UNIDAD 7: GEOMETRÍA DEL ESPACIO

ÍNDICE DE LA UNIDAD

1.- INTRODUCCIÓN.

El bloque que ahora comenzamos es el correspondiente a ***Geometría****, aunque en realidad corresponde a una pequeñísima parte de la geometría: la Geometría analítica del espacio tridimensional. La Geometría constituye, sin duda, una de las ramas más importantes de las Matemáticas y han estado presentes, de una forma u otra, desde la existencia del ser humano.*

Uno de los principales creadores de lo que hoy conocemos como Geometría y quizás el más importante de la historia fue ***Euclides*** *de Alejandría (330 – 275 a.C.) que estudió Matemáticas, Música, Óptica,… aunque su obra más importante la forman 13 pequeños libros con un total de 465 proposiciones llamados "Los Elementos de Euclides" y que han sido los pilares básicos de la Geometría durante siglos. Posteriormente, con el paso de los siglos, la Geometría se ha ido desarrollando, estudiándose desde las*

Geometrías no euclídeas, *hasta la moderna* ***Geometría fractal,*** *pasando, entre otras por la* ***Geometría esférica.***

Centrándonos en la ***Geometría Analítica*** *que nos ocupa, fueron los matemáticos franceses* ***Pierre de Fermat*** *(1601-1665) y sobre todo* ***René Descartes*** *(1596-1650) los que crearon esta nueva disciplina matemática, también denominada geometría con coordenadas, cuya idea central fue asociar ecuaciones algebraicas a las curvas y superficies. De esta manera, consiguieron unir los elementos geométricos con los números a través de los sistemas de referencia. Esta creación surgió dentro de la búsqueda de métodos generales para el estudio de curvas junto con las nuevas aportaciones del Álgebra. Lo que haremos es identificar los conceptos geométricos (puntos, rectas, planos, etc) con números o ecuaciones de modo que, por ejemplo, estudiar dónde se cortan dos rectas se convierte en estudiar un sistema de ecuaciones. Abordaremos en la unidad problemas del espacio relativos a incidencia, intersección y paralelismo de figuras, rectas o planos.*

2.- ESPACIOS VECTORIALES. EL ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^3$.

Definición 1: Sea V un conjunto y K un cuerpo numérico. Sea $"+"$ una operación interna entre elementos de V y $"\cdot"$ una operación externa entre elementos de V y de K. Decimos que $(V,+,\cdot)$ es un **espacio vectorial** sobre K si se verifican las siguientes propiedades:

a) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u} \quad \forall\, \vec{u},\vec{v}\in V$ (Conmutativa de la suma)
b) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right) \quad \forall\, \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$ (Asociativa de la suma)
c) $\exists \vec{0}\in V / \vec{u}+\vec{0}=\vec{u} \quad \forall \vec{u}\in V$ (Elemento neutro de la suma)
d) $\forall \vec{u}\in V,\ \exists -\vec{u}\in V\ /\ \vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{0}$ (Elemento simétrico de la suma)
e) $\alpha\cdot\left(\beta\cdot\vec{u}\right)=\left(\alpha\cdot\beta\right)\cdot\vec{u} \quad \forall\alpha,\beta\in K\ \forall\vec{u}\in V$ (Asociativa del producto por escalar)
f) $\alpha\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\alpha\cdot\vec{u}+\alpha\cdot\vec{v} \quad \forall\alpha\in K,\ \forall\vec{u},\vec{v}\in V$ (Distributiva resp. a la suma de vectores)
g) $\left(\alpha+\beta\right)\cdot\vec{u}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{u} \quad \forall\alpha,\beta\in K,\ \forall\vec{u}\in V$ (Distributiva resp. a la suma de escalares)
h) $\exists 1\in K\ /\ 1\cdot\vec{u}=\vec{u} \quad \forall\vec{u}\in V$ (Elemento neutro del producto por escalar)

A los elementos de V se les llama **vectores** y a los del cuerpo numérico K, **escalares.**

Ejemplo 1: Es inmediato comprobar que el conjunto de matrices de la misma dimensión es un espacio vectorial con la suma y el producto escalar usuales.

