^2}{5} - \frac{2(x+1)}{3}\right) + k$$

f) $$\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + k = \ln|x^2-1| + k$$

$t = x^2 - 1$
$dt = 2x\,dx$

g) $$\int \cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx = \int -t^2\,dt = \frac{-t^3}{3} + k = \frac{-\cos^3 x}{3} + k$$

$t = \cos x$
$dt = -\text{sen}\,x\,dx$

h) $$\int \text{sen}\,x\,e^{\cos x}\,dx = \int -e^t\,dt = -e^t + k = -e^{\cos x} + k$$

$t = \cos x$
$dt = -\text{sen}\,x\,dx$

i) $$\int \cos^2 x\,\text{sen}^3 x\,dx = \int -t^2(1-t^2)\,dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + k = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + k$$

$t = \cos x$
$dt = -\text{sen}\,x\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{sen^3 x}{\cos x}\,dx \underset{\substack{t=\cos x\\ dt=-sen\,x\,dx}}{=} \int \frac{t^2-1}{t}dt = \frac{t^2}{2} - \ln|t| + k = \frac{\cos^2 x}{2} - \ln|\cos x| + k$

k) $\displaystyle\int (x^2+1)\,e^{x^3+3x}\,dx \underset{\substack{t=x^3+3x\\ dt=(3x^2+3)\,dx}}{=} \int \frac{e^t}{3}dt = \frac{e^t}{3} + k = \frac{e^{x^3+3x}}{3} + k$

l) $\displaystyle\int \cos^5 x\, sen^3 x\,dx \underset{\substack{t=\cos x\\ dt=-sen\,x\,dx}}{=} \int t^5(t^2-1)\,dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6} + k = \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + k$

103 Resuelve utilizando un cambio de variable.

a) $\displaystyle\int \frac{2}{4+x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int x(x+5)^{10}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\displaystyle\int x e^{3x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

g) $\displaystyle\int tg\, 2x\,dx$

h) $\displaystyle\int cotg\,\frac{x}{5}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}\,dx$

j) $\displaystyle\int e^x\sqrt{(e^x+1)^3}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2}{4+x^2}\,dx \underset{\substack{t=\frac{x}{2}\\ dt=\frac{1}{2}\,dx}}{=} \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = arc\,tg\,t + k = arc\,tg\,\frac{x}{2} + k$

b) $\displaystyle\int x(x+5)^{10}\,dx \underset{\substack{t=x+5\to t-5=x\\ dt=dx}}{=} \int (t-5)\,t^{10}dt = \int (t^{11}-5t^{10})\,dt =$

$\displaystyle= \frac{t^{12}}{12} - \frac{5t^{11}}{11} + k = \frac{(x+5)^{12}}{12} - \frac{5(x+5)^{11}}{11} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \underset{\substack{t=\sqrt{x}\\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx}}{=} \int 2tg\,t\,dt = -2\ln|\cos t| + k = -2\ln|\sqrt{x}| + k$

d) $\displaystyle\int x e^{3x^2}\,dx \underset{\substack{t=3x^2\\ dt=6x\,dx}}{=} \int \frac{e^t}{6}\,dt = \frac{e^t}{6}+k = \frac{e^{3x^2}}{6}+k$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \underset{\substack{t=x^2\\ dt=2x\,dx}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{2}\,arc\,sen\,t+k = \frac{1}{2}\,arc\,sen\,x^2+k$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \underset{\substack{t=1-x^2\\ dt=-2x\,dx}}{=} \int \frac{-1}{2\sqrt{t}}\,dt = -\sqrt{t}+k = -\sqrt{1-x^2}+k$

g) $\displaystyle\int tg\,2x\,dx \underset{\substack{t=cos\,2x\\ dt=-2\,sen\,2x\,dx}}{=} \int \frac{-1}{2t}\,dt = \frac{-1}{2}\ln|t|+k = \frac{-1}{2}\ln|cos\,2x|+k$

h) $\displaystyle\int cotg\,\frac{x}{5}\,dx \underset{\substack{t=sen\,\frac{x}{5}\\ dt=\frac{1}{5}\,cos\,\frac{x}{5}\,dx}}{=} \int \frac{5}{t}\,dt = 5\ln|t|+k = 5\ln\left|sen\,\frac{x}{5}\right|+k$

i) $\displaystyle\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}\,dx \underset{\substack{t=x^5\\ dt=5x^4\,dx}}{=} \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{5}\,arc\,sen\,t+k = \frac{1}{5}\,arc\,sen\,x^5+k$

j) $\displaystyle\int e^x\sqrt{(e^x+1)^3}\,dx \underset{\substack{t=e^x+1\\ dt=e^x dx}}{=} \int \sqrt{t^3}\,dt = \frac{2}{5}\sqrt{t^5}+k = \frac{2}{5}\sqrt{(e^x+1)^5}+k$

104 Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Indicación: Puede ayudarte realizar un cambio de variable adecuado.

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx \underset{\substack{t=\sqrt{x}\\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx}}{=} \int \frac{4t}{1+t}\,dt = \int\left(4-\frac{4}{1+t}\right)dt = 4t-4\ln|1+t|+k = 4\sqrt{x}-4\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+k$$

105 Resolver la integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x+1}}$$

(Canarias. Septiembre 2007. Opción B. Cuestión 2)

$$\int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x+1}}\,dx \underset{\substack{t=\sqrt{x+1}\\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx}}{=} \int \frac{2t}{t^2+t}\,dt = \int \frac{2}{t+1}\,dt =$$

$$= 2\ln|t+1| + k = 2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + k$$

106 Calcula estas integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+7}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^4}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3x^2-7x+4}{2x-3}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2}{9+4x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

g) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$

a) $$\int \frac{3x^2-5x+7}{x^3-4x^2+4x}\,dx = \int\left(\frac{9}{2(x-2)^2}+\frac{5}{4(x-2)}+\frac{7}{4x}\right)dx =$$
$$= \frac{-9}{2(x-2)} + \frac{5}{4}\ln|x-2| + \frac{7}{4}\ln|x| + k$$

b) $$\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = \frac{-1}{18}\int \frac{-18x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1-9x^2}}{9} + k$$

c) $$\int \frac{3x^2-7x+4}{2x-3}\,dx = \int\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{1}{4(2x-3)}\right)dx =$$
$$= \frac{3x^2}{4} - \frac{5x}{4} + \frac{1}{8}\ln|2x-3| + k$$

d) $$\int \frac{2}{9+4x^2}\,dx = \int \frac{2}{9+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{3}\,arc\,tg\,\frac{2x}{3} + k$$

e) $$\int \frac{5}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = \frac{5}{3}\int \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}\,dx = \frac{5}{3}\,arc\,sen\,3x + k$$

f) $$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2} + k$$

g) $$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \underset{\substack{t=sen\,x\\ dt=\cos x\,dx}}{=} \int \sqrt{1-sen^2 t}\,\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt \underset{\substack{u=\cos t \to du=-sen\,t\,dt\\ dv=\cos t\,dt \to v=sen\,t}}{=} \cos t\,sen\,t + \int sen^2 t\,dt =$$

$$= \cos t\,sen\,t + \int (1-\cos^2 t)\,dt = \cos t\,sen\,t + t - \cos^2 t\,dt$$

$$\to \int \cos^2 t\,dt = \frac{\cos t\,sen\,t + t}{2} + k = \frac{x\sqrt{1-x^2} + arc\,sen\,x}{2} + k$$

h) $$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx \underset{\substack{t=1+x\\ dt=dx}}{=} \int \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt = \int \sqrt{t}\,dt - \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} - 2\sqrt{t} + k =$$

$$= \sqrt{1+x}\cdot\left(\frac{2(x+1)}{3} - 2\right) + k$$

107 Halla las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2-10x+7}{x^3-7x-6}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-7x+10}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2^{3x}}{2^x-4}\,dx$

d) $\displaystyle\int (2x+1)\,sen\,(2x^2+2x)\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x+3}{4x^2+8}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{sen\,2x + \cos x}{\cos x}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

a) $$\int \frac{x^3+4x^2-10x+7}{x^3-7x-6}\,dx = \int\left(1+\frac{2}{x-3}-\frac{5}{x+1}+\frac{7}{x+2}\right)dx =$$

$$= x + 2\ln|x-3| - 5\ln|x+1| + 7\ln|x+2| + k$$

b) $$\int \frac{1}{x^2-7x+10}\,dx = \int\left(\frac{1}{3(x-5)} - \frac{1}{3(x-2)}\right)dx = \frac{1}{3}\ln|x-5| - \frac{1}{3}\ln|x-2| + k$$

c) $$\int \frac{2^{3x}}{2^x-4}\,dx \underset{\substack{t=2^x\\ dt=2^x\ln 2\,dx}}{=} \frac{1}{\ln 2}\int \frac{t^3}{t-4}\,dt = \frac{1}{\ln 2}\int\left(t^2+4t+16+\frac{64}{t-4}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 16t + 64\ln|t-4|\right) + k =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2^{3x}}{3} + 2\cdot 2^{2x} + 16\cdot 2^x + 64\ln(2^x-4)\right) + k$$

d) $$\int (2x+1)\,sen\,(2x^2+2x)\,dx = \frac{1}{2}\int (4x+2)\,sen\,(2x^2+2x)\,dx =$$

$$= \frac{-\cos(2x^2+2x)}{2} + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx \underset{\substack{t=\sqrt{1-x}\\ dt=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}dx}}{=} \int \frac{-2}{1-t^2}\,dt = \int \frac{-1}{1-t}\,dt - \int \frac{1}{1+t}\,dt =$

$\displaystyle = \ln|1-t| - \ln|1+t| + k = \ln\left|1-\sqrt{1-x}\right| - \ln\left|1+\sqrt{1-x}\right| + k$

f) $\displaystyle\int \frac{x+3}{4x^2+8}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{3}{x^2+2}\,dx =$

$\displaystyle = \frac{1}{8}\ln\left|x^2+2\right| + \frac{3}{4\sqrt{2}}\, arc\,tg\, \frac{x}{\sqrt{2}} + k$

g) $\displaystyle\int \frac{sen\,2x + cos\,x}{cos\,x}\,dx = \int \frac{2sen\,x\,cos\,x + cos\,x}{cos\,x}\,dx = \int (2sen\,x + 1)\,dx =$

$= -2cos\,x + x + k$

h) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx \underset{\substack{t=e^x\\ dt=e^x dx}}{=} \int \frac{t}{1+t}\,dt = \int 1dt - \int \frac{1}{1+t}\,dt =$

$= t - \ln|1+t| + k = e^x - \ln\left|1+e^x\right| + k$

108 Calcula estas integrales.

a) $\displaystyle\int cosec\,x\,dx$

b) $\displaystyle\int sec\,x\,dx$

c) $\displaystyle\int e^{x^2-5x}(2x-5)\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{sen\,x}{\sqrt{1+cos\,x}}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1+e^{3x}}{e^{2x}}\,dx$

g) $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{sen\,2x}{1+cos^2 x}\,dx$

a) $\displaystyle\int cosec\,x\,dx = \int \frac{1}{sen\,x}\,dx \underset{\substack{t=cos\,x\\ dt=-sen\,x\,dx}}{=} \int \frac{-1}{1-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\ln|1+t| + \frac{1}{2}\ln|1-t| + k =$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\ln|1+cos\,x| + \frac{1}{2}\ln|1-cos\,x| + k$

b) $\displaystyle\int sec\,x\,dx = \int \frac{1}{cos\,x}\,dx \underset{\substack{t=cos\,x\\ dt=-sen\,x\,dx}}{=} \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln|1-t| + k =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\ln|1+sen\,x| - \frac{1}{2}\ln|1-sen\,x| + k$

c) $\displaystyle\int e^{x^2-5x}(2x-5)\,dx = e^{x^2-5x} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{sen\,x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx = -2\sqrt{1+\cos x} + k$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx = arc\,sen\,(\ln x) + k$

f) $\displaystyle\int \frac{1+e^{3x}}{e^{2x}}\,dx = \int \frac{1}{e^{2x}}\,dx + \int e^x dx = \frac{-e^{-2x}}{2} + e^x + k$

g) $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,dx \underset{\substack{t=e^x-1\\ dt=e^x dx}}{=} \int (t+1)\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + k =$

$$= \sqrt{e^x-1}\left(\frac{2}{5}(e^x-1)^2 + \frac{2}{3}(e^x-1)\right) + k$$

h) $\displaystyle\int \frac{sen\,2x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{2\,sen\,x\cos x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{-2\,sen\,x\cos x}{1+\cos^2 x}\,dx = -2\ln\left|1+\cos^2 x\right| + k$

109 **Calcula el resultado de las integrales.**

a) $\displaystyle\int (x-2)e^{3x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{7}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2 + x}{x}\,dx$

d) $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{5e^{2x}-e^x}{e^{2x}-1}\,dx$

f) $\displaystyle\int sen^2\,x\,dx$

g) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

h) $\displaystyle\int sen\,x\cos x\,dx$

a) $\displaystyle\int (x-2)e^{3x}dx \underset{\substack{u=x-2\to du=dx\\ dv=e^{3x}dx\to v=\frac{e^{3x}}{3}}}{=} \frac{1}{3}(x-2)e^{3x} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,dx = \frac{1}{3}(x-2)e^{3x} - \frac{e^{3x}}{9} + k$

b) $\displaystyle\int \frac{7}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx = \frac{21}{2}\sqrt[3]{(\ln x)^2} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2 + x}{x}\,dx = \int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx + \int dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + x + k$

d) $\displaystyle\int (\ln x)^2 dx \underset{\substack{u=\ln x\to du=\frac{dx}{x}\\ dv=\ln x\,dx\to v=x\ln x-x}}{=} (x\ln x - x)\ln x - \int (\ln x - 1)\,dx =$

$$= (x\ln x - x)\ln x - x\ln x + 2x + k = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{5e^{2x} - e^x}{e^{2x} - 1}\,dx \underset{\substack{t = e^x \\ dt = e^x dx}}{=} \int \frac{5t - 1}{t^2 - 1}\,dt = \int \frac{2}{t-1}\,dt + \int \frac{3}{t+1}\,dt =$

$= 2\ln|t-1| + 3\ln|t+1| + k = 2\ln|e^x - 1| + 3\ln|e^x + 1| + k$

f) $\displaystyle\int sen^2 x\,dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{sen\,2x}{4} + k$

g) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{sen\,2x}{4} + k = \frac{x + sen\,x\cos x}{2} + k$

h) $\displaystyle\int sen\,x\cos x\,dx = \frac{sen^2 x}{2} + k$

110 Determina estas integrales.

a) $\displaystyle\int 2^x \cos x\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\ln x + 3}{x(\ln x - 1)}\,dx$

c) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$

d) $\displaystyle\int sen\sqrt{x}\,dx$

e) $\displaystyle\int sen^2 x\cos x\,dx$

f) $\displaystyle\int sen^3 x\cos x\,dx$

g) $\displaystyle\int sen^3 x\,dx$

h) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$

a) $\displaystyle\int 2^x \cos x\,dx \underset{\substack{u = 2^x \to du = 2^x \ln 2dx \\ dv = \cos x\,dx \to v = sen\,x}}{=} 2^x sen\,x - \ln 2\int 2^x sen\,x\,dx \underset{\substack{u = 2^x \to du = 2^x \ln 2\,dx \\ dv = sen\,x\,dx \to v = -\cos x}}{=} 2^x sen\,x + \ln 2 \cdot 2^x \cos x - (\ln 2)^2 \int 2^x \cos x\,dx$

$\displaystyle\int 2^x \cos x\,dx = \frac{2^x sen\,x + \ln 2 \cdot 2^x \cos x}{1 + (\ln 2)^2}$

b) $\displaystyle\int \frac{\ln x + 3}{x(\ln x - 1)}\,dx \underset{\substack{t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x}}}{=} \int \frac{t+3}{t-1}\,dt = t + 4\ln|t-1| + k = \ln|x| + 4\ln|\ln x - 1| + k$

c) $\displaystyle\int \cos(\ln x)dx \underset{\substack{t = \ln x \to x = e^t \\ dt = \frac{dx}{x}}}{=} \int e^t \cos t\,dt$

$\displaystyle\int e^t \cos t\,dt \underset{\substack{u = e^t \to du = e^t\,dt \\ dv = \cos t\,dt \to v = sen\,t}}{=} e^t sen\,t - \int e^t sen\,t\,dt \underset{\substack{u = e^t \to du = e^t\,dx \\ dv = sen\,t\,dt \to v = -\cos t}}{=} e^t sen\,t + e^t \cos t - \int e^t \cos t\,dt$

$\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx = \int e^t \cos t\,dt = \frac{e^t sen\,t + e^t \cos t}{2} + k = \frac{x\,sen(\ln x) + x\cos(\ln x)}{2} + k$

d) $\int sen\sqrt{x}\,dx \underset{\substack{t=\sqrt{x}\\ dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}}}{=} 2\int t\,sen\,t\,dt \underset{\substack{u=t\to du=dt\\ dv=sen\,t\,dt\to v=-cos\,t}}{=} 2\left(-t\cos t+\int \cos t\,dt\right)=$

$= -2t\cos t + 2sent + k = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2sen\sqrt{x} + k$

e) $\int sen^2 x\cos x\,dx = \dfrac{sen^3 x}{3} + k$

f) $\int sen^3 x\cos x\;dx = \dfrac{sen^3 x}{4} + k$

g) $\int sen^3 x\;dx = \int (1-\cos^2 x)\,sen\,x\,dx = \int sen\,x\,dx - \int \cos^2 x\,sen\,x\,dx =$

$= -\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3} + k$

h) $\int \cos^3 x\;dx = \int (1-sen^2 x)\cos x\,dx = \int \cos x\,dx - \int sen^2 x\cos x\,dx =$

$= sen\,x - \dfrac{sen^3 x}{3} + k$

111 Calcula:

a) $\int x\;sen\;(\ln\;x)\;dx$

b) $\int tg\;x\;sec^2\;x\;dx$

c) $\int \dfrac{\cos^3 x}{sen\;x}\,dx$

d) $\int (\cos^2\;x - sen\;x\;\cos^2\;x)\;dx$

e) $\int \dfrac{\cos\;x - sen\;x}{2}\,dx$

f) $\int \dfrac{\cos^2\;x\;sen\;x + \cos\;x\;sen^2\;x}{sen\;x}\,dx$

a) $\int x\;sen\;(\ln x)\;dx \underset{\substack{u=sen\,(\ln x)\to du=\frac{\cos\,(\ln x)}{x}dx\\ dv=x\,dx\to v=\frac{x^2}{2}dx}}{=} \dfrac{x^2}{2}sen\;(\ln x) - \dfrac{1}{2}\int x\cos\;(\ln x)\;dx \underset{\substack{u=\cos\,(\ln x)\to du=\frac{-sen\,(\ln x)}{x}dx\\ dv=x\,dx\to v=\frac{x^2}{2}dx}}{=}$

$= \dfrac{x^2}{2}sen\;(\ln x) - \dfrac{x^2}{4}\cos\;(\ln x) - \dfrac{1}{4}\int x\,sen\;(\ln x)\;dx$

$\dfrac{5}{4}\int x\,sen\;(\ln x)\;dx = \dfrac{x^2}{2}sen\;(\ln x) - \dfrac{x^2}{4}\cos\;(\ln x) + k$

$\to \int x\,sen\;(\ln x)\;dx = \dfrac{2x^2 sen\;(\ln x) - x^2\cos\;(\ln x)}{5} + k$

b) $\int tg\,x\sec^2 x\;dx = \int \dfrac{sen\,x}{\cos^3 x}\;dt = \dfrac{1}{2\cos^2 x} + k$

c) $\int \dfrac{\cos^3 x}{sen\,x}\;dx \underset{\substack{t=sen\,x\\ dt=\cos x\,dx}}{=} \int \dfrac{(1-t^2)}{t}\;dt = \ln|t| - \dfrac{t^2}{2} + k = \ln|sen\,x| - \dfrac{sen^2\,x}{2} + k$

d) $\displaystyle\int (\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos^2 x)\,dx = \int \cos^2 x\,dx - \int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx =$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx - \int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{-\cos^3 t}{3} + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{2}\,dx = \int \frac{\cos x}{2}\,dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{2}\,dx = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2} + k$

f) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x + \cos x \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \int (\cos^2 x + \cos x \operatorname{sen} x)\,dx =$

$$= \int \cos^2 x\,dx + \int \cos x \operatorname{sen} x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx + \int \cos x \operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + k$$

112 Hallar todas las funciones f cuya derivada es $f'(x) = \dfrac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$.

(Aragón. Junio 2001. Opción B. Cuestión 4)

$$f(x) = \int \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}\,dx = \int \left(x^2 - x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \ln|x+1| + k$$

113 Obtener razonadamente la siguiente integral:

$$\int \frac{4x - 11}{(x+1)^2 + 1}\,dx$$

(C. Valenciana. Septiembre 2004. Ejercicio B. Problema 3)

$$\int \frac{4x - 11}{(x+1)^2 + 1}\,dx \underset{\substack{t = x+1 \\ dt = dx}}{=} \int \frac{4t - 15}{t^2 + 1}\,dt = \int \frac{4t}{t^2+1}\,dt - \int \frac{15}{t^2+1}\,dt =$$

$$= 2\ln|t^2 + 1| - 15 \operatorname{arc\,tg} t + k = 2\ln|(x+1)^2 + 1| - 15 \operatorname{arc\,tg}(x+1) + k$$

114 Dadas las funciones reales $f(x) = 4x^2 + 2x + 10$ y $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$.

Calcular la función $H(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ que cumple $H(0) = 0$.

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Bloque 3. Problema 1)

$$H(x) = \int \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2+5}\right)dx =$$

$$= 2\ln|x+1| + \ln|x^2 + 5| + k$$

$$H(0) = 0 \rightarrow \ln 5 + k = 0 \rightarrow k = -\ln 5 \rightarrow H(x) = 2\ln(x+1) + \ln(x^2+5) - \ln 5$$

115 Calcula la integral $\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6}\,dx$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2008. Bloque 2. Pregunta A)

$$f(x) = \int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6}\,dx = \int \left(2x + 1 + \frac{6}{x-3} - \frac{4}{x-2}\right) dx =$$
$$= x^2 + x + 6\ln|x-3| - 4\ln|x-2| + k$$

116 Calcular la siguiente primitiva: $\int \frac{1}{x^2 - (a+1)x + a}\,dx$ donde se supone que a no es cero.

(País Vasco. Junio 2008. Bloque D. Cuestión D)

- Si $a \neq 1$:

$$\int \frac{1}{x^2 - (a+1)x + a}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{1-a}}{x-1} + \frac{\frac{1}{a-1}}{x-a} \right) dx = \int \frac{1}{a-1}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-1}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{a-1}\left(\ln|x-a| - \ln|x-1|\right) + k$$

- Si $a = 1$:

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{2(x-1)} + k$$

117 Calcula $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1}\,dx$.

(Andalucía. Año 2002. Modelo 1. Opción B. Ejercicio 2)

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1}\,dx = \int \left(x + 2 - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1}\right) dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2x - 3\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + k$$

118 Resuelve $\int \frac{x^2 - 2}{x^3 - 3x + 2}\,dx$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2002. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^3 - 3x + 2}\,dx = \int \left(\frac{7}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{(x+2)}\right) dx =$$
$$= \frac{7}{9}\ln|x-1| + \frac{1}{3\,(x-1)} + \frac{2}{9}\ln|x+2| + k$$

119 Resuelve $\int \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}\,dx$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2001. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}\,dx = \int \left(\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x}\right) dx = \ln|x^2 + 1| - \ln|x| + k$$

120 ¿Existe alguna primitiva de la función $f(x) = x^{-1}$ que no tome ningún valor positivo en el intervalo $1 \leq x \leq 2$?

(Extremadura. Junio 2004. Repertorio A. Ejercicio 1)

Las primitivas de $f(x) = x^{-1}$ son: $F(x) = \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + k$

Por ser $F(x)$ una función creciente en $(1, 2) \rightarrow 1 \leq x \leq 2 \rightarrow k \leq F(x) \leq \ln 2 + k$

Para que $F(x)$ no tome valores positivos $\rightarrow \ln 2 + k \leq 0 \rightarrow k \leq -\ln 2$.

La función primitiva $F(x) = \ln|x| + k$ toma valores no positivos en el intervalo $[1, 2]$ cuando $k \leq -\ln 2$.

121 Resuelve $\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x}\, dx$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2000. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x}\, dx = \int \left(\frac{3}{10(x-2)} - \frac{1}{6x} + \frac{2}{15(x+3)} \right) dx =$$
$$= \frac{3}{10} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \ln|x| + \frac{2}{15} \ln|x+3| + k$$

122 Resuelve $\int \frac{x+2}{x^3 - 4x^2 + 4x}\, dx$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2001. Bloque 4. Pregunta A)

$$\int \frac{x+2}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx = \int \left(\frac{2}{(x-2)^2} - \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2x} \right) dx =$$
$$= \frac{-2}{x-2} - \frac{1}{2} \ln|x-2| + \frac{\ln|x|}{2} + k$$

123 Calcular las siguientes integrales.

a) $\int (2x - 1) \ln x\, dx$ b) $\int \frac{1-x}{1+4x^2}\, dx$

(Canarias. Septiembre 2008. Bloque 2. Opción B)

a) $\int (2x-1) \ln x\, dx = (x^2 - x) \ln x - \int (x-1)\, dx = (x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + k$

b) $\int \frac{1-x}{1+4x^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{1+(2x)^2} - \frac{x}{1+4x^2} \right) dx = \frac{arc\, tg\, 2x}{2} - \frac{\ln|1+4x^2|}{8} + k$

124 Calcular la integral $\int \frac{x^3+1}{x^2+1}\, dx$.

(Murcia. Septiembre 2008. Bloque 4. Cuestión A)

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+1}\, dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln|1+x^2|}{2} + arc\, tg\ x + k$$

125 Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba A. Problema 2)

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + k = -\frac{1+\ln x}{x} + k$$

$$u = \ln x \to du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$dv = \frac{1}{x^2}\,dx \to v = \frac{-1}{x}$$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$:

a) Calcula la integral $\displaystyle\int f(x)\,dx$. b) Halla la primitiva F de f que cumple que $F(1) = 1$.

(Cataluña. Septiembre 2005. Cuestión 2)

a) $\displaystyle F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{5x^2-4}}\,dx = \frac{1}{10}\int \frac{10x}{\sqrt{5x^2-4}}\,dx = \frac{1}{5}\left(\sqrt{5x^2-4}\right) + k$

b) $\displaystyle F(1) = 1 \to \frac{1}{5} + k = 1 \to k = \frac{4}{5} \to F(x) = \frac{1}{5}\left(\sqrt{5x^2-4}\right) + \frac{4}{5}$

2 Determina $f(x)$ sabiendo que $f'''(x) = 24x$; $f''(0) = 2$; $f'(0) = 1$ y $f(0) = 0$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2005. Bloque 1. Pregunta B)

$$f'''(x) = 24x \to f''(x) = \int 24x\,dx = 12x^2 + k_1$$

Como $f''(0) = 2 \to k_1 = 2 \to f''(x) = 12x^2 + 2$

$$f''(x) = 12x^2 + 2 \to f'(x) = \int (12x^2 + 2)dx = 4x^3 + 2x + k_2$$

Como $f'(0) = 1 \to k_2 = 1 \to f'(x) = 4x^3 + 2x + 1$

$$f'(x) = 4x^3 + 2x + 1 \to f(x) = \int (4x^3 + 2x + 1)\,dx = x^4 + x^2 + x + k_3$$

Como $f(0) = 0 \to k_3 = 0 \to f(x) = x^4 + x^2 + x$

3 Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-1)e^{2x}$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, e^2)$.

(Andalucía. Año 2004. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 2)

$$F(x) = \int (x-1)e^x dx = (x-1)e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x - e^x + k = (x-2)e^x + k$$

$$u = x - 1 \to du = dx$$

$$dv = e^x dx \to v = e^x$$

$$F(1) = e^2 \to -e + k = e^2 \to k = e^2 + e \to F(x) = (x-2)e^x + e^2 + e$$

4 Dada la función f: $[1, e] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, calcúlese una función primitiva de $f(x)$ que pase por el punto $P(e, 2)$.

(Castilla y León. Septiembre 2004. Prueba B. Problema 2)

$$F(x) = \int\left(\frac{1}{x} + \ln x\right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx + \int \ln x\, dx = \ln|x| + x\ln|x| - x + k$$

$u = \ln x \to du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = dx \to v = x$

$$F(e) = 2 \to 1 + k = 2 \to k = 1 \to F(x) = F(x) = \ln|x| + x\ln|x| - x + 1$$

5 Dada la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mathrm{Ln}\,(1 + x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas (Ln denota la función logaritmo neperiano).

(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 2)

$$F(x) = \int \ln(1 + x^2)\, dx = x\ln(1 + x^2) - \int \frac{2x^2}{1 + x^2}\, dx =$$

$u = \ln(1 + x^2) \to du = \frac{2x}{1 + x^2}\, dx$

$dv = dx \to v = x$

$$= x\ln(1 + x^2) - \int\left(2 - \frac{2}{1 + x^2}\right) dx = x\ln(1 + x^2) - 2x + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,x + k$$

$$F(0) = 0 \to k = 0 \to F(x) = x\ln(1 + x^2) - 2x + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,x$$

6 Hallar una primitiva de la función $f(x) = xe^x$.

(Extremadura. Junio 2006. Repertorio B. Ejercicio 2)

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + k$$

$u = x \to du = dx$

$dv = e^x dx \to v = e^x$

7 Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{x}{(x + 1)^3}\, dx$

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2007. Bloque 2. Pregunta A)

$$\int \frac{x}{(x + 1)^3}\, dx = \int\left(\frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{1}{(x + 1)^3}\right) dx = -\frac{1}{(x + 1)} + \frac{1}{2\,(x + 1)^2} + k$$

8 Resolver $\displaystyle\int \frac{2x}{x^3 - 3x^2 - x + 3}\, dx$.

(Canarias. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 1)

$$\int \frac{2x}{x^2 + 4x + 3}\, dx = \int\left(-\frac{1}{x + 1} + \frac{3}{x + 3}\right) dx = -\ln|x + 1| + 3\ln|x + 3| + k$$

9 Calcular la primitiva que sigue:

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 4}\,dx$$

(País Vasco. Julio 2007. Bloque D. Cuestión D)

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 4}\,dx = \int \left(x + 1 + \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + \frac{13}{4} \ln |x-2| + \frac{3}{4} \ln |x+2| + k$$

10 Calcule $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2 + 4x + 3}\,dx$.

(Galicia. Junio 2008. Bloque 3. Opción 2)

$$\int \frac{x+5}{x^2+4x+3}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = 2 \ln |x+1| - \ln |x+3| + k$$

11 Utilizando el cambio de variable $t = \ln x$, calcular $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\,dx$.

(Aragón. Septiembre 2006. Opción B. Cuestión 2)

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\,dx \underset{\substack{t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx}}{=} \int \frac{\ln t}{t}\,dt = \frac{(\ln t)^2}{2} + k = \frac{(\ln(\ln x))^2}{2} + k$$

12 Dados a y b dos números reales, calcula la integral indefinida:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{(a + b\cos x)^2}\,dx$$

Presta atención a las posibilidades $a = 0$ o $b = 0$.

(La Rioja. Septiembre 2004. Propuesta B. Ejercicio 5)

- Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$: $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{(a + b\cos x)^2}\,dx = -\frac{1}{b(a + b\cos x)} + k$
- Si $a = 0$ y $b \neq 0$: $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{b\cos^2 x}\,dx = -\frac{1}{b\cos x} + k$
- Si $a \neq 0$ y $b = 0$: $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{a^2}\,dx = -\frac{\cos x}{a^2} + k$
- a y b no pueden ser 0 simultáneamente, pues no existiría la función que tenemos que integrar.

12 Integrales definidas

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Los crímenes de Oxford

[En Oxford han ocurrido tres asesinatos y su autor, antes o después de cometer cada uno, le ha enviado a un profesor de matemáticas un símbolo. Un joven que le ayuda en la investigación de estos sucesos trata de descubrir el cuarto símbolo, pues piensa que conociéndolo tal vez se pueda evitar el cuarto crimen.]

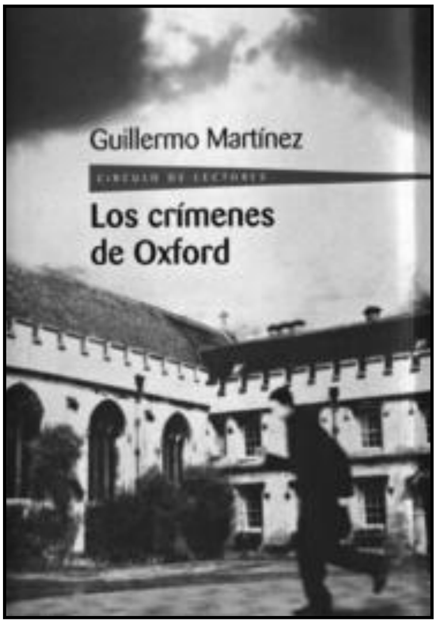
Fui a la sección de historia de la matemática, y seguí con un dedo los títulos en los lomos. Un libro sobresalía un poco de los demás, como si alguien lo hubiera consultado recientemente y no hubiera sido lo bastante cuidadoso al volverlo a su lugar. […] La ilustración de la tapa era una pirámide de diez puntos envuelta en llamas. El título –*La hermandad de los pitagóricos*– quedaba por muy poco fuera del alcance del fuego. […]

Fui hasta uno de los escritorios de la biblioteca y lo abrí bajo la lámpara. No tuve que pasar más de dos o tres páginas. Allí estaba. Allí había estado todo el tiempo, en su simplicidad abrumadora. Las nociones más antiguas y elementales de la matemática, no separadas del todo todavía de sus vestiduras místicas. La representación de los números en la doctrina pitagórica como principios arquetípicos de las potencias divinas. El círculo era el Uno, la unidad en su perfección, la mónada, el principio de todo, encerrado y completo en su propia línea. El Dos era el símbolo de la multiplicidad, de todas las oposiciones y dualidades, de los engendramientos. Se formaba con la intersección de dos círculos y la figura oval, como una almendra, encerrada en el centro, era llamada *Vesica Piscis*, la vejiga del pez. El Tres, la tríada, era la unión entre dos extremos, la posibilidad de dar orden y armonía a las diferencias. Era el espíritu que abraza lo mortal con lo inmortal en un todo. Pero también, el Uno era el punto, el Dos era la recta que unía dos puntos, el Tres era el triángulo y era al mismo tiempo el plano. Uno, dos, tres, aquello era todo, la serie no era más que la sucesión de los números naturales. Di vuelta a la página para estudiar el símbolo que representaba al número Cuatro. Era la *tetractis*, la pirámide de diez puntos que había visto en la tapa, el emblema y la figura sagrada de la secta. Los diez puntos eran la suma de uno, más dos, más tres, más cuatro. Representaban a la materia y a los cuatro elementos. Los pitagóricos creían que toda la matemática estaba cifrada en aquel símbolo, que era a la vez el espacio tridimensional y la música de las esferas celestes.

GUILLERMO MARTÍNEZ

Los crímenes de Oxford

Guillermo Martínez



La primera víctima, una mujer mayor, inválida y enferma de cáncer, vivía con su única nieta en una casa donde la encontró Arthur Seldom asfixiada con un cojín, según le informó después la policía. Seldom mantenía una relación amistosa con las dos mujeres desde hacía muchos años y había ido a visitarlas –le dijo al inspector– porque en su despacho apareció una nota con este mensaje: «El primero de la serie», debajo, la dirección de la casa, una hora –3 p.m.– y un círculo negro. A los pocos días apareció, pegada en la puerta del Instituto, una nota: «El segundo de la serie». Raddiffe Hospital, 2.15 p.m., y un dibujo que podía representar esquemáticamente un pez. A esa hora, en ese hospital falleció un hombre de más de noventa años.

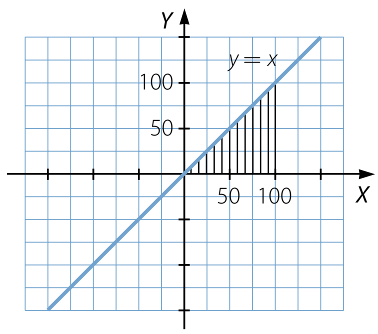
El profesor Seldom había escrito un libro sobre sucesiones de símbolos regidos por una regla lógica, en el que dedicaba un capítulo a las pautas de los crímenes en serie. Estos estudios avalaban su hipótesis de que el asesino utiliza sus crímenes como un desafío intelectual. Pero antes de que hubieran determinado el tercer símbolo, ocurre la tercera muerte, acompañada con dos notas. La primera decía: «El tercero de la serie» y la segunda contenía sólo una palabra: «triángulo». Seldom descubre que estos tres símbolos corresponden a la representación pitagórica de los números, un hecho que también confirma, como se lee el párrafo seleccionado, el joven matemático que le acompaña. Por lo tanto, el cuarto símbolo debía de ser la tetractis. Cuando se lo comunican al inspector, decide publicar en la primera página de un periódico local la historia completa de las tres muertes con los tres símbolos, y, en las páginas interiores, una nota del profesor sobre la tetractis. Cree que el asesino se dará cuenta de que ha sido derrotado intelectualmente y dejará de matar. La realidad, sin embargo, pronto destruye esta esperanza, porque a los pocos días, un autobús con diez niños cae desde un puente y mueren todos. Lo más curioso es que una persona, antes del suceso, había dejado en el servicio de emergencia de un hospital este mensaje: «El cuarto de la serie es la *tetractis*. Diez puntos en el triángulo ciego». Con estas diez muertes acaba la «serie de Oxford». ¿Quién es el asesino? ¿Qué lo indujo a cometer estos crímenes? Conocer el desenlace de la novela es el merecido premio para quienes la lean.

Considera la progresión aritmética: 1, 2, 3, 4, … y calcula la suma de todos los números naturales comprendidos entre 1 y 100. ¿Cómo podríamos sumar *todos* los números reales comprendidos entre 1 y 100? Una interpretación geométrica del problema te ayudará a resolverlo.

Por ser una progresión aritmética la suma vale:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{100(1 + 100)}{2} = 5.050$$

La suma de todos los números reales comprendidos entre 1 y 100 es la suma de las infinitas alturas de la figura representada. Al ser un conjunto de números no numerable, siempre existe un número que podemos sumar y por tanto, la suma de los números reales comprendidos en cualquier intervalo es infinita.



Integrales definidas

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, …

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{10(3 + 39)}{2} = 210$$

002 Dada la progresión aritmética con $a_n = 10 - 5n$, halla la suma de los 25 primeros términos.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{25(5 - 115)}{2} = -1.375$$

003 Determina los puntos de corte en cada caso.

a) $f(x) = 3x^2 - 4$
$g(x) = x$

b) $f(x) = 3x^2 + 2x - 6$
$g(x) = 4x^2 + x - 8$

a) $3x^2 - 4 = x \rightarrow 3x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

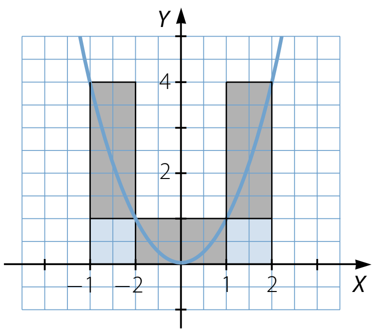
Los puntos de corte son: $(-1, -1)$ y $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

b) $3x^2 + 2x - 6 = 4x^2 + x - 8 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Los puntos de corte son: $(-1, -5)$ y $(2, 10)$.

ACTIVIDADES

001 Representa gráficamente la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$.
Toma una partición de este intervalo y calcula sus sumas inferiores y superiores.

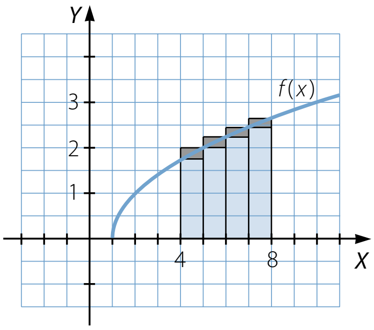


Tomamos la partición $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

$$S = \sum_{i=1}^{4} M_i(x_i - x_{i-1}) = 4 + 1 + 1 + 4 = 10$$

$$s = \sum_{i=1}^{4} m_i(x_i - x_{i-1}) = 1 + 0 + 0 + 1 = 2$$

002 Representa gráficamente la función $f(x) = \sqrt{x-1}$ en el intervalo [4, 8]. Toma dos particiones de este intervalo y calcula sus sumas inferiores y superiores.