Ejemplo 2: Es también fácil comprobar que el conjunto $\mathbb{R}^3=\left\{(x,y,z)\ /\ x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$ con las operaciones siguientes es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$:

- Suma: $\left(x_1,y_1,z_1\right)+\left(x_2,y_2,z_2\right)=\left(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\right)$
- Producto por escalar: $\alpha\left(x,y,z\right)=\left(\alpha x,\alpha y,\alpha z\right)$

Definición 2: En lo que sigue, para abreviar, hablaremos del espacio vectorial V, sin poner las operaciones. Además, a partir del punto 4 de la unidad trabajaremos normalmente con el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

3.- DEPENDENCIA LINEAL. BASE Y DIMENSIÓN

Definición 3: Sea V un espacio vectorial y sean $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ...\overrightarrow{u_k} \in V$ un conjunto de vectores. Llamamos **combinación lineal** de ellos a toda expresión de la forma: $\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + ... + \alpha_k\overrightarrow{u_k}$. Si un vector $\vec{u}$ se puede expresar como combinación lineal de otro de la forma: $\vec{u} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + ... + \alpha_k\overrightarrow{u_k}$ diremos que $\vec{u}$ es combinación lineal del conjunto de vectores.

Ejemplo 3: El vector $(2,1,-5) \in \mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores $(1,0,3)$, $(0,3,-1)$ *y* $(0,8,8)$ ya que $(2,1,-5) = 2(1,0,3) + 3(0,3,-1) - (0,8,8)$

Definición 4: Un conjunto de vectores $\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ...\overrightarrow{u_k}\right\}$ de un espacio vectorial se llama **sistema generador**, si cualquier vector del espacio vectorial se puede poner como combinación lineal de este conjunto de vectores.

Definición 5: Un conjunto de vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ...\overrightarrow{u_k}$ de un espacio vectorial se dice que es:

- **Linealmente independientes** si $\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + ... + \alpha_k\overrightarrow{u_k} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_k = 0$
- **Linealmente dependientes** en caso contrario.

Nota 1: Un conjunto de vectores son linealmente dependientes $\Leftrightarrow$ Alguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los demás.

Definición 6: Llamamos **base** de un espacio vectorial V a todo conjunto de vectores que sean sistema generador y linealmente independientes.

Proposición 1: Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.

Definición 7: Llamamos **dimensión** de un espacio vectorial al número de vectores de cualquier base. Se escribe: $\dim(V)$.

Nota 2: Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Dado cualquier vector $\vec{u} \in V$, y una base $B = \left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ... \overrightarrow{u_n}\right\}$, por ser sistema generador, existen siempre n escalares $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n \in K$ tales que: $\vec{u} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$. Además, por ser linealmente independientes los vectores de la base, se cumple que estos escalares son únicos.

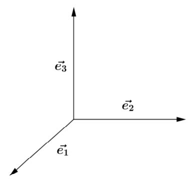
Definición 8: Dado un vector $\vec{u} \in V$, y una base $B = \left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ... \overrightarrow{u_n}\right\}$ llamamos **coordenadas** del vector $\vec{u}$ respecto de la base B a los únicos escalares $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \in K$ tales que: $\vec{u} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$. Se escribe abreviadamente que: $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)_B$.

Proposición 2: Dado un conjunto de vectores de un espacio vectorial V, el número de vectores linealmente independiente de ellos es el rango de la matriz cuyas filas (o columnas) son las coordenadas de los vectores respecto a una base cualquiera de V.

Nota 3: A partir de lo anterior, es evidente que:

- Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ son base $\Leftrightarrow$ El determinante de la matriz que forman sus coordenadas respecto de una base es no nulo.
- El número máximo de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ es tres.
- Todo sistema generador contiene al menos tres vectores.