Tomamos, por ejemplo, la partición $P = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

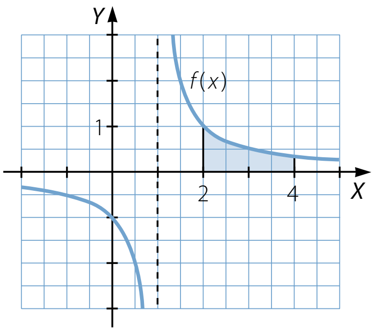
$$S = \sum_{i=1}^{4} M_i(x_i - x_{i-1}) = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$$

$$s = \sum_{i=1}^{4} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} + \sqrt{6}$$

003 Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en el intervalo [2, 4].

a) Toma dos particiones de este intervalo, siendo una más fina que la otra.

b) Determina las sumas inferiores y superiores de cada partición.



a) Tomamos la partición $P = \{2, 3, 4\}$.

Una partición más fina $P_1 = \{2; 2{,}5; 3; 3{,}5; 4\}$.

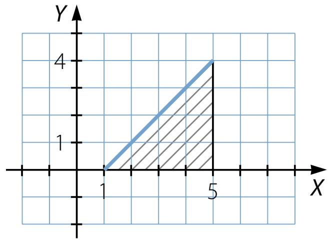
b) $$S_P = \sum_{i=1}^{2} M_i(x_i - x_{i-1}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$s_P = \sum_{i=1}^{2} m_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$S_{P_1} = \sum_{i=1}^{4} M_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60}$$

$$s_{P_1} = \sum_{i=1}^{4} m_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}$$

004 **Calcula, utilizando la fórmula, la superficie del triángulo coloreado. Después, toma una partición y calcula sus sumas inferiores y superiores.**



$$\text{Área} = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

Tomamos la partición $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$f(x) = x - 1$

$$S = \sum_{i=1}^{4} M_i(x_i - x_{i-1}) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

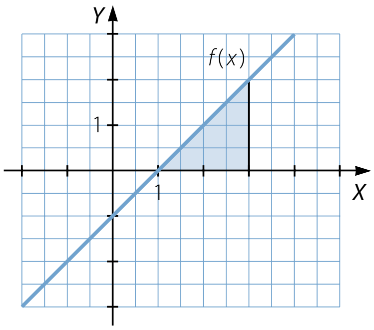
$$s = \sum_{i=1}^{4} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$$

El área está comprendida entre la suma inferior, s, y la suma superior, S.

005 **Determina el valor del área que encierran la función $f(x) = x - 1$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.**

a) Utilizando métodos geométricos.

b) Mediante la definición de integral definida.



a) $\text{Área} = \dfrac{B \cdot h}{2} = \dfrac{2 \cdot 2}{2} = 2$

b) Tomamos una sucesión de particiones:

$$\left\{1, 1 + 2 \cdot \frac{1}{n}, 1 + 2 \cdot \frac{2}{n}, \ldots, 1 + 2 \cdot \frac{n}{n} = 3\right\}$$

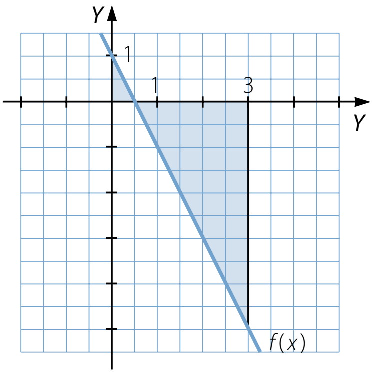
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{2(i-1)}{n} - 1\right) \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{2(n-1)}{n}$$

$$\int_1^3 (x-1)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{2(n-1)}{n} = 2$$

006 **Halla el valor del área que encierran la función $f(x) = 1 - 2x$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.**

a) Utilizando métodos geométricos.

b) Mediante la definición de integral definida.



a) Descomponemos el área pedida en otras dos más pequeñas: A_1 y A_2

$$\text{Área} = A_1 + A_2 = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} + \frac{\frac{5}{2} \cdot 5}{2} = \frac{13}{2}$$

b) Calculamos cada una de las áreas con la definición de integral.

Para A_1 tomamos: $\left\{0, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}, \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n}, \ldots, \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n} = \frac{1}{2}\right\}$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(1 - 2 \cdot \frac{(i-1)}{2n}\right) \cdot \frac{1}{2n} =$$

$$= \frac{1}{2n}\left(n - \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{n-1}{4n}$$

$$A_1 = \int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{n-1}{4n}\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{n-1}{4n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Para A_2 tomamos: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{n}, \ldots, \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{n}{n} = 3\right\}$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{5(i-1)}{2n}\right)\right) \cdot \frac{5}{2n} = -\frac{25(n-1)}{4n}$$

$$\int_{1/2}^{3}\left(-\frac{25(n-1)}{4n}\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{25(n-1)}{4n}\right) = -\frac{25}{4}$$

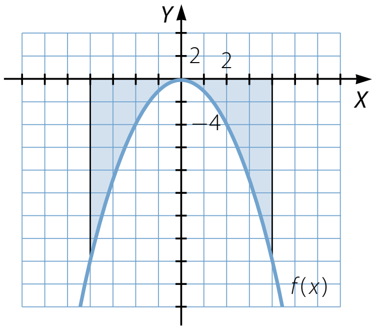
Como las áreas no pueden ser negativas: $A_2 = \frac{25}{4}$

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{25}{4} = \frac{13}{2}$$

007 **Representa la función $f(x) = -x^2$ en el intervalo $[-4, 4]$.**

a) Toma una partición del intervalo y calcula sus sumas inferiores y superiores. ¿Qué signo tienen?

b) ¿Representan una aproximación al área comprendida entre la función y el eje X en ese intervalo?



a) Tomamos la partición $P = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$.

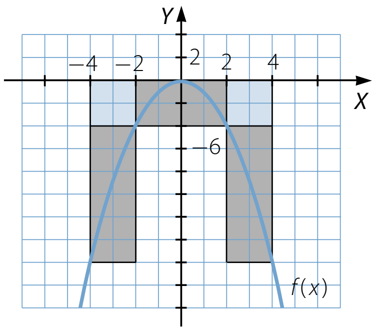
$f(x) = -x^2$

$$S = \sum_{i=1}^{4} M_i(x_i - x_{i-1}) = -32 - 8 - 8 - 32 = -80$$

$$s = \sum_{i=1}^{4} m_i(x_i - x_{i-1}) = -8 - 0 - 0 - 8 = -16$$

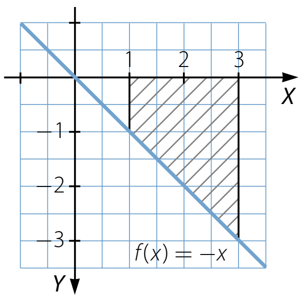
Tienen signo negativo.

b)



Las sumas inferior y superior tomadas en positivo representan una aproximación por defecto y por exceso respectivamente del área en ese intervalo. Cuanto más fina sea la partición mejor será la aproximación.

008 **¿Cómo calcularías el área de la zona coloreada?**



Geométricamente es un trapecio de bases 1 y 3, y altura 2, por tanto su área es:

$$\text{Área} = \frac{1+3}{2} \cdot 2 = 4$$

Mediante la integral definida, teniendo en cuenta que es una función negativa, el resultado será negativo.

$f(x) = -x$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(-1 - \frac{2(i-1)}{n}\right)\cdot\frac{2}{n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{2}{n} - \frac{4(i-1)}{n^2}\right) = -2 - \frac{2(n-1)}{n}$$

$$\int_1^3 -x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(-2 - \frac{2(n-1)}{n}\right) = -4 \rightarrow \text{Área} = 4$$

009 **Utiliza las propiedades de las integrales definidas para calcular esta integral:**

$$\int_0^3 (4x - 2)\,dx$$

$$\int_0^3 (4x-2)\,dx = \int_0^3 4x\,dx - \int_0^3 2\,dx$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(4\cdot\frac{3(i-1)}{n}\right)\cdot\frac{3}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{36(i-1)}{n^2}\right) = \frac{18(n-1)}{n}$$

$$\rightarrow \int_0^3 4x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{18(n-1)}{n}\right) = 18$$

$$s'_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 2\cdot\frac{3}{n} = 6 \rightarrow \int_0^3 4x\,dx = \lim_{n\to\infty} 6 = 6$$

$$\int_0^3 (4x-2)\,dx = \int_0^3 4x\,dx - \int_0^3 2\,dx = 18 - 6 = 12$$

010 **Usa las propiedades de las integrales definidas para justificar la siguiente desigualdad:**

$$\int_1^5 x\,dx \leq \int_1^5 x^2 dx$$

Como x y x^2 son funciones continuas en el intervalo $(1, 5)$ y $x \leq x^2$ en dicho intervalo se tiene que:

$$\int_1^5 x\,dx \leq \int_1^5 x^2\,dx$$

011 **Aplica el teorema del valor medio a la función $f(x) = 4 - x^2$ en el intervalo [0, 2]. Calcula dicho valor medio e interpreta geométricamente el resultado.**

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(4 - \left(\frac{2i}{n}\right)^2\right)\cdot\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8}{n} - \frac{8i^2}{n^3}\right) = 8 - \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

Vamos a calcular $\sum_{i=1}^{n} i^2$:

Para $n = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1$

Para $n = 2 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 5$

Para $n = 3 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 14$

Para $n = 4 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 30$

Para $n = 5 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 55$

Para $n = 6 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 91$

Calcular $\sum_{i=1}^{n} i^2$ equivale a encontrar el término general, a_n, de la sucesión $\{1, 5, 14, 30, 55, 91, \ldots\}$.

$5 - 1 = 4 \qquad 14 - 5 = 9 \qquad 30 - 14 = 16 \qquad 55 - 30 = 25 \qquad 91 - 55 = 36 \qquad \ldots$

Como la diferencia entre términos consecutivos no es constante no es una progresión aritmética (polinomio de grado 1).

Continuamos haciendo diferencias sucesivas.

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
1 & & 5 & & 14 & & 30 & & 55 & & 91 & & \\
& 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 36 & & & \rightarrow \text{No es un polinomio de grado 1.} \\
& & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & & & \rightarrow \text{No es un polinomio de grado 2.} \\
& & & 2 & & 2 & & 2 & & & & & \rightarrow \text{Es un polinomio de grado 3.}
\end{array}$$

El término general será de la forma: $an^3 + bn^2 + cn + d$. Sustituyendo para los distintos valores de n obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 5 \\ 27a + 9b + 3c + d = 14 \\ 64a + 16b + 4c + d = 30 \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}, d = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$S_n = 8 - \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = 8 - \frac{8}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$\int_0^2 (4 - x^2)\, dx = \lim_{n\to\infty}\left(8 - \frac{8}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\int_0^2 (4 - x^2) dx = f(c) \cdot 2 \rightarrow \frac{16}{3} = f(c) \cdot 2 \rightarrow f(c) = \frac{8}{3} \rightarrow 4 - c^2 = \frac{8}{3} \rightarrow c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

012 **Halla el valor medio integral de la función $f(x) = x - x^2$ en el intervalo [0, 1] y el punto donde se alcanza dicho valor medio.**

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n} - \left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$\int_0^1 (x-x^2)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 (x-x^2)dx = f(c)\cdot 1 \to \frac{1}{6} = f(c) \to c - c^2 = \frac{1}{6} \to \begin{cases} c = \dfrac{1+\sqrt{\dfrac{5}{3}}}{2} \to c \in [0,1] \\ c = \dfrac{1-\sqrt{\dfrac{5}{3}}}{2} \to c \notin [0,1] \end{cases}$$

$\to c = \dfrac{1+\sqrt{\dfrac{5}{3}}}{2}$ y su valor medio es $f(c) = \dfrac{1}{6}$.

013 **Determina la expresión de la función integral, o función área, de $f(x) = x^2 - 4$ en el intervalo [0, 5].**

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{xi}{n}\right)^2 - 4\right)\cdot\frac{x}{n} = \left(\frac{x^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) - 4 =$$

$$= \frac{x^3}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6} - 4$$

$$\int_0^x (t^2-4)dt = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^3}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6} - 4\right) = \frac{x^3}{3} - 4$$

014 **Sin hallar la integral, calcula la derivada de $A(x) = \displaystyle\int_0^x 4t^2\,dt$.**

Por ser continua la función aplicando el teorema fundamental del cálculo integral, la derivada es: $A'(x) = 4x^2$

015 **Determina $[F(x)]_4^7$, sabiendo que $F(x)$ es una primitiva de la siguiente función:**

$$f(x) = -x^2 - 2$$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (-x^2-2)\,dx = \frac{-x^3}{3} - 2x + k$$

$$[F(x)]_4^7 = F(7) - F(4) = \frac{-7^3}{3} - 2\cdot 7 + k - \left(\frac{-4^3}{3} - 2\cdot 4 + k\right) = -99$$

016 **Calcula el valor del parámetro a, sabiendo que:**

$$\left[\frac{e^x}{ax-1}\right]_0^1 = e+1$$

$$\left[\frac{e^x}{ax-1}\right]_0^1 = e+1 \to \frac{e}{a-1} - \frac{1}{-1} = e+1 \to a = 2$$

017 Resuelve estas integrales definidas.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(2x^3-4x+3)\,dx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{e}\frac{3x}{x^2+1}\,dx$

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(2x^3-4x+3)\,dx=\left[\frac{x^4}{2}-2x^2+3x\right]_{-2}^{2}=14-2=12$

b) $\displaystyle\int_{0}^{e}\frac{-3x}{x^2+1}\,dx=\left[\frac{-3}{2}\ln\left|x^2+1\right|\right]_{0}^{e}=\frac{-3}{2}\ln\left|e^2+1\right|-0=\frac{-3}{2}\ln\left|e^2+1\right|$

018 Calcula las integrales definidas.

a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(2\ sen\ x-4x)\,dx$ b) $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{x-2}{x^2}\,dx$

a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(2\,sen\,x-4x)\,dx=\left[-2\cos x-2x^2\right]_{0}^{\pi}=(2-2\pi^2)-(-2)=4-2\pi^2$

b) $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{x-2}{x^2}\,dx=\left[\ln|x|+\frac{2}{x}\right]_{1}^{4}=\ln 4+\frac{1}{2}-2=\ln 4-\frac{3}{2}$

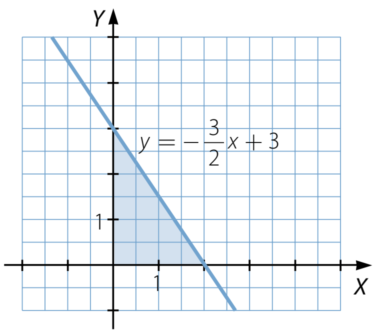
019 Calcula, utilizando integrales, primero, y aplicando la fórmula del área del triángulo, después, el área comprendida entre la función $y=-\dfrac{3}{2}x+3$ y los ejes de coordenadas.

Calculamos los cortes de la recta con los ejes (0, 3) y (2, 0).

Geométricamente: $A=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{2\cdot 3}{2}=3$

Área de la función:

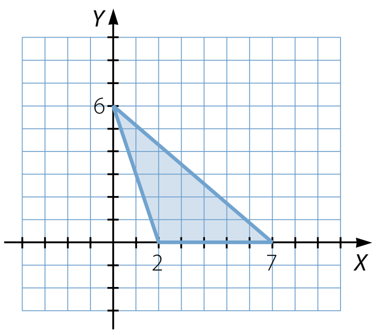
$\displaystyle\int_{0}^{2}\left(\frac{-3}{2}x+3\right)dx=\left[\frac{-3}{4}x^2+3x\right]_{0}^{2}=3-0=3$



020 Halla, mediante integrales, el área del triángulo determinado por los puntos (0, 6), (2, 0) y (7, 0).

Aplica la fórmula del área de un triángulo para comprobar que el resultado es el mismo.

Para calcular el área pedida, la hallamos mediante la diferencia del área del triángulo que determinan los puntos (0, 0) (0, 6) y (7, 0), menos el área del triángulo que determinan los puntos (0, 0) (0, 6) y (2, 0).



$$A=\int_0^7\left(\frac{-6}{7}x+6\right)dx-\int_0^2(-3x+6)\,dx=$$

$$=\left[\frac{-3}{7}x^2+6x\right]_0^7-\left[\frac{-3}{2}x^2+6x\right]_0^2=21-6=15$$

Área del triángulo:

$$A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{(7-2)\cdot 6}{2}=15$$

021 **Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=6x-x^2$ y $g(x)=x^2-2x$.**

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$f(x)-g(x)=0\rightarrow(6x-x^2)-(x^2-2x)=0\rightarrow-2x^2+8x=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=4\end{cases}$$

$$A=\left|\int_0^4(f(x)-g(x))\,dx\right|=\left|\int_0^4(8x-2x^2)\,dx\right|=\left|\left[4x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^4\right|=\frac{64}{3}$$

022 **Halla el área de la región que delimitan las gráficas de las funciones $y=x^3-2x$ e $y=-x^2$.**

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$f(x)-g(x)=0\rightarrow(x^3-2x)-(-x^2)=0\rightarrow x^3+x^2-2x=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\\x=-2\end{cases}$$

$$A=\left|\int_{-2}^0(x^3+x^2-2x)\,dx\right|+\left|\int_0^1(x^3+x^2-2x)\,dx\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^0\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^1\right|=\frac{8}{3}+\left|\frac{-5}{12}\right|=\frac{37}{12}$$

023 **Determina el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la función $f(x)=\frac{2x-1}{2}$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2},4\right]$ al girar alrededor del eje X.**

$$V=\left|\int_{1/2}^4\pi\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2dx\right|=\pi\left|\int_{1/2}^4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)dx\right|=\pi\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right]_{1/2}^4\right|=$$

$$=\pi\left|\frac{43}{3}-\frac{1}{24}\right|=\frac{343}{24}\pi$$

024 Halla el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-2}{2}}$ en el intervalo $\left[\dfrac{3}{2}, 3\right]$ al girar alrededor del eje X.

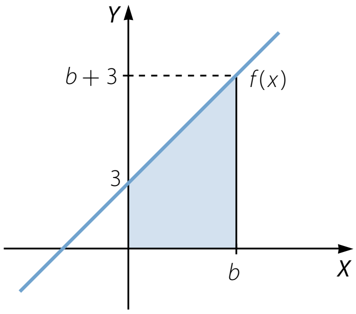
$$V = \left|\int_{3/2}^{3} \pi\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}\right)^2 dx\right| = \pi\left|\int_{3/2}^{3}\left(\frac{x^2}{2}-1\right)dx\right| = \pi\left|\left[\frac{x^3}{6}-x\right]_{3/2}^{3}\right| =$$

$$= \pi\left|\frac{3}{2}-\frac{15}{16}\right| = \frac{39\pi}{16}$$

025 Utilizando áreas de rectángulos, demuestra que la integral definida de la función $f(x) = x + 3$ en el intervalo $[0, b]$ es:

$$\int_0^b (x+3)\,dx = \frac{b^2}{2} + 3b$$

Comprueba que el resultado anterior coincide con el cálculo del área que se obtiene aplicando las fórmulas de la geometría.



$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{bi}{n}+3\right)\cdot\frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n} 3 = \frac{b^2(n+1)}{2n} + 3b$$

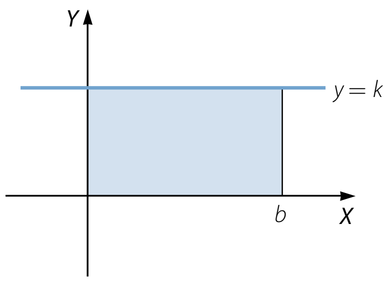
$$\int_0^b (x+3)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^2(n+1)}{2n}+3b\right) = \frac{b^2}{2}+3b$$

$$\text{Área del trapecio} = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{((b+3)+3)b}{2} = \frac{b^2}{2}+3b$$

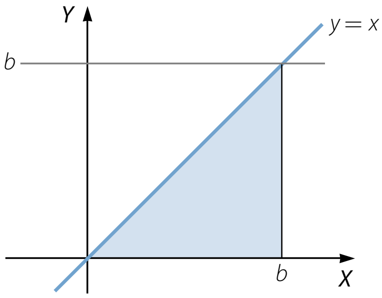
026 Utilizando la interpretación geométrica de la integral definida, justifica los resultados de las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int_0^b k\,dx = kb$ b) $\displaystyle\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$

a) Es el área de un rectángulo de base b y altura k.



b) Es el área de un triángulo de base b y altura b.



027 **Comprueba que, para cualquier número natural n, se verifica:**

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Utilizando la definición, halla la integral de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, b]$, e interpreta geométricamente el resultado.