Ejemplo 4: Es evidente que el conjunto $B_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, llamada **base canónica**, que además, será la base que utilizaremos regularmente. Sus tres vectores suelen representarse por $B_c = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ *o bien* $B_c = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$



Ejemplo 5: Veamos si son l.i. o l.d. los vectores: $(1, 2, 1)$, $(3, 0, 1)$, $(1, 1, -1)$. Para ello, basta ver el rango de la matriz que forman sus coordenadas, cosa que vemos con el determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2+3+6-1 = 10 \neq 0$. Así pues son linealmente independientes, de hecho son una base de $\mathbb{R}^3$.

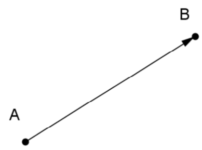
Ejemplo 6: Estudiemos, en función del parámetro a, la dependencia lineal de los siguientes vectores: $\vec{u} = (a, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, a, 1)$ *y* $\vec{w} = (-1, 0, 1)$. Vemos su rango:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1 \rightarrow \begin{cases} \text{Si } a \neq 1 \text{ } y \text{ } a \neq -1 \rightarrow \text{Son l.i y forman una base} \\ \text{Si } a = -1 \text{ } o \text{ } a = 1 \rightarrow \text{Son l.d.} \end{cases}$$

Se proponen las **Actividades de la 1 a la 5.**

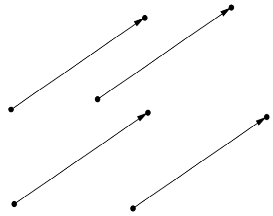
4.- VECTORES EN EL ESPACIO. OPERACIONES

Definición 9: Se llama **vector fijo** del espacio al segmento orientado que va desde un punto fijo *A* (llamado **origen** del vector) a otro punto fijo *B* (llamado **extremo** del vector), se representa por $\overrightarrow{AB}$. Se llama:



- **Módulo** del vector a la longitud del segmento $\overline{AB}$. Se designa por $|\overrightarrow{AB}|$.
- **Dirección** del vector a la dirección de la recta que pasa por A y B.
- **Sentido** del vector al sentido de recorrido desde A hacia B.

Nota 4: El vector fijo $\overrightarrow{AB}$ recibe ese nombre porque puede ser considerado como un vector del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas sean: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, siendo $A(x_1, y_1, z_1)$ *y* $B(x_2, y_2, z_2)$.



Definición 10: Dos vectores $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{CD}$ se llaman **equipolentes** si tiene igual módulo, dirección y sentido. Se representa $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$.
Al conjunto de todos los vectores equipolentes a uno fijo $\overrightarrow{AB}$ se le llama **clase de equipolencia** de $\overrightarrow{AB}$ y se representa por $\vec{v} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$

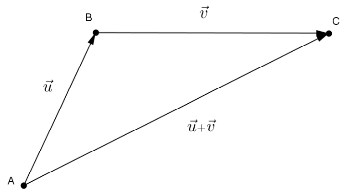
Nota 5: En los vectores equipolentes, sus coordenadas son iguales.

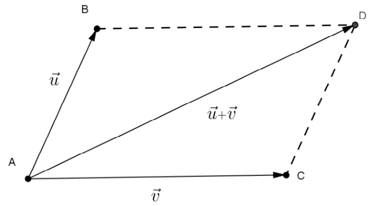
Definición 11: Se llama **vector libre** del espacio $\mathbb{R}^3$ a cada una de las clases de equipolencia de la definición anterior que pueden formarse.

Nota 6: Obsérvese que el **vector nulo** $\vec{0}$ sería el vector libre de representante $\left[\overrightarrow{AA}\right]$ siendo A cualquier punto del espacio.

Nota 7: En un vector libre no hay origen ni extremo ya que no está situado en ningún sitio concreto del espacio. El módulo, dirección y sentido será el de uno cualquiera de sus representantes, ya que coincide en todos. Además, dado cualquier punto fijo, cualquier vector libre del espacio tiene un único representante con origen en dicho punto y, por tanto, determina un único extremo del espacio.