Vamos a calcular $\sum_{i=1}^{n} i^2$:

Para $n = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1$

Para $n = 2 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 5$

Para $n = 3 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 14$

Para $n = 4 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 30$

Para $n = 5 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 55$

Para $n = 6 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = 91$

Calcular $\sum_{i=1}^{n} i^2$ equivale a encontrar el término general, a_n, de la sucesión $\{1, 5, 14, 30, 55, 91, \ldots\}$.

$5 - 1 = 4$ $\quad 14 - 5 = 9$ $\quad 30 - 14 = 16$ $\quad 55 - 30 = 25$ $\quad 91 - 55 = 36$ $\quad \ldots$

Como la diferencia entre términos consecutivos no es constante no es una progresión aritmética (polinomio de grado 1).

Continuamos haciendo diferencias sucesivas.

1 5 14 30 55 91

4 9 16 25 36 $\rightarrow$ No es un polinomio de grado 1.

5 7 9 11 $\rightarrow$ No es un polinomio de grado 2.

2 2 2 $\rightarrow$ Es un polinomio de grado 1.

El término general será de la forma: $an^3 + bn^2 + cn + d$. Sustituyendo para los distintos valores de n obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 5 \\ 27a + 9b + 3c + d = 14 \\ 64a + 16b + 4c + d = 30 \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}, d = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

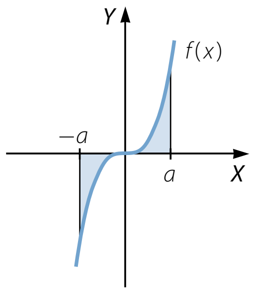
$$\int_0^b x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\left(b^3 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}\right) = \frac{b^3}{3}$$

Integrales definidas

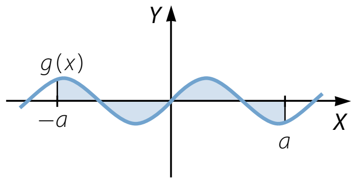
028 Dibuja las gráficas de las siguientes funciones, y razona por qué la integral definida de cada una en el intervalo $[-a, a]$ es nula.

a) $f(x) = x^3$ b) $g(x) = sen\ x$

a)



b)



En ambos casos son funciones impares, por lo que el área de la región correspondiente al intervalo $[0, a]$, es igual que la del intervalo $[-a, 0]$, pero la función toma signo contrario, por lo que un área anula a la otra.

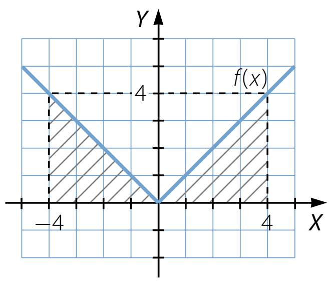
029 Calcula la integral definida a partir de su significado geométrico.

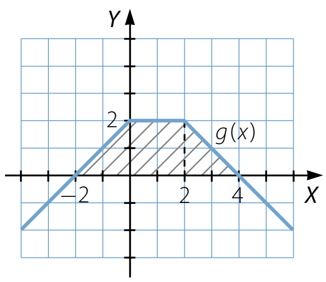
$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

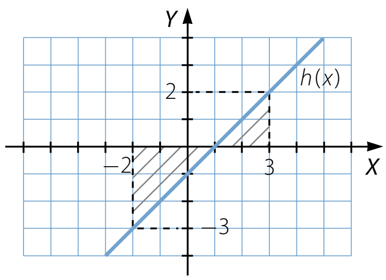
La función es la semicircunferencia de radio r, por lo que la integral es el área del semicírculo de radio r.

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{2}$$

030 Las siguientes figuras muestran las gráficas de las funciones f, g y h.







Calcula:

a) $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(x)\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} g(x)\,dx$ c) $\displaystyle\int_{-2}^{3} h(x)\,dx$

a) Geométricamente es el área de dos triángulos con misma base y altura.

$$2\cdot\frac{4\cdot 4}{2}=16$$

$$\int_{-4}^{4} f(x)\,dx=\int_{-4}^{0}-x\,dx+\int_{0}^{4}x\,dx=\frac{16}{2}+\frac{16}{2}=16$$

b) Geométricamente es el área de un trapecio de bases 6 y 2, y altura 2.

$$\frac{6+2}{2}\cdot 2=8$$

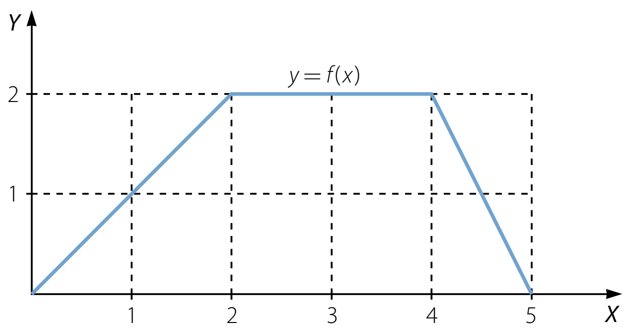
$$\int_{-2}^{4} g(x)\,dx=\int_{-2}^{0}(x+2)\,dx+\int_{0}^{2}2\,dx+\int_{2}^{4}(4-x)\,dx=2+4+2=8$$

c) Geométricamente es la diferencia del área de dos triángulos.

$$\frac{2\cdot 2}{2}-\frac{3\cdot 3}{2}=-\frac{5}{2}$$

$$\int_{-2}^{3} h(x)\,dx=\int_{-2}^{3}(x-1)\,dx=\int_{-2}^{1}(x-1)\,dx+\int_{1}^{3}(x-1)\,dx=\frac{2\cdot 2}{2}-\frac{3\cdot 3}{2}=-\frac{5}{2}$$

031 **Considere la función $y=f(x)$ definida para $x\in[0,5]$ que aparece dibujada en la figura.**



Calcule $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,dx$.

(Cataluña. Año 2006. Serie 3. Cuestión 2)

Geométricamente es el área de un trapecio de bases 3 y 1, y altura 2: $\dfrac{3+1}{2}\cdot 2=4$

$$\int_{0}^{3} f(x)\,dx=4$$

032 Aplicando las propiedades de la integral definida, calcula:

a) $\int_0^4 (2+x)\,dx$

c) $\int_0^2 (x^2-3x+5)\,dx$

b) $\int_{-3}^2 x^2\,dx$

d) $\int_{-1}^1 |x|\,dx$

a) $$S_n = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n 2\cdot\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{4}{n} = 4 \rightarrow \int_0^2 2\,dx = 4$$

$$S'_n = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n}\cdot\frac{2}{n} = \frac{2n(n+1)}{n^2} \rightarrow \int_0^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{2n(n+1)}{n^2} = 2$$

$$\int_0^2 (2+x)\,dx = \int_0^2 2\,dx + \int_0^2 x\,dx = 4+2 = 6$$

b) $$S_n = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n\left(-3+\frac{5i}{n}\right)^2\cdot\frac{5}{n} = \frac{5}{n}\cdot\sum_{i=1}^n\left(9-\frac{30i}{n}+\frac{25i^2}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{5}{n}\cdot\left(9n - \frac{30}{n}\cdot\sum_{i=1}^n i + \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^n i^2\right) = 45 - \frac{150n(n+1)}{2n} + \frac{125(2n^3+3n^2+n)}{6n^3}$$

c) $$\int_{-3}^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(45 - \frac{150n(n+1)}{2n} + \frac{125(2n^3+3n^2+n)}{6n^3}\right) =$$

$$= 45 - \frac{150}{2} + \frac{250}{6} = \frac{35}{3}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n\left(\frac{2i}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^n\frac{4i^2}{n^2} = \frac{8(2n^3+3n^2+n)}{6n^3}$$

$$\rightarrow \int_0^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{8(2n^3+3n^2+n)}{6n^3} = \frac{8}{3}$$

$$S'_n = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n\left(\frac{2i}{n}\right)\cdot\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^n\frac{2i}{n} = \frac{2n(n+1)}{n^2}$$

$$\rightarrow \int_0^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{2n(n+1)}{n^2} = 2$$

$$S''_n = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n 5\cdot\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^n 5 = \frac{10n}{n} = 10$$

$$\rightarrow \int_0^2 5\,dx = \lim_{n\to\infty} 10 = 10$$

$$\int_0^2 (x^2-3x+5)\,dx = \int_0^2 x^2\,dx - 3\int_0^2 x\,dx + \int_0^2 5\,dx = \frac{8}{3} - 3\cdot 2 + 10 = \frac{20}{3}$$

d) $S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(-1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = -1+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2} = -1+\frac{n(n+1)}{2n^2}$

$$\to \int_{-1}^{0} x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(-1+\frac{n(n+1)}{2n^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$S'_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}$

$$\to \int_{0}^{1} x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{1}|x|dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = -\int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = -\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} = 1$$

033 Halla la integral de la siguiente función en el intervalo $[-3, 3]$.

$$f(x) = \begin{cases} -4x & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(-3+\frac{3i}{n}\right)\cdot\frac{3}{n} = -9+\frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = -9+\frac{9n(n+1)}{2n^2}$

$$\to \int_{-3}^{0} x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(-9+\frac{9n(n+1)}{2n^2}\right) = -\frac{9}{2}$$

$S'_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i}{n}\right)\cdot\frac{3}{n} = \frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{9n(n+1)}{2n^2}$

$$\to \int_{0}^{3} x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n(n+1)}{2n^2}\right) = \frac{9}{2}$$

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} -4x\,dx + \int_{0}^{3} x\,dx = -4\int_{-3}^{0} x\,dx + \int_{0}^{3} x\,dx = -4\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)+\frac{9}{2} = \frac{45}{2}$$

034 Calcula la integral de la función en el intervalo $[-2, 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \le 0 \\ x^2+3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(-2+\frac{2i}{n}\right)\cdot\frac{2}{n} = -4+\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = -4+\frac{4n(n+1)}{2n^2}$

$$\to \int_{-2}^{0} xdx = \lim_{n\to\infty}\left(-4+\frac{4n(n+1)}{2n^2}\right) = -2$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 3\cdot\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{6}{n} = 6 \to \int_{-2}^{0} 3dx = \lim_{n\to\infty} 6 = 6$$

$S'_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2} = \frac{(2n^3+3n^2+n)}{6n^3}$

$$\to \int_{0}^{1} x^2dx = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n^3+3n^2+n)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 3 \cdot \frac{1}{n} = 3 \rightarrow \int_0^1 3\,dx = 3$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (x+3)\,dx + \int_{0}^{1} (x^2+3)\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} x\,dx + \int_{-2}^{0} 3\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx + \int_{0}^{1} 3\,dx = -2 + 6 + \frac{1}{3} + 3 = \frac{22}{3}$$

035 Demostrar que $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$.

(Murcia. Septiembre 2005. Bloque 4. Cuestión 2)

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \text{ y son continuas en } [0, 1] \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_0^1 \frac{dx}{2} = \frac{1}{2}$$

036 Comprueba que a la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ se le puede aplicar el teorema del valor medio para el cálculo integral en el intervalo $[-1, 1]$, y hállalo.

La función $f(x)$ es continua en toda la recta real menos en los puntos $x = 2$ y $x = -2$, por lo que es continua en el intervalo $[-1, 1]$. Y por tanto, podemos aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral.

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x^2-4}\,dx = \Big[x + \ln|x-2| - \ln|x+2|\Big]_{-1}^{1} =$$

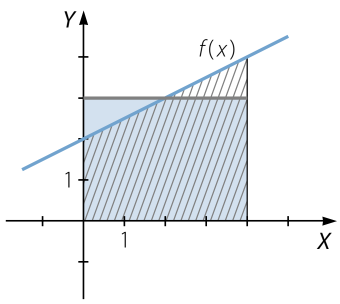
$$= 1 + \ln|-1| - \ln 3 + 1 - \ln|-3| + \ln 1 = 2 + \ln\frac{1}{9}$$

037 Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$:

a) Calcula el valor medio de la función en el intervalo [0, 4].
b) Explica el significado geométrico del valor obtenido.
c) Determina el punto donde la función alcanza el valor medio.

a) $\int_0^4 \left(\frac{1}{2}x + 2\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + 2x\right]_0^4 = \frac{16}{4} + 8 = 12 \rightarrow f(c) = \frac{12}{4} = 3$

b)



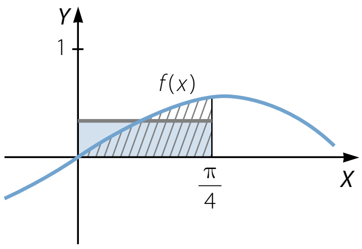
El área del recinto que se determina entre $f(x)$ y el eje X en el intervalo [0, 4], un trapecio de bases 4 y 2 y altura 4, equivale a la de un rectángulo de base la amplitud del intervalo que es 4, y altura el valor medio calculado $f(c) = 3$.

c) $f(c) = 3 \rightarrow \frac{1}{2}x + 2 = 3 \rightarrow x = 2$

038 **Halla el valor medio de la función $f(x) = x\cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, e interpreta geométricamente esa cantidad.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\,dx = \left[x\,\text{sen}\,x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

El valor medio es: $f(c) = \dfrac{\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$



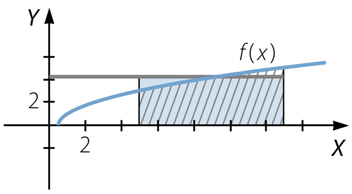
El área entre la curva y el eje X en el intervalo dado es igual al área del rectángulo de base la amplitud del intervalo y altura el valor medio $f(c)$.

039 **Obtén el valor medio de la función $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ en el intervalo [5, 13] y el punto donde se alcanza dicho valor medio. Interpreta geométricamente los resultados.**

$$\int_5^{13} \sqrt{2x-1}\,dx = \left[\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}\right]_5^{13} = \frac{125}{3} - 9 = \frac{98}{3}$$

El valor medio es $f(c) = \dfrac{\frac{98}{3}}{8} = \dfrac{49}{12}$ y se alcanza en el punto $\sqrt{2x-1} = \dfrac{49}{12}$

$$\rightarrow 2x - 1 = \frac{2.401}{144} \rightarrow x = \frac{2.545}{288}$$



El área entre la curva y el eje X en el intervalo dado es igual al área del rectángulo de base la amplitud del intervalo y altura el valor medio $f(c)$.

040 **Halla el valor medio de la función $f(x) = xe^{x^2}$ en el intervalo [0, 4], e interpreta geométricamente el resultado. Razona si alcanza el valor medio en ese intervalo.**

$$\int_0^4 xe^{x^2}\,dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^4 = e^{16} - \frac{1}{2} \rightarrow \text{El valor medio es: } f(c) = \frac{e^{16}}{2} - \frac{1}{4}$$

$$f(0) = 0 < f(c) = \frac{e^{16}}{2} - \frac{1}{4} < f(4) = 4e^{16}$$

Por ser una función continua existe $c \in (0, 4)$ tal que $f(c) = \dfrac{e^{16}}{2} - \dfrac{1}{4}$.

El área entre la curva y el eje X en el intervalo dado es igual al área del rectángulo de base la amplitud del intervalo y altura el valor medio $f(c)$.

041 **Calcula el valor medio de la función $f(x) = (2x + 2)e^{2x}$ en el intervalo [0, 1], e interprétalo gráficamente.**

$$\int_0^1 (2x+2)e^{2x}\,dx = \left[e^{2x}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{3e^2 - 1}{2} \rightarrow \text{El valor medio es: } f(c) = \frac{3e^2 - 1}{2}$$

El área entre la curva y el eje X en el intervalo dado es igual al área del rectángulo de base la amplitud del intervalo y altura el valor medio $f(c)$.

042 **Halla el valor medio integral de la función $f(x) = a + b\cos x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y el punto o los puntos donde alcanza dicho valor.**

$$\int_{-\pi}^{\pi} (a + b\cos x)\,dx = \left[ax + b\,\text{sen}\,x\right]_{-\pi}^{\pi} = 2a\pi \rightarrow \text{El valor medio es: } f(c) = a$$

$f(c) = a \rightarrow a + b\cos c = a$:

- Si $b \neq 0 \rightarrow \cos c = 0 \rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{\pi}{2} \\ c = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$
- Si $b = 0 \rightarrow c$ puede ser cualquier punto del intervalo $(-\pi, \pi)$.

043 **Sea $f\colon [-2, 2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[-2, 2]$ tal que $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(t)\,dt = \int_1^2 f(t)\,dt$, ¿se puede asegurar que existen b y c pertenecientes a $[-2, 2]$ tales que $b \leq 1$, $c \geq 1$ y $f(b) = f(c)$? Justifica la respuesta.**

(Galicia. Junio 2005. Bloque 3. Pregunta 1)

Por ser una función continua en $[-2, 2]$ podemos aplicar el teorema del valor medio para el cálculo integral a cada uno de los dos intervalos.

Existe $b \in [-2, -1]$ tal que $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(t)\,dt = f(b)(-1-(-2)) = f(b)$

Existe $c \in [1, 2]$ tal que $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt = f(c)(-1-(-2)) = f(c)$

Deducimos entonces que: $\displaystyle f(b) = \int_{-2}^{-1} f(t)\,dt = \int_1^2 f(t)\,dt = f(c)$

044 **Aplica el teorema fundamental del cálculo integral a las funciones en el intervalo [0, *a*]:**

a) $f(x) = x + 5$ **b)** $f(x) = x^2 - 3$

a) $A(x) = \int_0^x (t+5)\,dx = \int_0^x t\,dx + \int_0^x 5\,dx = \frac{x^2+10x}{2} \rightarrow A'(x) = x + 5 = f(x)$

b) $A(x) = \int_0^x (t^2-3)\,dx = \int_0^x t^2 dx - \int_0^x 3\,dx = \frac{x^3-9x}{3} \rightarrow A'(x) = x^2 - 3 = f(x)$

045 **Calcula la derivada de la función** $F(x) = \int_0^x te^{t^2}\,dt$ **en el punto** $x = 3$.

Por ser $f(x) = xe^{x^2}$ continua podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo integral: $F'(x) = f(x) = xe^{x^2} \rightarrow F'(3) = 3e^9$

046 **Dada** $F(x) = \int_1^x t \operatorname{sen} t\,dt$**, estudiar si** $x = \pi$ **es una raíz de** $F'(x)$.

(Aragón. Junio 2008. Bloque 3. Opción A)

Por ser la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$ continua podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo integral $F'(x) = f(x) = x \operatorname{sen} x \rightarrow F'(\pi) = 0$.
Es decir, $x = \pi$ es raíz de $F'(x)$.

047 **Sea** $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2\,dt$. **Calcula la segunda derivada de la función *F*.**

(Galicia. Septiembre 2005. Bloque 3. Pregunta 2)

Por ser $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ una función continua aplicamos el teorema fundamental del cálculo integral: $F'(x) = f(x) = \operatorname{sen} x^2 \rightarrow F''(x) = f'(x) = 2x \cos x^2$

048 **Sea la función** $F(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ **definida para** $x \geq 1$. **Halla sus máximos y mínimos relativos.**

(La Rioja. Junio 2005. Propuesta A. Ejercicio 4)

Por ser $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ continua en $x \geq 1$ calculamos la derivada de la función aplicando el teorema fundamental del cálculo integral.

$$F'(x) = f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \rightarrow F'(x) = 0 \rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \rightarrow x = n\pi \text{ para } n \in \mathbb{Z}$$

$$F''(x) = f'(x) = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$$

$$\rightarrow F''(n\pi) = \frac{\cos n\pi}{n\pi} = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} < 0 \text{ si } n \text{ par} \rightarrow \text{máximo} \\ \frac{-1}{n\pi} < 0 \text{ si } n \text{ impar} \rightarrow \text{mínimo} \end{cases}$$

049 Dada la función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, ¿tiene $F(x)$ puntos de inflexión?

Justifica la respuesta.

(Galicia. Junio 2007. Bloque 3. Opción 1)

Por ser $f(x) = e^{x^2}$ continua en la recta real, aplicamos el teorema fundamental del cálculo integral.

$$F'(x) = f(x) = e^{-x^2} \rightarrow F''(x) = f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$F''(x) = 0 \rightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

Tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

050 Calcula la derivada de esta función:

$$F(x) = \int_1^{2x} (t + t^2)\,dt$$

$$F(x) = \int_1^{2x} (t + t^2)\,dt \underset{\substack{t = 2u \rightarrow dt = 2\,du \\ t = 1 \rightarrow u = \frac{1}{2} \\ t = 2x \rightarrow u = x}}{=} \int_{1/2}^{x} (2u + (2u)^2)\,2\,du = \int_{1/2}^{x} (4u + 8u^2)\,du$$

$\rightarrow f(u) = 4u + 8u^2$ es una función continua y, por tanto, podemos aplicar el teorema del fundamental del cálculo integral.

$$F(x) = \int_1^{2x} (t + t^2)\,dt \rightarrow F'(x) = f(x) = 4x + 8x^2$$

Otra forma de hacerlo es:

$$F(x) = \int_1^{2x} (t + t^2)\,dt \rightarrow F'(x) = ((2x) + (2x)^2)\cdot(2x)' = (2x + 4x^2)\cdot 2 = 4x + 8x^2$$

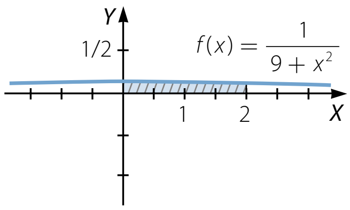
051 Demuestra que la regla de Barrow se puede aplicar a la función:

$$f(x) = \frac{1}{9 + x^2}$$

en el intervalo [0, 2] y aplícala. Interpreta geométricamente el resultado obtenido.

Por ser $f(x)$ continua en [0, 2] y ser $F(x) = 9\,arc\,tg\frac{x}{3}$ una primitiva de $f(x)$ podemos aplicar la Regla de Barrow:

$$\int_0^2 \frac{1}{9 + x^2}\,dx = \left[9\,arc\,tg\frac{x}{3}\right]_0^2 = 9\,arc\,tg\frac{2}{3}$$



Geométricamente es el área de la región limitada por la curva, el eje X y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

052 **Comprueba que se puede aplicar la regla de Barrow para calcular la siguiente integral, y halla su valor.**

$$\int_{0,5}^{1} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$$

Por ser $f(x)$ continua en [0,5; 1], podemos aplicar la Regla de Barrow siempre que exista una primitiva de la función:

$$\int_{0,5}^{1} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{t^2-1}\,dt = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{t+1}\right)dt =$$

$e^x = t \rightarrow e^x\,dt = dt$
$x = 0,5 \rightarrow t = \sqrt{e}$
$x = 1 \rightarrow t = e$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|t-1| - \ln|t+1|\right]_{\sqrt{e}}^{e} = \frac{1}{2}\left(\ln|e-1| - \ln|e+1| - \ln\left|\sqrt{e}-1\right| + \ln\left|\sqrt{e}+1\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(e-1)(\sqrt{e}+1)}{(e+1)(\sqrt{e}-1)}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{e}+1)^2}{(e+1)}\right|$$

$$\int_{0,5}^{1} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left|e^x-1\right| - \ln\left|e^x+1\right|\right]_{0,5}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|e-1| - \ln|e+1|\right) - \left(\ln\left|\sqrt{e}-1\right| - \ln\left|\sqrt{e}+1\right|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{e}+1)^2}{(e+1)}\right|$$

053 **Calcula las siguientes integrales definidas.**

a) $\displaystyle\int_{1}^{5} (2+4x^3)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} sen\ 2x\,dx$

c) $\displaystyle\int_{1}^{9} \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}\right)dx$

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} 2xe^{x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} (2e^x - 4x^2)\,dx$

f) $\displaystyle\int_{2}^{3} \left(2^x + \sqrt{2x}\right)dx$

g) $\displaystyle\int_{2}^{4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$

h) $\displaystyle\int_{-4}^{3} \left|x^2-4\right|dx$

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left|x-2\right|dx$

j) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx$

k) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} cos^2\,x\,dx$

l) $\displaystyle\int_{1}^{e} \ln x^2\,dx$

m) $\displaystyle\int_{0}^{2} 3xe^x\,dx$

n) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} x\ sen\ 2x\,dx$

ñ) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} tg\ x\,dx$

o) $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

Integrales definidas

a) $\displaystyle\int_1^5 (2+4x^3)\,dx = \left[2x + x^4\right]_1^5 = 635 - 3 = 632$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} sen 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2} cos 2x\right]_0^{\pi/4} = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

c) $\displaystyle\int_1^9 (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})dx = \left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3}\right]_1^9 =$

$\displaystyle= \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{9^4} + 18\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) = \frac{9}{4}\sqrt[3]{9} + \frac{195}{12}$

d) $\displaystyle\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx = \left[e^{x^2}\right]_0^1 = e - 1$

e) $\displaystyle\int_0^1 (2e^x - 4x^2)\,dx = \left[2e^x - \frac{4}{3}x^3\right]_0^1 = 2e - \frac{4}{3} - 2 = 2e - \frac{10}{3}$

f) $\displaystyle\int_2^3 (2^x + \sqrt{2x})\,dx = \left[2^x \ln 2 + \frac{2}{3}\sqrt{2x^3}\right]_2^3 = (8\ln 2 + 2\sqrt{6}) - \left(4\ln 2 + \frac{4}{3}\right) =$

$\displaystyle= 4\ln 2 + 2\sqrt{6} - \frac{4}{3}$

g) $\displaystyle\int_2^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\ln|x| + \frac{1}{x}\right]_2^4 = \left(\ln 4 + \frac{1}{4}\right) - \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right) = \ln 2 - \frac{1}{4}$

h) $\displaystyle\int_{-4}^3 \left|x^2 - 4\right| dx = \int_{-4}^{-2} (x^2-4)\,dx + \int_{-2}^2 (4-x^2)\,dx + \int_2^3 (x^2-4)\,dx =$

$\displaystyle= \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-4}^{-2} + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3 = \frac{32}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{71}{3}$

i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left|x-2\right| dx = \int_{-1}^1 (2-x)\,dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = 4$

j) $\displaystyle\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx = \left[6\sqrt{x}\right]_1^4 = (12-6) = 6$

k) $\displaystyle\int_0^\pi cos^2 x\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{sen 2x}{4}\right]_0^\pi = \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$

l) $\displaystyle\int_1^e \ln x^2\,dx = \left[-2x + x\ln x^2\right]_1^e = (-2e + 2e + 2) = 2$

m) $\displaystyle\int_0^2 3xe^x\,dx = \left[3xe^x - 3e^x\right]_0^2 = 3e^2 + 3$

n) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\,sen 2x\,dx = \left[\frac{sen\,2x}{4} - \frac{x\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

ñ) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} tg\,x\,dx = \left[-\ln|cos\,x|\right]_0^{\pi/4} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \ln\sqrt{2}$

o) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \left[\frac{1}{2} arc\,sen\,x^2\right]_0^{1/2} = \left(\frac{1}{2} arc\,sen\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{2} arc\,sen\frac{1}{4}$

054 Calcula el valor de la integral: $\int_3^{10} (x-2)^{1/3}\,dx$

(Extremadura. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 2)

$$\int_3^{10} (x-2)^{1/3}dx = \left[\frac{3}{4}(x-2)^{4/3}\right]_3^{10} = \left(12-\frac{3}{4}\right) = \frac{45}{4}$$

055 Sea $f(x) = \dfrac{4-2x^2}{x}$. Calcúlese $\int_1^{\sqrt{2}} f(x)\ln x\,dx$.

(Castilla y León. Septiembre 2006. Prueba B. Problema 2)

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{4-2x^2}{x}\ln x\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{x}\ln x - 2x\ln x\right)dx =$$

$$= \left[2\ln^2 x - x^2\ln x + \frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\ln^2\sqrt{2} - 2\ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}$$

056 Sea la función con valores reales $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ (se considera solo la raíz positiva).
Calcula: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

(Asturias. Septiembre 2005. Bloque 5)

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{4-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}\right]_{-1}^{1} = \sqrt{3}-\sqrt{3} = 0$$

057 Calcular: $\int_0^1 e^x(2x-1)\,dx$

(Galicia. Septiembre 2008. Bloque 3. Opción 1)

$$\int_0^1 e^x(2x-1)\,dx = \left[(2x-1)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = \left[e^x(2x-3)\right]_0^1 = (-e+3) = 3-e$$

$u = 2x-1 \rightarrow du = 2\,dx$
$dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x$

058 Calcula la integral definida $\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2008. Bloque 2. Pregunta B)

$$\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\,dx = \left[e^x \operatorname{sen} x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx = \left[e^x\operatorname{sen} x - e^x\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x\operatorname{sen} x\,dx$$

$u = \operatorname{sen} x \rightarrow du = \cos x\,dx$
$dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x$

$u = \cos x \rightarrow du = -\operatorname{sen} x\,dx$
$dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x$

$$2\int_0^{\pi} e^x\operatorname{sen} x\,dx = \left[e^x\operatorname{sen} x - e^x\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$\rightarrow \int_0^{\pi} e^x\operatorname{sen} x\,dx = \left[\frac{e^x\operatorname{sen} x - e^x\cos x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{e^{\pi}}{2}+\frac{e^{\pi}}{2} = e^{\pi}$$

059 Calcule la integral siguiente: $I = \int_0^1 (x^2 - 1)\, e^{-2x}\, dx$

(Murcia. Junio 2006. Bloque 4. Cuestión A)

$$\int_0^1 (x^2-1)e^{-2x}dx = \left[\frac{-(x^2-1)}{2}e^{-2x}\right]_0^1 + \int_0^1 xe^{-2x}dx =$$

$u = x^2 - 1 \rightarrow du = 2x\,dx$

$dv = e^{-2x}dx \rightarrow v = \frac{-1}{2}e^{-2x}$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = e^{-2x}dx \rightarrow v = \frac{-1}{2}e^{-2x}$

$$= \left[\frac{-(x^2-1)}{2}e^{-2x} + \frac{-x}{2}e^{-2x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x}dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}e^{-2x}(1-2x-2x^2)\right]_0^1 = \frac{-3}{4e^2} - \frac{1}{4}$$

060 Sea la función $f(x) = \dfrac{sen\ x}{2 - \cos\ x}$. Calcula: $\int_0^{\pi/3} f(x)\, dx$

(Asturias. Junio 2005. Bloque 6)

$$\int_0^{\pi/3} \frac{sen\,x}{2-\cos x}dx = \left[\ln|2-\cos x|\right]_0^{\pi/3} = \ln\frac{3}{2}$$

061 Calcular el valor de la integral: $I = \int_0^1 xe^x\, dx$

(Murcia. Junio 2005. Bloque 4. Cuestión 2)

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \left[e^x(x-1)\right]_0^1 = 0-(-1) = 1$$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$

062 Calcula $\int_{-1}^{2} x \cdot |x|\, dx$.

(La Rioja. Septiembre 2005. Propuesta B. Ejercicio 3)

$$\int_{-1}^2 x\cdot|x|dx = \int_{-1}^0 -x^2dx + \int_0^2 x^2dx = \left[-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(0+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{8}{3}+0\right) = 3$$

063 Halla las siguientes integrales definidas de funciones racionales.

a) $\int_1^3 \dfrac{3}{x+2}dx$

c) $\int_2^5 \dfrac{x+3}{x-1}dx$

e) $\int_{-1}^1 \dfrac{1}{x^2+2}dx$

b) $\int_0^3 \dfrac{2x}{x^2+1}dx$

d) $\int_0^1 \dfrac{1}{x^2+1}dx$

f) $\int_1^3 \dfrac{1}{x(x+1)}dx$

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{3}{x+2}dx = \left[3\ln|x+2|\right]_1^3 = (3\ln 5 - 3\ln 3) = 3\ln\frac{5}{3}$

b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1}dx = \left[\ln|x^2+1|\right]_0^3 = \ln 10 - \ln 1 = \ln 10$

c) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x+3}{x-1}dx = \int_2^5\left(1+\frac{4}{x-1}\right)dx = \left[x+4\ln|x-1|\right]_2^5 =$

$= 5 + 4\ln 4 - 2 - 4\ln 1 = 3 + 4\ln 4$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \left[arctg\, x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+2}dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{-\sqrt{2}}{2} =$

$= \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

f) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}dx = \int_1^3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \left[\ln|x| - \ln|x+1|\right]_1^3 =$

$= \ln 3 - \ln 4 - \ln 1 + \ln 2 = \ln\dfrac{3}{2}$

064 Calcular: $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$

(Madrid. Septiembre 2006. Opción A. Ejercicio 1)

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x}dx = \int_1^2\left(\frac{1/2}{x} + \frac{-1/2}{x+2}\right) = \left[\frac{\ln|x|}{2} - \frac{\ln|x+2|}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{\ln 2 - \ln 4}{2} - \frac{\ln 1 - \ln 3}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

065 Calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2-4}\,dx$

(Murcia. Septiembre 2006. Bloque 4. Cuestión A)

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2-4}\,dx = \int_0^1\left(1+\frac{5/4}{x-2} + \frac{-5/4}{x+2}\right)dx = \left[x + \frac{5}{4}\ln|x-2| - \frac{5}{4}\ln|x+2|\right]_0^1 =$$

$$= 1 + \frac{5}{4}\ln\frac{1}{3}$$

066 Calcular el valor de la siguiente integral definida: $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x+1)}\,dx$

(País Vasco. Junio 2006. Bloque D. Cuestión D)

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x+1)}dx = \int_1^2\left(1+\frac{1}{x} + \frac{-2}{x+1}\right)dx = \left[x + \ln|x| - 2\ln|x+1|\right]_1^2 = 1 + \ln\frac{8}{9}$$

067 Sea la función $f(x)=\dfrac{3x^3}{x^2-4}$, calcula $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

(Asturias. Junio 2006. Bloque 6)

$$\int_{-1}^{1}\frac{3x^3}{x^2-4}dx=\int_{-1}^{1}\left(3x+\frac{6}{x-2}+\frac{6}{x+2}\right)=$$

$$=\left[\frac{3x^2}{2}+6\ln|x-2|+6\ln|x+2|\right]_{-1}^{1}=\frac{3}{2}+6\ln 3-\frac{3}{2}-6\ln 3=0$$

068 Calcular la integral: $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3+2}{x^2+3x+2}\,dx$

(Murcia. Septiembre 2007. Bloque 4. Cuestión A)

$$\int_0^1\frac{x^3+2}{x^2+3x+2}dx=\int_0^1\left(x-3+\frac{1}{x+1}+\frac{6}{x+2}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-3x+\ln|x+1|+6\ln|x+2|\right]_0^1=\frac{-5}{3}+6\ln 3-5\ln 2$$

069 Sea a un número positivo menor que 4. Calcula: $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{1}{x^3-4x^2-25x+100}\,dx$

(La Rioja. Junio 2006. Propuesta A. Ejercicio 2)

$$\int_{a}^{-a}\frac{1}{x^3-4x^2-25x+100}dx=\int_{a}^{-a}\left(\frac{1/10}{x-5}+\frac{-1/9}{x-4}+\frac{1/90}{x+5}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{1}{10}\ln|x-5|+\frac{1}{90}\ln|x+5|-\frac{1}{9}\ln|x-4|\right]_a^a=$$

$$=\frac{1}{10}\ln|a-5|+\frac{1}{90}\ln|a+5|-\frac{1}{9}\ln|a-4|-$$

$$-\frac{1}{10}\ln|-a-5|-\frac{1}{90}\ln|-a+5|+\frac{1}{9}\ln|-a-4|$$

070 Halla los valores de b para que se cumpla:

a) $\displaystyle\int_0^b (x+x^2)\,dx=0$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(4+bx)\,dx=2$

b) $\displaystyle\int_b^0 |x^2-1|\,dx=\frac{22}{3}$

d) $\displaystyle\int_0^3 (b+x^2)\,dx=12$

a) $$\int_0^b (x+x^2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^b=\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}\to\int_0^b(x+x^2)\,dx=0$$

$$\to\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}=0\to\frac{b^2}{6}(3+2b)=0\to\begin{cases}b=0\\ b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

b) • Si $b \le -1$:

$$\int_b^0 \left|x^2-1\right| dx = \int_b^{-1} (x^2-1)\, dx + \int_{-1}^0 (1-x^2)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_b^{-1} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{4}{3} - \frac{b^3}{3} + b$$

$$\int_b^0 \left|x^2-1\right| dx = \frac{22}{3} \to \frac{4}{3} - \frac{b^3}{3} + b = \frac{22}{3} \to b^3 - 3b + 18 = 0 \to b = -3$$

• Si $-1 < b \le 0$:

$$\int_b^0 \left|x^2-1\right| dx = \int_b^0 (1-x^2)\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_b^0 = \frac{b^3}{3} - b$$

$$\int_b^0 \left|x^2-1\right| dx = \frac{22}{3} \to \frac{b^3}{3} - b = \frac{22}{3} \to b^3 - 3b - 22 = 0$$

$\to$ No tiene solución en el intervalo $(-1, 0]$.

c) $$\int_{-2}^2 (4+bx)\, dx = \left[\frac{bx^2}{2} + 4x\right]_{-2}^2 = 2b + 8 - 2b + 8 = 16 \ne 2$$

No existe ningún valor de b que lo cumpla.

d) $$\int_0^3 (b+x^2)\, dx = \left[bx + \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3b+9 \to \int_0^3 (b+x^2)\, dx = 12 \to 3b+9 = 12 \to b = 1$$

071 Sea $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$.

a) Expresa I aplicando el cambio de variable $t = 1 + x^2$.

b) Calcula el valor de I.

(Andalucía. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 2)

a) $$\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int_1^5 \frac{t-1}{2\sqrt{t}}\, dt$$

$t = 1 + x^2 \to dt = 2x\, dx$

$x = 0 \to t = 1$

$x = 2 \to t = 5$

b) $$\int_1^5 \frac{t-1}{2\sqrt{t}} dt = \int_1^5 \left(\frac{\sqrt{t}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) dt = \left[\frac{\sqrt{t^3}}{3} - \sqrt{t}\right]_1^5 = \frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(\sqrt{5}+1)$$

072 Sea $I = \displaystyle\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x} - 1}\, dx$.

a) Exprésala aplicando el cambio de variable $\sqrt{1+x} - 1 = t$.

b) Calcula I.

(Andalucía. Septiembre 2005. Opción B. Ejercicio 2)

a) $\displaystyle\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx = \int_1^2 \frac{2(t+1)}{t}\,dt$

$t = \sqrt{1+x} - 1 \rightarrow dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{1+x}}$

$x = 3 \rightarrow t = 1$

$x = 8 \rightarrow t = 2$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2(t+1)}{t}\,dt = \int_1^2 \left(2 + \frac{2}{t}\right)dt = \left[2t + 2\ln|\,t|\right]_1^2 = 2 + 2\ln 2$

073 Calcular la integral: $\displaystyle\int_1^e \ln x^2\,dx$

(Murcia. Junio 2007. Bloque 4. Cuestión A)

$$\int_1^e \ln x^2\,dx = \left[-2x + x\ln x^2\right]_1^e = (-2e + 2e + 2) = 2$$

074 Hallad $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

(La Rioja. Junio 2008. Propuesta A. Ejercicio 2)

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_1^4 \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt = \left[\frac{2\sqrt{t^3}}{3} - 2\sqrt{t}\right]_1^4 = \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

$t = x^2 + 1 \rightarrow dt = 2x\,dx$

$x = 0 \rightarrow t = 1$

$x = \sqrt{3} \rightarrow t = 4$

075 Calcular el valor de a para que la integral entre 0 y a de la función xe^x sea igual a 1.

(Canarias. Septiembre 2007. Opción B. Cuestión 2)

$$\int_0^a xe^x\,dx = \left[e^x(x-1)\right]_0^a = e^a(a-1) + 1$$

$$e^a(a-1) + 1 = 1 \rightarrow e^a(a-1) = 0 \rightarrow a = 1$$

076 Se considera la función $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

Determinar el valor del parámetro a tal que: $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \frac{1}{4}$

(Madrid. Septiembre 2005. Opción A. Ejercicio 2)

$$\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^a = \frac{-1}{1+e^a} - \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{1+e^a} + 1$$

$$\frac{-1}{1+e^a} + 1 = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{-1}{1+e^a} = \frac{-3}{4} \rightarrow e^a = \frac{1}{3} \rightarrow a = -\ln 3$$

077 La función $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$$

es continua en $[0, +\infty)$. Calcular $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,dx$.

(Aragón. Junio 2006. Opción B. Cuestión 2)

Para que $f(x)$ sea continua $a = 8$.