Ejemplo 7: Si consideramos los puntos: $A(1,0,-3)$, $B(-1,2,5)$, $C(3,1,2)$ *y* $D(1,3,10)$. Entonces, $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes y definen, por tanto el mismo vector libre, ya que: $\overrightarrow{AB} = (-2,2,8)$ *y* $\overrightarrow{CD} = (-2,2,8)$





Definición 12: **(suma de vectores)** Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores libres de $\mathbb{R}^3$, y sea $\overrightarrow{AB}$ un representante de $\vec{u}$. Consideremos el único representante de $\vec{v}$ con origen en B, es decir $\vec{u} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$, $\vec{v} = \left[\overrightarrow{BC}\right]$. Se define el **vector libre suma** $\vec{u}+\vec{v}$ como el vector libre del espacio de representante el vector fijo $\left[\overrightarrow{AC}\right]$, es decir $\vec{u}+\vec{v} = \left[\overrightarrow{AC}\right]$. A la derecha vemos dos formas de interpretarlo gráficamente:

Definición 13: **(Producto por escalar de vectores)** Sea $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ un vector libre del espacio tridimensional y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un escalar. Se define el **vector libre producto por escalar** $\lambda \cdot \vec{u}$ como el vector libre tal que:

- $\left|\lambda \cdot \vec{u}\right| = |\lambda| \cdot \left|\vec{u}\right|$
- La dirección de $\lambda \cdot \vec{u}$ coincide con la de $\vec{u}$.
- El sentido de $\lambda \cdot \vec{u}$ coincide con el de $\vec{u}$ si $\lambda > 0$ y es contrario al de $\vec{u}$ si $\lambda < 0$.

Nota 8: A partir de lo visto anteriormente, si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *y* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces:

a) $\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1\,,\, u_2+v_2\,,\, u_3+v_3)$ b) $\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$

Proposición 3: El conjunto de vectores libres V_3 del espacio tiene estructura de espacio vectorial con la suma y el producto definidos anteriormente.

Nota 9: **(Propiedades del espacio vectorial V_3).** El espacio vectorial V_3 verifica las siguientes propiedades:

- Tres vectores coplanarios son linealmente dependientes.
- Tres vectores no coplanarios forman una base.

Proposición 4: (Expresión analítica del módulo) Sea $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in V_3$. Entonces su módulo viene determinado por: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Definición 14: Un vector se llama unitario si su módulo es 1

Definición 15: **Normalizar** un vector es determinar otro unitario de la misma dirección.

Ejemplo 8: El proceso de normalizar es muy sencillo. Veamos esto con un ejemplo. Normalicemos el vector $\vec{u} = (-1, 2, 0)$. Es evidente que este vector no es unitario ya que su módulo es $|\vec{u}| = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$. Pero si consideramos el vector $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{u} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$ es claramente un vector unitario, ya que su módulo es $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5} + 0} = \sqrt{1} = 1$.

Definición 16: Una base del espacio vectorial V_3 se llama:

- **Ortogonal** si sus vectores son perpendiculares entre sí dos a dos.
- **Ortonormal** si es ortogonal y además sus vectores son todos unitarios.

Ejemplo 9: La base canónica es ortonormal.

Se proponen las **Actividades 6 y 7.**

5.- PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES. APLICACIONES.

Definición 17: Se define el **producto escalar** de dos vectores del espacio como el escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$.

Nota 10: Aunque es bastante evidente, conviene recordar que el producto escalar de dos vectores es un número y no un vector, por eso se llama producto escalar.

Nota 11: Como el módulo de cualquier vector no nulo es siempre positivo, el producto escalar de dos vectores no nulos será:

- Positivo, cuando el ángulo que formen los vectores sea agudo
- Negativo, cuando el ángulo que formen los vectores sea obtuso.
- Cero, cuando el ángulo que formen los vectores sea recto.