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 \sqrt{8x}\,dx + \int_8^{10} \frac{x^2-32}{x-4}\,dx = \left[\frac{\sqrt{(8x)^3}}{12}\right]_0^8 + \left[\frac{x^2}{2} + 4x - 16\ln|x-4|\right]_8^{10} =$$

$$= \frac{128}{3} + 50 + 40 - 16\ln 6 - 32 - 32 + 16\ln 4 = \frac{206}{3} - 16\ln\frac{3}{2}$$

078 Sea: $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si } 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \ge \pi \end{cases}$. Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

(Aragón. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 2)

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} (x^2 + 2a\cos x)\,dx + \int_\pi^{2\pi} (ax^2 + b)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2a\,\text{sen}\,x\right]_0^\pi + \left[\frac{ax^3}{3} + bx\right]_\pi^{2\pi} =$$

$$= \frac{\pi^3}{3} + \frac{8a\pi^3}{3} - \frac{a\pi^3}{3} + 2b\pi - b\pi = \frac{\pi^3(7a+1)}{3} + b\pi$$

079 Dada: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,x^2}{x} & \text{si } x > 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \le 0 \end{cases}$ halla $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2 f(x)\,dx$.

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba B. Problema 2)

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2 f(x)dx = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x\,\text{sen}\,x^2 dx = \left[\frac{-\cos x^2}{2}\right]_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

080 Sea $f(x)$ una función derivable en $(0, 1)$ y continua en $[0, 1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\displaystyle\int_0^1 2x\,f'(x)\,dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

(Madrid. Junio 2005. Opción A. Ejercicio 1)

$$\int 2x\,f'(x)\,dx = 2x\,f(x) - 2\int f(x)\,dx$$

$u = 2x \to du = 2dx$
$dv = f'(x) \to v = f(x)$

$$1 = \int_0^1 2x\, f'(x)dx = \left[2x\, f(x)\right]_0^1 - 2\int_0^1 f(x)dx = 2f(1) - 2\int_0^1 f(x)dx =$$
$$= -2\int_0^1 f(x)dx \rightarrow \int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{2}$$

081 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = ax^2 + b$. Halla los valores de a y b sabiendo que $\int_0^6 f(x)\, dx = 6$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa 3 vale -12.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 1)

Por ser la pendiente de la recta tangente igual a -12 en el punto de abscisa $x = 3$, sabemos que $f'(3) = -12$.

$f'(x) = 2ax \rightarrow f'(3) = 6a \rightarrow -12 = 6a \rightarrow a = -2$

Luego la función es: $f(x) = -2x^2 + b$

$$6 = \int_0^6 f(x)\, dx = \int_0^6 (-2x^2 + b)\, dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + bx\right]_0^6 = -144 + 6b$$
$$\rightarrow b = 25 \rightarrow f(x) = -2x^2 + 25$$

082 Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:

- Tiene un máximo relativo en $x = 1$.
- Tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas (0, 1).
- Se verifica: $\int_0^1 p(x)\, dx = \frac{5}{4}$

(Madrid. Junio 2005. Opción A. Ejercicio 2)

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p''(x) = 6ax + 2b$

- Pasa por el punto (0, 1) $\rightarrow p(0) = 1 \rightarrow d = 1$
- El punto (0, 1) es un punto de inflexión $\rightarrow p''(0) = 0 \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$
- Tiene un máximo en $x = 1 \rightarrow p'(1) = 0 \rightarrow 3a + c = 0$
- $\frac{5}{4} = \int_0^1 p(x)\, dx = \int_0^1 (ax^3 + cx + 1)\, dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{cx^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{c}{2} + 1$

$$\rightarrow a + 2c = 1$$

Formamos un sistema con las dos últimas condiciones:

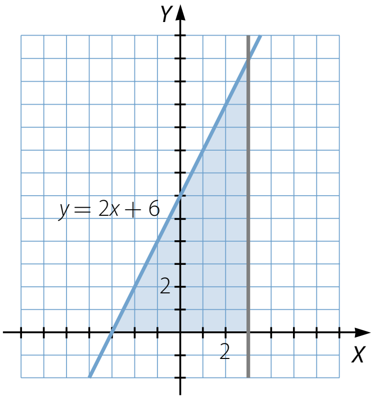
$$\left.\begin{array}{l} 3a + c = 0 \\ a + 2c = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{c=-3a} a - 6a = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{5} \rightarrow c = \frac{3}{5}$$

Luego, el polinomio es: $p(x) = \frac{-1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x + 1$

083 **Utilizando el cálculo integral, halla el área del recinto que delimitan las rectas:**

$$y = 2x + 6 \qquad y = 0 \qquad x = 3$$

Calcula con la fórmula correspondiente el área del triángulo anterior y comprueba que el resultado coincide con el obtenido anteriormente.



Calculamos los puntos de intersección.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + 6 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + 6 \\ x = 3 \end{array}\right\} \rightarrow y = 12$$

$$\int_{-3}^{3} (2x + 6)\, dx = \left[x^2 + 6x\right]_{-3}^{3} = 9 + 18 - 9 + 18 = 36$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{6 \cdot 12}{2} = 36$$

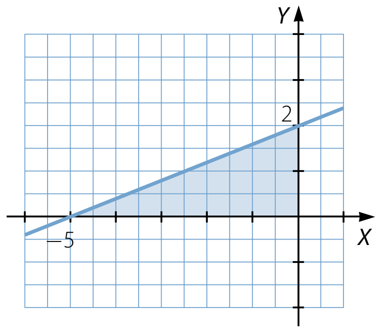
084 **Mediante integrales halla el área del triángulo determinado por los puntos (−5, 0), (0, 0) y (0, 2).**

Calculamos las rectas que determinan los lados del triángulo.

El lado que contiene los vértices (−5, 0) y (2, 0) está en la recta $y = \frac{2}{5}x + 2$.

El lado que contiene los vértices (−5, 0) y (0, 0) está en la recta $y = 0$.

El lado que contiene los vértices (0, 0) y (2, 0) está en la recta $x = 0$.



$$\text{Área} = \left|\int_{-5}^{0} \left(\frac{2}{5}x + 2\right) dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{5} + 2x\right]_{-5}^{0}\right| = 5$$

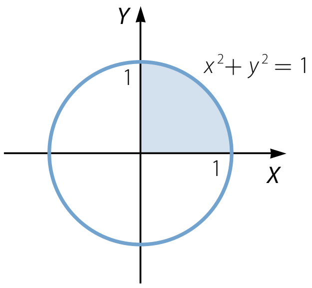
085 **Obtén el área del recinto que delimitan la parábola $y = -x^2 + 9$ y el eje X.**

Hallamos los puntos de corte de la parábola y el eje X:

$$-x^2 + 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\int_{-3}^{3} (-x^2 + 9)\, dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 9x\right]_{-3}^{3} = -9 + 27 - 9 + 27 = 36$$

086 **Utilizando el cálculo integral, halla el área del sector circular que forma la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con los semiejes positivos de coordenadas. Comprueba que este resultado coincide con el que se obtiene cuando se aplica la fórmula de área de un círculo.**



$$\text{Área} = \int_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \left[\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{\pi}{4}$$

087 **Calcula una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$.**

Determina la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

$$\int \frac{x + 2}{x^2 - 1} dx = \int \left(\frac{3/2}{x - 1} + \frac{-1/2}{x + 1}\right) dx = \frac{3}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + k$$

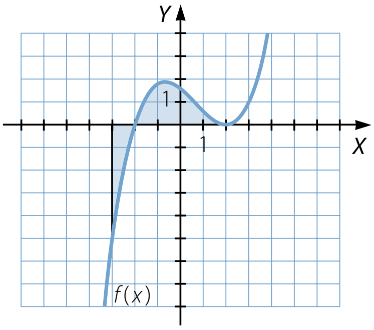
La integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x + 2}{x^2 - 1} dx$ no se puede calcular porque la función no es continua en los extremos del intervalo, de hecho, si intentamos aplicar la regla de Barrow obtendríamos:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x + 2}{x^2 - 1} dx = \left[\frac{3}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1|\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{3}{2} \ln 0 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 0 = -\infty$$

Luego esta integral no existe.

088 **Determina el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = (x-2)^2(x+2)$ y el eje X en el intervalo $[-3, 2]$.**



Hallamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$\left.\begin{array}{l} y = (x-2)^2(x+2) \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

El área es:

$$\text{Área} = \left|\int_{-3}^{-2} (x-2)^2(x+2)dx\right| + \left|\int_{-2}^{2} (x-2)^2(x+2)dx\right| =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left|-\frac{44}{3} + \frac{15}{4}\right| + \left|\frac{20}{3} + \frac{44}{3}\right| = \frac{131}{12} + \frac{64}{3} = \frac{387}{12} = \frac{129}{4}$$

089 **Halla el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$ y el eje X en el intervalo $[0, 2]$.**

La función no corta al eje X en el intervalo $[0, 2]$ luego, el área en el intervalo $[0, 2]$ es el valor de la siguiente integral:

$$\left|\int_0^2 \ln(1+x^2)\,dx\right| = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^2 - \left|\int_0^2 \frac{2x}{1+x^2}dx\right| =$$

$$u = \ln(1+x^2) \rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2dx}$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

$$= \left[x\ln(1+x^2) - 2x + \operatorname{arctg} x + k\right]_0^2 = 2\ln 5 - 4 + \operatorname{arctg} 2$$

090 **Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, el eje X y las rectas $x = -4$ y $x = -2$.**

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba A. Problema 2)

La función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ corta al eje X únicamente en el origen de coordenadas.

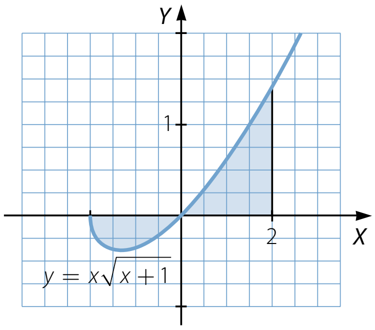
$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x}{x^2-1} = 0 \rightarrow x = 0$$

Por tanto el área buscada es:

$$\text{Área} = \left| \int_{-4}^{-2} \frac{x}{x^2-1}\, dx \right| = \left| \left[\frac{1}{2} \ln |x^2-1| \right]_{-4}^{-2} \right| = \left| \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 15 \right| = \frac{1}{2} \ln 5$$

091 **Calcula el área limitada por la curva $y = x\sqrt{x+1}$, la recta $y = 0$ y la recta $x = 1$. Previamente haz un esquema del recinto cuya área hay que calcular.**

(La Rioja. Junio 2007. Propuesta B. Ejercicio 5)



Calculamos los puntos de corte de la función con la recta $y = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = x\sqrt{x+1} \end{array} \right\} \rightarrow x\sqrt{x+1} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\, dx \right| + \left| \int_{0}^{1} x\sqrt{x+1}\, dx \right| = \left| \int_{0}^{1} (t^2-1)\, 2t^2 dt \right| + \left| \int_{1}^{\sqrt{2}} (t^2-1)\, 2t^2 dt \right| =$$

$x + 1 = t^2 \rightarrow dx = 2tdt$

$x = -1 \rightarrow t = 0$

$x = 0 \rightarrow t = 1$

$x = 1 \rightarrow t = \sqrt{2}$

$$= \left| \left[\frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} \right| = \left| \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right| + \left| \frac{8\sqrt{2}}{5} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right| =$$

$$= \frac{4}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4\sqrt{2}}{15} = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{15}$$

092 **Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $f(x) = |x^2 - 4|$ y las rectas $x = -1$, $x = 4$ e $y = 0$.**

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio A. Problema 3)

Calculamos los puntos de corte de la curva $f(x) = |x^2 - 4|$ y el eje X $(y = 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = |x^2 - 4| \end{array} \right\} \rightarrow |x^2 - 4| = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = +2 \end{cases}$$

Escribimos la función valor absoluto como función definida a trozos.

$$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le -2 \\ 4 - x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^{2} (4 - x^2)\, dx \right| + \left| \int_{2}^{4} (x^2 - 4)\, dx \right| = \left| \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{2}^{4} \right|$$

$$= 9 + \frac{32}{3} = \frac{59}{3}$$

093 Calcula el área determinada por la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4x+3}$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$.

(Murcia. Junio 2006. Bloque 4. Cuestión B)

La función no corta a $y = 0$ salvo en el punto de abscisa $x = 0$.

$$\left|\int_0^3 \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx\right| = \left|\int_0^3 1+\frac{1/2}{x+1}+\frac{-9/2}{x+3}\right| = \left|\left[x+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{9}{2}\ln|x+3|\right]_0^3\right| =$$

$$= 3+\frac{1}{2}\ln 4-\frac{9}{2}\ln 7+\frac{9}{2}\ln 3$$

094 Dada la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, calcúlese el área de la región limitada por dicha gráfica y las rectas $x = 0$ e $y = 0$.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba B. Problema 2)

Calculamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-1}{x+1} = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\,dx\right| = \int_0^1 \left(1+\frac{-2}{x+1}\right)dx = \left|\left[x-2\ln|x+1|\right]_0^1\right| =$$

$$= |1-2\ln 2| = 2\ln 2 - 1$$

095 Calcular el área encerrada por el eje X y la función $f(x) = x\cos x$ entre $x = -\dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$.

(Murcia. Septiembre 2007. Bloque 4. Cuestión B)

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = x\cos x \end{array}\right\} \rightarrow x\cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2}+n\pi \end{cases}$$

El área es:

$$\text{Área} = \left|\int_{-\pi/2}^0 x\cos x\,dx\right| + \left|\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\cos x + x\,\text{sen}\,x\right]_{-\pi/2}^0\right| + \left|\left[\cos x + x\,\text{sen}\,x\right]_0^{\pi/2}\right| = \left|1-\frac{\pi}{2}\right| + \left|\frac{\pi}{2}-1\right| = \pi - 2$$

096 Halla el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = |(x-1)(3x-1)|$, el eje X, el eje Y y la recta $x = 2$.

Hallamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = |(x-1)(3x-1)| \end{array}\right\} \rightarrow |(x-1)(3x-1)| = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Escribimos la función en forma de función definida a trozos.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 & \text{si } x \leq \dfrac{1}{3} \\ -3x^2 + 4x - 1 & \text{si } \dfrac{1}{3} < x < 1 \\ 3x^2 - 4x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Área } = \int_0^{1/3} (3x^2 - 4x + 1)\, dx + \int_{1/3}^{1} (-3x^2 + 4x - 1)\, dx + \int_1^2 (3x^2 - 4x + 1)\, dx =$$

$$= \left| \left[x^3 - 2x^2 + x \right]_0^{1/3} \right| + \left| \left[-x^3 + 2x^2 - x \right]_{1/3}^{1} \right| + \left| \left[x^3 - 2x^2 + x \right]_1^2 \right| =$$

$$= \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + 2 = \frac{62}{27}$$

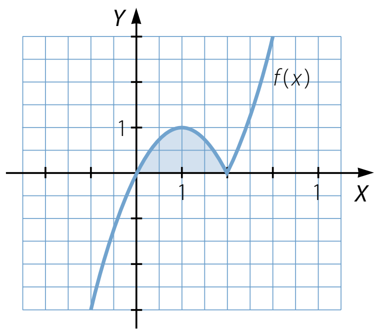
097 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x|x - 2|$.

a) Esboza la gráfica de f.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

(Andalucía. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 2)

a)



b) Calculamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = x|x - 2| \end{array}\right\} \rightarrow x|x - 2| = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Escribimos la función como función definida a trozos.

$$f(x) = x|x - 2| = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \int_0^2 (-x^2 + 2x)\, dx = \left[\frac{-x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

098 La parábola $f(x) = 4 - x^2$, su recta tangente en $x = 1$ y el eje Y limitan un recinto finito en el plano. Dibujar un esquema de dicho recinto y hallar su área mediante cálculo integral.

(País Vasco. Julio 2007. Bloque D. Problema D)

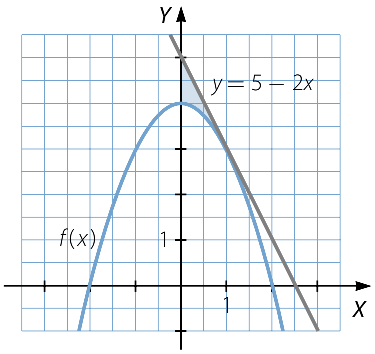
Calculamos la recta tangente en $x = 1$.

$f(1) = 3 \rightarrow$ la recta pasa por el punto (1, 3).

$f'(x) = -2x \rightarrow f'(1) = -2 \rightarrow m = -2$.

La recta tangente en el punto (1, 3) es:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 3 = -2(x - 1) \rightarrow y = 5 - 2x$



$$\text{Área} = \left|\int_0^1 (-2x + 5 - (4 - x^2))\,dx\right| = \left|\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1\right| = \frac{1}{3}$$

099 **Halla el área del recinto limitado por la curva $y = x^2 - 4x$, el eje X y la recta $x = 5$.**

Hallamos los puntos de corte de la curva $y = x^2 - 4x$ con el eje X que es la recta $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = x^2 - 4x \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^4 (x^2 - 4x)\,dx\right| + \left|\int_4^5 (x^2 - 4x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^4\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_4^5\right| =$$

$$= \left|-\frac{32}{3}\right| + \left|\frac{7}{3}\right| = 13$$

100 **Calcula el área encerrada por la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ y los ejes X e Y.**

(Murcia. Junio 2007. Bloque 4. Cuestión B)

Calculamos los puntos de corte de la curva $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ con el eje X que es la recta $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\left|\int_0^1 \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}\,dx\right| = \left|\int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}\right)dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| - \operatorname{arctg} x\right]_0^1\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4}\right| = \frac{\pi + 2\ln 2 - 2}{4}$$

101 Halla el área del recinto limitado por el eje X y la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx \right| + \left| \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 \right| =$$

$$= \left| \frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 \right| + \left| \frac{4^4}{4} - 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 - \frac{2^4}{4} + 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 \right| = 4 + |-4| = 8$$

102 Dada la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje X.

(Madrid. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 1)

Hallamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$\frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} = 0 \rightarrow x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}\, dx \right| = \left| \int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} \left(1 - \frac{16}{x^2 + 4} \right) dx \right| = \left| \left[x - 8\, arctg \frac{x}{2} \right]_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} \right| =$$

$$= \left| 2\sqrt{12} - 16 \cdot \frac{\pi}{3} \right| = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

103 Sea la función $f(x) = x\, sen\, 2x$. Calcular la integral de esta función entre $x = 0$ y su primer cero positivo.

Nota: Llamamos ceros de una función a aquellos puntos donde se anula.

(Aragón. Junio 2005. Opción B. Cuestión 4)

Calculamos el primer cero positivo de la función $f(x) = x\, sen 2x$

$$x\, sen 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases}$$

El primer cero positivo es $x = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\pi/2} x\, sen 2x\, dx = \left[-\frac{x \cos 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{2}\, dx = \left[-\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{sen 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4}$$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = sen\, 2x\, dx \rightarrow v = -\dfrac{\cos 2x}{2}$

104 Una parábola corta al eje X en el origen y en el punto $x = 3$. Halla su ecuación, sabiendo que el recinto delimitado por ella y el eje X tiene dos unidades cuadradas de área.

La parábola es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Pasa por el origen $\rightarrow f(0) = 0 \rightarrow c = 0$
- Pasa por el $(3, 0) \rightarrow f(3) = 0 \rightarrow 9a + 3b = 0 \rightarrow b = -3a$
- $\left|\int_0^3 f(x)\,dx\right| = 2 \rightarrow \left|\int_0^3 (ax^2 - 3ax)\,dx\right| = 2 \rightarrow \left|\left[\frac{ax^3}{3} + \frac{-3ax^2}{2}\right]_0^3\right| = 2$

$$\rightarrow \left|9a - \frac{27a}{2}\right| = 2 \rightarrow |-9a| = 4 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{9} \\ a = -\frac{4}{9} \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- $f(x) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{3}x$
- $f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$

105 Se considera, en el primer cuadrante, la región R del plano limitada por el eje X, el eje Y, la recta $x = 2$ y la curva:

$$y = \frac{1}{4 + x^2}$$

a) Calcular razonadamente el área de la región R.

b) Encontrar el valor de α para que la recta $x = \alpha$ divida la región R en dos partes A (izquierda) y B (derecha) tales que el área de A sea el doble que la de B.

(C. Valenciana. Junio 2008. Bloque 3. Problema 1)

a) La función $y = \frac{1}{4 + x^2}$ no corta al eje X y siempre es positiva.

$$\text{Área} = \int_0^2 \frac{1}{4 + x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2} arctg \frac{x}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}$$

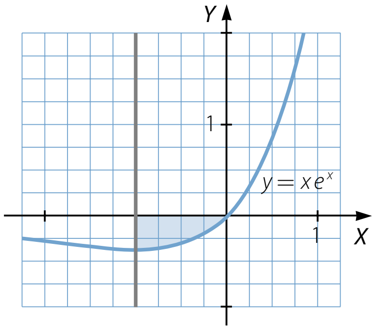
b) $\frac{\pi}{16} = \int_0^\alpha \frac{1}{4 + x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2} arctg \frac{x}{2}\right]_0^\alpha = \frac{1}{2}\left(arctg \frac{\alpha}{2}\right)$

$$\rightarrow arctg \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{8} \rightarrow \alpha = 2\,tg \frac{\pi}{8}$$

106 Dibuja razonadamente el recinto limitado por la curva $y = xe^x$, el eje X y la recta paralela al eje Y que pasa por el punto donde la curva tiene su mínimo relativo. Calcula el área de dicho recinto.

Calculamos el mínimo relativo de $y = xe^x$.

$y' = (x + 1)e^x \rightarrow 0 = (x + 1)e^x \rightarrow x = -1$. Alcanza el mínimo relativo en $x = -1$.



$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} xe^x\,dx\right| = \left|\left[(x-1)e^x\right]_{-1}^{0}\right| = \left|-1-\frac{-2}{e}\right| = \left|-1+\frac{2}{e}\right| = 1-\frac{2}{e}$$

107 **Halla el área limitada por la curva $y = xe^{-x^2}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$, siendo a la abscisa del punto máximo de la curva.**

(La Rioja. Septiembre 2007. Propuesta B. Ejercicio 4)

$$y = xe^{-x^2} \to y' = (1-2x^2)e^{-x^2}$$

$$y' = 0 \to 0 = (1-2x^2)e^{-x^2} \to x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La función alcanza un máximo en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y un mínimo en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$y = 0 \to 0 = xe^{-x^2} \to x = 0 \to$ La función corta al eje de abscisas en $x = 0$.

$$\text{Área} = \left|\int_{0}^{\sqrt{2}/2} xe^{-x^2}\,dx\right| = \left|\left[\frac{e^{-x^2}}{-2}\right]_{0}^{\sqrt{2}/2}\right| = \left|\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{-2} - \frac{1}{-2}\right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

108 **Calcula el área del recinto limitado por la curva:**

$$y = x - 2\,\mathrm{sen}\,x$$

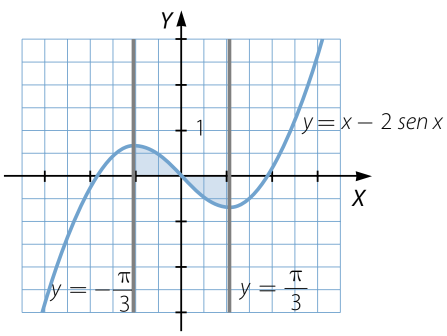
y las rectas: $y = 0 \qquad x = -\dfrac{\pi}{3} \qquad x = \dfrac{\pi}{3}$

Realiza un dibujo aproximado del recinto.

(Baleares. Junio 2007. Opción B. Cuestión 4)

La función es una función impar luego, el área es:

$$\text{Área} = 2\left|\int_{0}^{\pi/3} (x - 2\,\mathrm{sen}\,x)\,dx\right| = 2\left|\left[\frac{x^2}{2} + 2\cos x\right]_{0}^{\pi/3}\right| = 2\left|\frac{\pi^2}{18} - 1\right| = 2 - \frac{\pi^2}{9}$$



109 **Se sabe que cierta función $F(x)$ verifica las condiciones siguientes:**

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \qquad F(1) = 3$$

a) Calcula $F(x)$.

b) Calcula el área comprendida entre $F(x)$ y el eje X desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

(Cataluña. Junio 2008. Cuestión 1)

a) • $F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \rightarrow F(x) = \int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx = \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} + k$

• $F(1) = 3 \rightarrow \frac{4}{3} + k = 3 \rightarrow k = \frac{5}{3}$

Por tanto: $F(x) = \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} + \frac{5}{3}$

b) La función $F(x)$ es siempre positiva luego:

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 F(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 \left(\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} + \frac{5}{3}\right)dx\right| = \left|\left[\frac{16\sqrt[4]{x^7}}{21} + \frac{5x}{3}\right]_0^1\right| =$$

$$= \left|\frac{16}{21} + \frac{5}{3}\right| = \frac{17}{7}$$

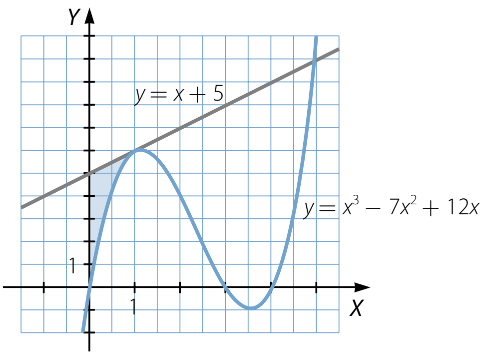
110 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 7x^2 + 12x$ en el punto de abscisa 1. Calcula el área del recinto limitado por esa recta, la curva y el eje Y.**

$y' = 3x^2 - 14x + 12 \rightarrow y'(1) = 1$ que es el valor de la pendiente $m = 1$.

$y(1) = 6 \rightarrow$ La recta pasa por el punto $(1, 6)$.

La recta tangente a la curva es:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 6 = 1(x - 1) \rightarrow y = x + 5$



$$\text{Área} = \left|\int_0^1 (x + 5 - x^3 + 7x^2 - 12x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 (-x^3 + 7x^2 - 11x + 5)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - \frac{11x^2}{2} + 5x\right]_0^1\right| = \frac{19}{12}$$

111 **Representa gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = 2x^3$, su recta tangente en el origen de coordenadas y la recta $x = 2$. Calcula su área.**

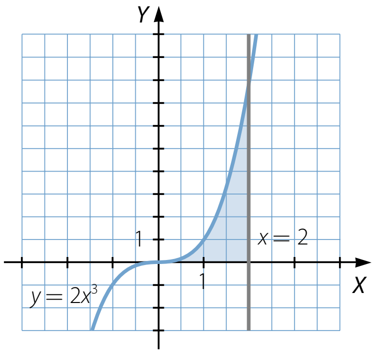
(Extremadura. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 2)

$y = 2x^3 \rightarrow y(0) = 0$

$y' = 6x \rightarrow y'(0) = 0$

La recta tangente en el origen es:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 0 = 0(x - 0) \rightarrow y = 0$



$$\text{Área} = \left| \int_0^2 2x^3\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{2} \right]_0^2 \right| = |8 - 0| = 8$$

112 **Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:**

$$y = x \qquad y = -x^2 + 4x$$

Hallamos los puntos de corte.

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ y = -x^2 + 4x \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array} \right.$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^3 (x + x^2 - 4x)\, dx \right| = \int_0^3 (x^2 - 3x)\, dx = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 \right| = \left| 9 - \frac{27}{2} \right| = \frac{9}{2}$$

113 **Hállese el área del recinto limitado por la parábola $y = -x^2$ y la recta $y = 2x - 3$.**

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba A. Cuestión 4)

Hallamos los puntos de corte.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 \\ y = 2x - 3 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-3}^1 (x^2 + 2x - 3) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right]_{-3}^1 \right| = \left| \frac{1}{3} + 1 - 3 - 9 - 9 + 9 \right| = \frac{32}{3}$$

114 **Determina el área del recinto limitado por la recta $y = 3 - 2x$ y la curva $y = 2x - x^2$.**

Calculamos los puntos de corte.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3 - 2x \\ y = 2x - x^2 \end{array} \right\} \rightarrow 2x - x^2 = 3 - 2x \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array} \right.$$

$$\text{Área} = \left|\int_1^3 (2x - x^2 - 3 + 2x)\,dx\right| = \left|\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3\right| = \left|-9 + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3\right| = \frac{4}{3}$$

115 **Hallar el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones:**

$$y = x^2 - 4 \qquad y = 3x - 6$$

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba B. Cuestión 4)

Calculamos los puntos de corte de las dos curvas.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4 \\ y = 3x - 6 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 4 = 3x - 6 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$$\text{Área} = \left|\int_1^2 (x^2 - 4 - 3x + 6)\,dx\right| = \left|\int_1^2 (x^2 - 3x + 2)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2\right| =$$

$$= \left|\frac{8}{3} - 6 + 4 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2\right| = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$$

116 **Calcula el área de la región del plano encerrada por las gráficas de las funciones:**

$$f(x) = 2x \qquad g(x) = 6 + 3x - x^2$$

(Navarra. Junio 2007. Grupo 2. Opción D)

Calculamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x \\ y = 6 + 3x - x^2 \end{array}\right\} \rightarrow 2x = 6 + 3x - x^2 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^3 (2x - 6 - 3x + x^2)\,dx\right| = \left|\int_{-2}^3 (x^2 - x - 6)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - 6x\right]_{-2}^3\right| = \left|-\frac{27}{2} - \frac{22}{3}\right| = \frac{125}{6}$$

117 **Halla el área del recinto limitado por las curvas:**

$$y = x^2 - 4x \qquad y = 6x - x^2$$

Calculamos los puntos de corte de las dos curvas.

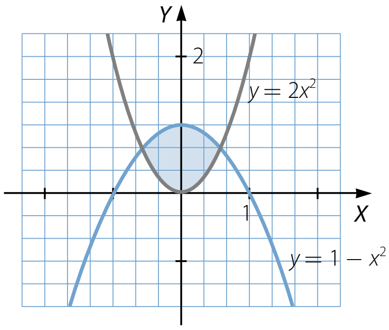
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x \\ y = 6x - x^2 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 4x = 6x - x^2 \rightarrow 2x^2 - 10x = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right.$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^5 (x^2 - 4x - 6x + x^2)\,dx\right| = \left|\int_0^5 (2x^2 - 10x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{2x^3}{3} - 5x^2\right]_0^5\right| =$$

$$= \left|-\frac{125}{3} - 0\right| = \frac{125}{3}$$

118 Representa gráficamente el recinto plano limitado por las parábolas $y = 1 - x^2$ e $y = 2x^2$ y calcula su área.

(Extremadura. Junio 2007. Opción A. Ejercicio 2)



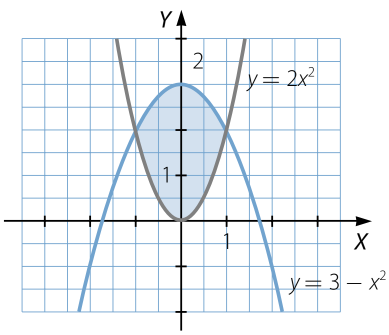
Calculamos los puntos de corte de las dos curvas.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ y = 2x^2 \end{array}\right\} \to 1 - x^2 = 2x^2 \to 3x^2 - 1 = 0 \to \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}/3} (2x^2 - 1 + x^2)\,dx\right| = \left|\int_{-\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}/3} (3x^2 - 1)\,dx\right| = \left|[x^3 - x]_{-\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}/3}\right| =$$
$$= \left|-\frac{2\sqrt{3}}{9} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right| = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

119 Esboza las gráficas de las parábolas $f(x) = 2x^2$ y $f(x) = -x^2 + 3$, sombreando el recinto cerrado que determinan. Calcula el área de dicho recinto.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2007. Bloque 2. Pregunta B)



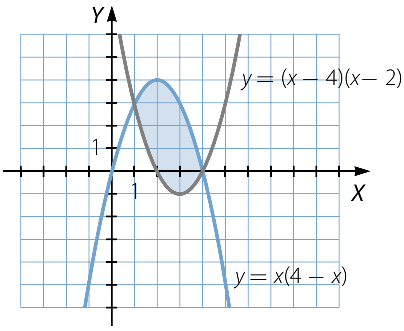
Calculamos los puntos de corte de las dos curvas.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x^2 \\ y = -x^2 + 3 \end{array}\right\} \to 2x^2 = -x^2 + 3 \to 3x^2 - 3 = 0 \to \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{1} (2x^2 + x^2 - 3)\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{1} (3x^2 - 3)\,dx\right| = \left|[x^3 - 3x]_{-1}^{1}\right| = |-2 - 2| = 4$$

120 Sea P_1 la parábola de ecuación $y = x(4 - x)$ y sea P_2 la parábola de ecuación $y = (x - 4)(x - 2)$. Dibujar un esquema gráfico del recinto finito del plano limitado por dichas parábolas. Hallar el área del recinto mediante cálculo integral.

(País Vasco. Junio 2007. Bloque D. Problema D)



Calculamos los puntos de corte de las dos curvas.

$$\left.\begin{array}{l} y = x(4-x) \\ y = (x-4)(x-2) \end{array}\right\} \rightarrow 4x - x^2 = x^2 - 6x + 8 \rightarrow -2x^2 + 10x - 8 = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

$$\text{Área} = \left|\int_1^4 (4x - x^2 - x^2 + 6x + 8)\,dx\right| = \left|\int_1^4 (-2x^2 + 10x - 8)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{-2x^3}{3} + 5x^2 - 8x\right]_1^4\right| = \left|\frac{16}{3} + \frac{11}{3}\right| = 9$$

121 Calcula el área de la región del plano encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = x$.

(Navarra. Junio 2006. Grupo 2. Opción D)

Calculamos los puntos de corte de las dos curvas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x \\ g(x) = x \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = g(x) \rightarrow x^3 - 3x = x \rightarrow x^3 - 4x = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^0 (x^3 - 3x - x)\,dx\right| + \left|\int_0^2 (x^3 - 3x - x)\,dx\right| = \left|\int_{-2}^0 (x^3 - 4x)\,dx\right| +$$

$$+ \left|\int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^0\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2\right| = |4| + |-4| = 8$$

122 Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, determina el área encerrada por las gráficas de ambas funciones entre las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

(Aragón. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 2)

Calculamos los puntos de corte de las dos gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = x^3 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = g(x) \rightarrow x^2 = x^3 \rightarrow x^3 - x^2 = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 (x^2 - x^3)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1\right| = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{12}$$

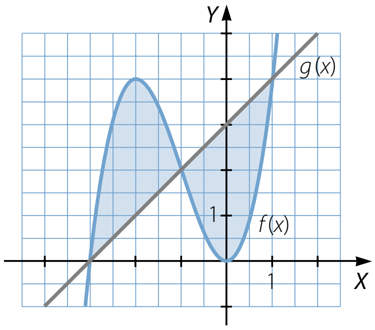
123 Sean $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante $f(x) = x^3 + 3x^2$ y $g(x) = x + 3$.

a) Esboza las gráficas de f y g calculando sus puntos de corte.

b) Calcula el área de cada uno de los dos recintos limitados entre las gráficas de f y g.

(Andalucía. Junio 2007. Opción A. Ejercicio 2)

a)



$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 + 3x^2 \\ g(x) = x + 3 \end{array}\right\} \to f(x) = g(x) \to x^3 + 3x^2 = x + 3$$

$$\to x^2(x+3) - (x+3) = 0 \to (x^2 - 1)(x+3) = 0 \to \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

b) $$\text{Área } 1 = \left| \int_{-3}^{-1} (x^3 + 3x^2 - x - 3)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x \right]_{-3}^{-1} \right| = \left| \frac{7}{4} + \frac{9}{4} \right| = 4$$

$$\text{Área } 2 = \left| \int_{-1}^{1} (x^3 + 3x^2 - x - 3)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x \right]_{-1}^{1} \right| =$$

$$= \left| -\frac{9}{4} - \frac{7}{4} \right| = |-4| = 4$$

124 **Calcula el área del recinto limitado por las curvas $y = x^3$ e $y = 2x - x^2$.**

Calculamos los puntos de corte de las dos curvas.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 \\ y = 2x - x^2 \end{array}\right\} \to x^3 = 2x - x^2 \to x^3 + x^2 - 2x = 0 \to \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^{0} (x^3 - 2x + x^2)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x^3 - 2x + x^2)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{0}^{1} \right| = \left| \frac{8}{3} \right| + \left| -\frac{5}{12} \right| = \frac{37}{12}$$

125 Halla los puntos en que se cortan las funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = 2x^2$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre sus gráficas.

(Navarra. Junio 2008. Grupo 1. Opción D)

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x \\ f(x) = 2x^2 \end{array}\right\} \rightarrow x^3 - 3x = 2x^2 \rightarrow x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - 3x - 2x^2)\, dx\right| + \left|\int_{0}^{3} (x^3 - 3x - 2x^2)\, dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right| = \left|\frac{7}{12}\right| + \left|-\frac{45}{4}\right| = \frac{71}{6}$$

126 **Dadas las curvas:**

$$y = (x-1)^3 \qquad\qquad y = 5 - x^2$$

calcular razonadamente:

a) Su punto de corte.

b) El área encerrada por ellas y el eje *Y*.

(C. Valenciana. Junio 2005. Ejercicio A. Problema 3)

a) Calculamos el punto de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = (x-1)^3 \\ y = 5 - x^2 \end{array}\right\} \rightarrow (x-1)^3 = 5 - x^2 \rightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$$
$$\rightarrow (x-2)(x^2+3) = 0 \rightarrow x = 2$$

b) El eje *Y* es la recta $x = 0$.

$$\text{Área} = \left|\int_{0}^{2} \left((x-1)^3 - (5 - x^2)\right) dx\right| = \left|\int_{0}^{2} (x^3 - 2x^2 + 3x - 6) dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 6x\right]_{0}^{2}\right| = \left|-\frac{22}{3}\right| = \frac{22}{3}$$

127 **Calcula el área de la región limitada por las curvas:**

$$y = x^5 + x^2 + 1 \qquad\qquad y = x^5 - x + 1$$

(Baleares. Junio 2006. Opción B. Cuestión 3)

Hallamos los puntos de corte de las dos curvas

$$\left.\begin{array}{l} y = x^5 + x^2 + 1 \\ y = x^5 - x + 1 \end{array}\right\} \rightarrow x^5 + x^2 + 1 = x^5 - x + 1 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} (x^5 + x^2 + 1 - x^5 + x - 1)\, dx\right| = \left|\int_{-1}^{0} (x^2 + x)\, dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$$

128 Halla el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$, el eje Y y la recta $y = 4$.

Calculamos los puntos de corte de la función $f(x) = \sqrt{x}$ y la recta $y = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \\ y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{x} = 4 \rightarrow x = 16$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^{16} (\sqrt{x} - 4)\,dx \right| = \left| \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 4x \right]_0^{16} \right| = \left| \frac{128}{3} - 64 \right| = \left| -\frac{64}{3} \right| = \frac{64}{3}$$

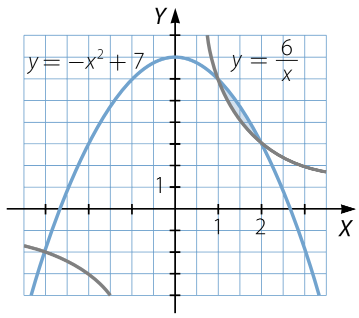
129 Determina el área del recinto que forman al cortarse las curvas:

$$y = \frac{6}{x} \qquad\qquad y = -x^2 + 7$$

Calculamos los puntos de corte de ambas curvas.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{6}{x} \\ y = -x^2 + 7 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{6}{x} = -x^2 + 7 \rightarrow 6 = -x^3 + 7x \rightarrow x^3 - 7x + 6 = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Como la función $y = \dfrac{6}{x}$ presenta una discontinuidad en el cero, el único recinto que forman las dos curvas está entre $x = 1$ y $x = 2$.



$$\text{Área} = \left| \int_1^2 \left(\frac{6}{x} + x^2 - 7 \right) dx \right| = \left| \left[6\ln|x| + \frac{x^3}{3} - 7x \right]_1^2 \right| =$$

$$= \left| 6\ln 2 + \frac{8}{3} - 14 - \frac{1}{3} + 7 \right| = \left| 6\ln 2 - \frac{14}{3} \right| = \frac{14}{3} - 6\ln 2$$

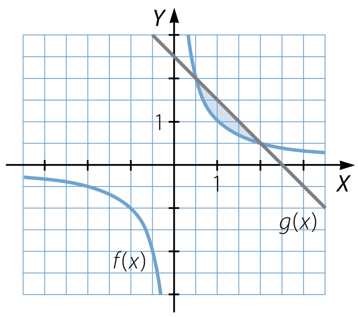
130 Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = -x + \dfrac{5}{2}$, se pide:

a) Esboza sus gráficas y sombrea el recinto encerrado entre ellas.

b) Calcula el área de dicho recinto.

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 2. Pregunta B)

a)



b) Hallamos los puntos de corte.

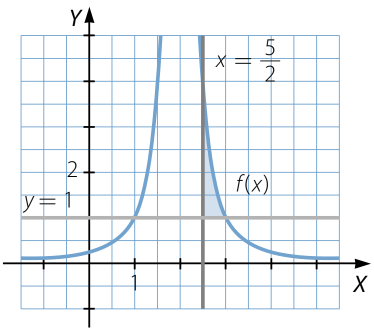
$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{x} \\ y=-x+\dfrac{5}{2} \end{array}\right\} \to \frac{1}{x}=-x+\frac{5}{2} \to 1=-x^2+\frac{5}{2}x \to 2x^2-5x+2=0 \to \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ x=2 \end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_{1/2}^{2}\left(\frac{1}{x}+x-\frac{5}{2}\right)dx\right|=\left|\left[\ln|x|+\frac{x^2}{2}-\frac{5x}{2}\right]_{1/2}^{2}\right|=$$

$$=\left|\ln 2+2-5-\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{5}{4}\right|=\left|-\frac{15}{8}+2\ln 2\right|=\frac{15}{8}-2\ln 2$$

131 **Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ y las rectas $y=1$, $x=\dfrac{5}{2}$.**

(Madrid. Junio 2006. Opción B. Ejercicio 4)



Hallamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{(x-2)^2} \\ y=1 \end{array}\right\} \to \frac{1}{(x-2)^2}=1 \to (x-2)^2=1 \to \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

El recinto está situado entre las abscisas $x=\dfrac{5}{2}$ y $x=3$.

$$\text{Área}=\left|\int_{5/2}^{3}\left(\frac{1}{(x-2)^2}-1\right)dx\right|=\left|\left[\left(-\frac{1}{x-2}-x\right)\right]_{5/2}^{3}\right|=\left|-4+\frac{9}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

132 **Hallar el área de la región acotada comprendida entre las gráficas de las funciones $y=\dfrac{1}{x^2+4}$, $y=\dfrac{x}{16}$, y el eje Y.**

(Canarias. Junio 2007. Opción A. Cuestión 2)

Hallamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x^2+4} \\ y = \dfrac{x}{16} \end{array}\right\} \to \frac{1}{x^2+4} = \frac{x}{16} \to x^3 + 4x - 16 = 0$$
$$\to (x-2)(x^2+2x+8) = 0 \to x = 2$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^2 \left(\frac{1}{x^2+4} - \frac{x}{16} \right) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{2} \text{Arctg} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{32} \right]_0^2 \right| = \left| \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8} \right| = \frac{1}{8}(\pi - 1)$$

133 **Halla el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = -1$.**

Hallamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = e^x \\ y = e^{-x} \end{array}\right\} \to e^x = e^{-x} \to e^{2x} = 1 \to x = 0$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^0 e^x dx \right| + \left| \int_0^1 e^{-x} dx \right| = \left| [e^x]_{-1}^0 \right| + \left| [-e^{-x}]_0^1 \right| = \left| 1 - \frac{1}{e} \right| + \left| -\frac{1}{e} + 1 \right| = 2 - \frac{2}{e}$$

134 **Calcular el área encerrada por las funciones $f(x) = 1 + \ln x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.**

(Murcia. Junio 2008. Bloque 4. Cuestión B)

Calculamos los puntos de corte por si alguno estuviera entre $x = 1$ y $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 + \ln x \\ y = \dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \to 1 + \ln x = \frac{1}{x} \to x = 1$$

$$\text{Área} = \left| \int_1^2 \left(1 + \ln x - \frac{1}{x} \right) dx \right| = \left| [-\ln x + x \ln x]_1^2 \right| = \left| -\ln 2 + 2\ln 2 \right| = \ln 2$$

135 **Sea la función $f(x) = 1 - x^2$.**

a) Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área.

b) La gráfica de la función $g(x) = x^2$ divide D en tres partes D_1, D_2 y D_3. Haz un dibujo de los tres recintos.

c) Calcula el área del recinto D_2 que contiene al punto $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

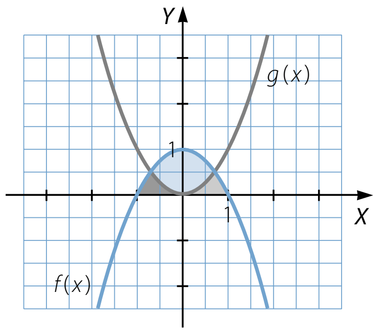
(Asturias. Septiembre 2007. Bloque 6)

a) Hallamos los puntos de corte de la función $f(x) = 1 - x^2$ con el eje X.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \to 1 - x^2 = 0 \to \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^1 (1 - x^2)\, dx \right| = \left| \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \right| = \left| 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

b)



c) Hallamos los puntos de corte de ambas curvas.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \to 1 - x^2 = x^2 \to 2x^2 = 1 \to \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} (1 - x^2 - x^2)\,dx \right| = \left| \left[x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \right| =$$

$$= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

136 **Calcula el valor de m para que el área del recinto limitado por la recta $y = mx$ y la curva $y = x^3$ sea 2 unidades cuadradas.**

(Galicia. Junio 2006. Bloque 3. Opción 2)

Hallamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = mx \\ y = x^3 \end{array}\right\} \to mx = x^3 \to x^3 - mx = 0 \to x(x^2 - m) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases}$$

Para que se forme un recinto deben cortarse en más de un punto luego, $m > 0$.

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{m}}^{0} (x^3 - mx)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{\sqrt{m}} (x^3 - mx)\,dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{mx^2}{2} \right]_{-\sqrt{m}}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{mx^2}{2} \right]_{0}^{\sqrt{m}} \right| =$$

$$= \left| \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} \right| + \left| \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} \right| = \frac{m^2}{2}$$

$$\frac{m^2}{2} = 2 \to m^2 = 4 \to m = 2$$

137 La curva $y = x^2 - 2x + 1$ y la recta que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(3, 4)$ limitan un recinto finito en el plano.

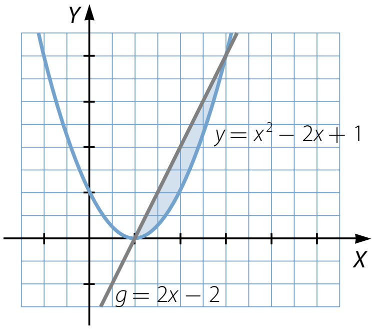
a) Traza un esquema gráfico de dicho recinto.

b) Halla su área.

(Asturias. Septiembre 2006. Bloque 6)

a) La recta que pasa por estos dos puntos es:

$$\frac{y-0}{4} = \frac{x-1}{2} \rightarrow y = 2x - 2$$



b) $$\text{Área} = \left| \int_1^3 (x^2 - 2x + 1 - 2x + 2)\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^3 \right| = \left| 0 - \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

138 El área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = \dfrac{x^2}{a}$ e $y = \sqrt{ax}$, con $a > 0$, es 3. Calcula el valor de a.

(Andalucía. Junio 2006. Opción B. Ejercicio 2)

Hallamos los puntos de corte.

$$\left. \begin{array}{l} y = \dfrac{x^2}{a} \\ y = \sqrt{ax} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x^2}{a} = \sqrt{ax} \rightarrow \frac{x^4}{a^2} = ax \rightarrow x^4 - a^3x = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array} \right.$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^a \left(\frac{x^2}{a} - \sqrt{ax} \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3a} - \frac{2}{3}\sqrt{ax^3} \right]_0^a \right| =$$

$$= \left| \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} \right| = \frac{a^2}{3}$$

$$3 = \frac{a^2}{3} \rightarrow a = 3$$

139 La curva $y = x^3$, su recta tangente en el punto $x = 2$ y el eje X limitan en el primer cuadrante un recinto finito del plano. Dibujar un esquema gráfico de dicho recinto y calcular su área.

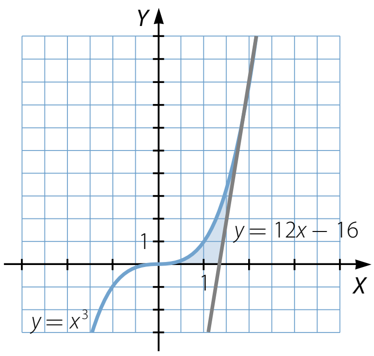
(País Vasco. Junio 2006. Bloque D. Problema D)

$y' = 3x^2 \rightarrow y'(2) = 12$

$y(2) = 8$

La recta tangente es:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 8 = 12(x - 2) \rightarrow y = 12x - 16$



$$\text{Área} = \left|\int_0^{4/3} x^3\,dx\right| + \left|\int_{4/3}^{2} (x^3 - 12x + 16)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{4/3}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 6x^2 + 16x\right]_{4/3}^{2}\right| = \left|\frac{64}{81}\right| + \left|\frac{44}{81}\right| = \frac{4}{3}$$

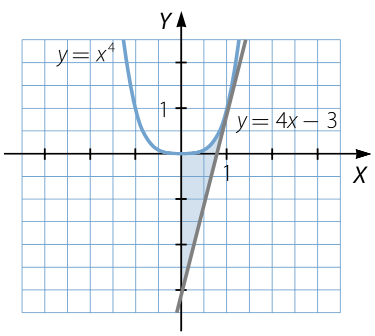
140 Representa gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = x^4$, su recta tangente en el punto (1, 1) y el eje Y. Calcula su área.

(Extremadura. Junio 2006. Repertorio A. Ejercicio 2)

$y' = 4x^3 \rightarrow y'(1) = 4$

La recta tangente en el punto es:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 1 = 4(x - 1) \rightarrow y = 4x - 3$



$$\text{Área} = \left|\int_0^1 (x^4 - 4x + 3)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^5}{5} - 2x^2 + 3x\right]_0^1\right| = \left|\frac{1}{5} - 2 + 3\right| = \frac{6}{5}$$

141 La parábola $y = 4 - x^2$, su recta tangente en el punto $x = 1$ y el eje Y limitan un recinto finito del plano. Dibujar un esquema de dicho recinto y hallar su área mediante el cálculo integral.

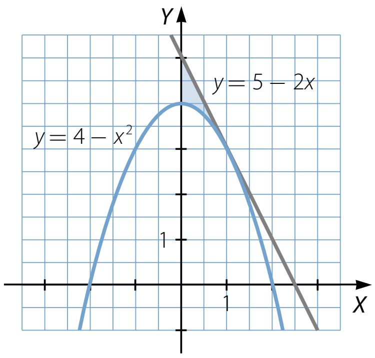
(País Vasco. Julio 2007. Bloque D. Problema D)

$y(1) = 3$

$y' = -2x \rightarrow y'(1) = -2$

La recta tangente en el punto es:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 3 = -2(x - 1) \rightarrow y = -2x + 5$



$$\text{Área} = \left| \int_0^1 (4 - x^2 + 2x - 5)\, dx \right| = \left| \int_0^1 (-x^2 + 2x - 1)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 - x \right]_0^1 \right| = \left| -\frac{1}{3} + 1 - 1 \right| = \frac{1}{3}$$

142 Calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 + 4$ y sus tangentes en los puntos $x = -1$ y $x = 1$.

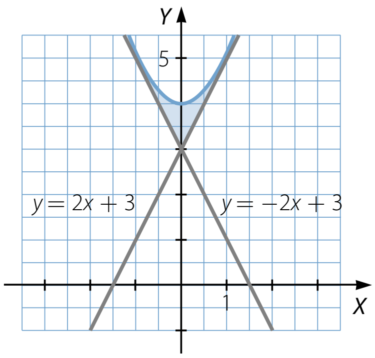
$y(1) = 5 \qquad y(-1) = 5$

$$y' = 2x \rightarrow \begin{cases} y'(-1) = -2 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$$

Las rectas tangentes son:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 5 = -2(x + 1) \rightarrow y = -2x + 3$

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 5 = 2(x - 1) \rightarrow y = 2x + 3$



$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} (x^2+4+2x-3)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^2+4-2x-3)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{0}^{1}\right| = \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

143 a) Halla el área delimitada por $g(x) = x+2$ y $h(x) = 4-x^2$.

b) Da otra expresión $p(x)$ tal que el área comprendida entre la gráfica de $y = p(x)$ y el eje X, entre los valores $x = -1$ y $x = 1$, coincida con el área que has calculado en el apartado anterior. Justifica la respuesta.

(Cantabria. Junio 2005. Bloque 1. Opción A)

a) Hallamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y = x+2 \\ y = 4-x^2 \end{array}\right\} \rightarrow x+2 = 4-x^2 \rightarrow x^2+x-2=0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^{1} (x+2-4+x^2)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{2}-2x+\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}-2-4+\frac{8}{3}\right| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}$$

b) Basta tomar una recta paralela al eje X, $y = a$, de tal forma que:

$$a \cdot 2 = \frac{9}{2} \rightarrow a = \frac{9}{4} \qquad p(x) = \frac{9}{4}$$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Sea $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{-2x}$.

a) Justifica que la recta de ecuación $y = -2ex$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -\dfrac{1}{2}$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.

(Andalucía. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 2)

a) $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = e$, $y' = -2e^{-2x} \rightarrow y'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2e$

La recta tangente en el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, e\right)$ es:

$$y - y_0 = m(x-x_0) \rightarrow y - e = -2e\left(x+\frac{1}{2}\right) \rightarrow y = -2ex$$

b) La recta tangente y la curva se cortan en el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, e\right)$.

$$\text{Área} = \left|\int_{-1/2}^{0} (e^{-2x}+2ex)\,dx\right| = \left|\left[-\frac{e^{-2x}}{2}+ex^2\right]_{-1/2}^{0}\right| = \left|-\frac{1}{2}+\frac{e}{2}-\frac{e}{4}\right| = \frac{e-2}{4}$$

2 Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 2$:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

b) Calcular el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado a) y el eje Y.

(Canarias. Junio 2007. Opción B. Cuestión 1)

a) $f(3) = 5 \qquad f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(3) = 4$

La recta tangente en el punto de abscisa $x = 3$ es:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 5 = 4(x - 3) \rightarrow y = 4x - 7$

b) $$\text{Área} = \left|\int_0^3 (x^2 - 2x + 2 - 4x + 7)\,dx\right| = \left|\int_0^3 (x^2 - 6x + 9)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_0^3\right| = |9 - 27 + 27| = 9$$

3 a) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada entre la gráfica de la función $f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

b) Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado a) es mínima.

(Madrid. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 2)

a) $$\text{Área} = \left|\int_0^1 \left(cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1\right)dx\right| = \left|\left[\frac{cx^5}{5} + \frac{x^3}{3c} + x\right]_0^1\right| =$$

$$= \left|\frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1\right| = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$$

b) Queremos minimizar la función $g(c) = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$

$$g'(c) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3c^2} \rightarrow g'(c) = 0 \rightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{3c^2} = 0 \rightarrow 3c^2 = 5 \rightarrow c = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

4 Razonar si para $F(x) = \dfrac{\int_0^{x^2} t^2\,dt}{x^4}$ se satisface que $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = \lim\limits_{x \to 0} F'(x)$.

(Aragón. Septiembre 2008. Bloque 3. Opción B)

$$\int_0^{x^2} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{x^2} = \frac{x^6}{3} \rightarrow F(x) = \frac{x^6}{3x^4} = \frac{x^2}{3}$$

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{3} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} F'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3} = 0$$

5 Dada la función $f(t) = at + b$ (con a y b constantes reales), se define $F(x) = x\int_1^{x+1} f(t)\,dt$. Se pide obtener razonadamente:

a) La integral $\int_1^{x+1} f(t)\,dt$.

b) La expresión de la derivada de $F'(x)$ de la función $F(x)$.

c) La relación entre los valores a y b para la que se verifica: $F''(0) = 0$

(C. Valenciana. Septiembre 2008. Bloque 3. Problema 1)

a) $$\int_1^{x+1} f(t)\,dt = \int_1^{x+1} (at+b)\,dt = \left[\frac{at^2}{2} + bt\right]_1^{x+1} =$$
$$= \frac{a(x+1)^2}{2} + b(x+1) - \frac{a}{2} - b = \frac{a(x^2+2x)}{2} + bx$$

b) $$F(x) = x\left(\frac{a(x^2+2x)}{2} + bx\right) =$$
$$= \frac{a}{2}(x^3+2x^2) + bx^2 \rightarrow F'(x) = \frac{a}{2}(3x^2+4x) + 2bx$$

c) $$F''(x) = \frac{a}{2}(6x+4) + 2b \rightarrow F''(0) = 2a + 2b$$
$$0 = 2a + 2b \rightarrow a = -b$$

6 Sea R el rectángulo del plano con vértices en los puntos $V_1\,(0, 0)$, $V_2\,(3, 0)$, $V_3\,(3, 9)$ y $V_4\,(0, 9)$. Demostrar que para todo valor de A la curva de ecuación $y = Ax^2 + (3 - 3A)x$ pasa por los vértices V_1 y V_3 y divide al rectángulo en dos regiones.

Calcular el área de dichas regiones y encontrar el valor de A para que la región situada por encima de la curva tenga un área doble que la situada por debajo de la curva.

(País Vasco. Junio 2008. Bloque D. Problema D)

$y = Ax^2 + (3 - 3A)x$

$y(0) = 0 \rightarrow$ La curva pasa por el vértice V_1.

$y(3) = 9A + (3 - 3A)\cdot 3 = 9 \rightarrow$ La curva pasa por el vértice V_3.

El área del rectángulo es: $b \cdot h = 3 \cdot 9 = 27$

El área de la parte del rectángulo que queda bajo la curva es:

$$\text{Área} = \left|\int_0^3 (Ax^2 + (3-3A)x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{(3-3A)x^2}{2}\right]_0^3\right| = \left|9A - \frac{27(1-A)}{2}\right| =$$
$$= \left|\frac{45}{2}A - \frac{27}{2}\right| = \begin{cases} \dfrac{27}{2} - \dfrac{45}{2}A & \text{si } A \le \dfrac{3}{5} \\[2ex] \dfrac{45}{2}A - \dfrac{27}{2} & \text{si } A > \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

El área de la parte del rectángulo que queda sobre la curva es:

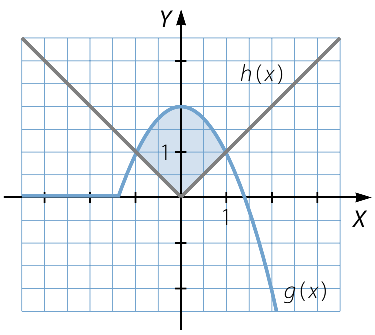
$$\text{Área} = 27 - \left|\frac{45}{2}A - \frac{27}{2}\right| = \begin{cases} \dfrac{27}{2} + \dfrac{45}{2}A & \text{si } A \le \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{81}{2} - \dfrac{45}{2}A & \text{si } A > \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Para que la región situada por encima de la curva tenga un área doble que la que está por debajo:

$$3 \cdot \left|\frac{45}{2}A - \frac{27}{2}\right| = 27 \to \left|\frac{45}{2}A - \frac{27}{2}\right| = 9 \to \begin{cases} \dfrac{27}{2} - \dfrac{45}{2}A - 9 = 0 \to A = \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{45}{2}A - \dfrac{27}{2} - 9 = 0 \to A = 1 \end{cases}$$

7 Dada la función $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le -\sqrt{2} \\ -x^2 + 2 & \text{si } x > -\sqrt{2} \end{cases}$, calcula el área de la región del plano limitada por las gráficas de $g(x)$ y $h(x) = |x|$.

(Galicia. Septiembre 2007. Bloque 3. Opción 2)



Hallamos los puntos de corte.

$$-x^2 + 2 = |x| \to \begin{cases} -x^2 + 2 = -x \to x^2 - x - 2 = 0 \to x = -1 \\ -x^2 + 2 = x \to x^2 + x - 2 = 0 \to x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} (-x^2 + 2 + x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (-x^2 + 2 - x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[-\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right| = \left|\frac{7}{6}\right| + \left|\frac{7}{6}\right| = \frac{7}{3}$$

8 En un plano, el trazado de una carretera discurre según la ecuación $y = \dfrac{x^2}{4} - x$, siendo un río el eje X. En el terreno entre el río y la carretera hay un pinar. Si expresamos las distancias en kilómetros, ¿cuánto vale el pinar si la hectárea se paga a 60 €?

(C. Valenciana. Junio 2004. Ejercicio A. Problema 4)

Hallamos el corte de la carretera con el río.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2}{4} - x \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x^2}{4} - x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

El área del pinar en km^2 es:

$$\text{Área} = \left| \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} - x \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 \right| = \left| \frac{16}{3} - 8 \right| = \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3} \text{ km}^2$$

El precio del pinar es:

$$\frac{8}{3} \cdot 100 \cdot 60 = 16.000 \text{ €}$$