<u>Proposición 5:</u> (Propiedades del producto escalar) El producto escalar definido verifica las siguientes propiedades:

a) $\vec{u}\cdot\vec{u}=\left|\vec{u}\right|^2>0 \ \ \forall\vec{u}\neq\vec{0}$ (Positiva)

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u} \ \ \forall\vec{u},\vec{v}\in V_3$ (Conmutativa)

c) $\left(\alpha\cdot\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\alpha\cdot\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right) \ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}\ ,\ \forall\ \vec{u},\vec{v}\in V_3$ (Homogénea)

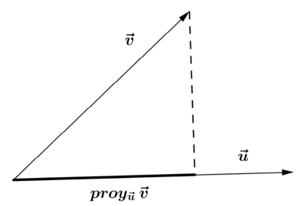
d) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{w} \ \ \forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V_3$ (Distributiva)

<u>Proposición 6:</u> (Condición de ortogonalidad o perpendicularidad) Sean $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ dos vectores del espacio. Entonces $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

<u>Nota 12:</u> (Expresión analítica del producto escalar) Sean $\vec{u}=\left(u_1,u_2,u_3\right)$ y $\vec{v}=\left(v_1,v_2,v_3\right)$ las coordenadas de dos vectores del espacio referidos a una base ortonormal. Entonces: $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3$

<u>Nota 13:</u> (Ángulo entre dos vectores) De forma inmediata, a partir de las definiciones anteriores, es evidente que $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\operatorname{arccos}\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}$, que nos permite hallar el ángulo que forman dos vectores conociendo sus coordenadas respecto de una base ortonormal.

<u>Definición 18:</u> Sean $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ dos vectores del espacio. Llamamos **proyección del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$** al escalar $proy_{\vec{u}}\,\vec{v}=\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|}$.



<u>Ejemplo 10:</u> Busquemos un vector perpendicular a $\vec{u}=\left(3,-1,5\right)$. El vector $\vec{v}=\left(v_1,v_2,v_3\right)$ buscado debe cumplir $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Así pues, ha de ser $3v_1-v_2+5v_3=0$. Esta ecuación tiene infinitas soluciones. Algunas de ellas son: $\vec{v}=\left(1,-2,-1\right)$, $\vec{v}=\left(2,11,1\right)$, ...

<u>Ejemplo 11:</u> Sean los vectores $\vec{u}=\left(3,-4,12\right)$, $\vec{v}=\left(5,-2,-6\right)$. Calculemos:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot5-4\cdot\left(-2\right)+12\cdot\left(-6\right)=-49$

b) $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13\ \ y\ \ \left|\vec{v}\right|=\sqrt{25+4+36}=\sqrt{65}$

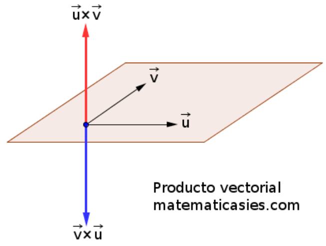
c) $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\operatorname{arccos}\dfrac{-49}{13\sqrt{65}}\simeq117^{\circ}52'\,23''$

d) Calculemos ahora cuánto debe valer el parámetro x para que $\vec{w}=\left(7,x,-2\right)\perp\vec{u}$. Utilizando la condición de ortogonalidad, debe ser $7\cdot3-4x-2\cdot12=0\rightarrow x=\dfrac{-3}{4}$

Se proponen las **Actividades de la 8 a la 11.**

6.- PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES. APLICACIONES.

Definición 19: Llamamos **producto vectorial** de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al único vector $\vec{u}\times\vec{v}$ que cumple que:



- $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot \text{sen}\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$
- Su dirección es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- Su sentido es el del avance del tornillo, sacacorchos o mano derecha que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Nota 14: Aunque es evidente por la definición, conviene recordar que, a diferencia del producto escalar que era un número, el producto vectorial es un vector.

Proposición 7: **(Propiedades del producto vectorial)** El producto vectorial definido verifica las siguientes propiedades:

a) *Si* $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0} \rightarrow$ O bien $\vec{u}=\vec{0}$, O bien $\vec{v}=\vec{0}$, O bien $\vec{u}\,||\,\vec{v}$

b) $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u} \quad \forall \vec{u},\vec{v}\in V_3$ (Anticonmutativa)

c) $\left(\alpha\cdot\vec{u}\right)\times\vec{v} = \alpha\cdot\left(\vec{u}\times\vec{v}\right) \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall\, \vec{u},\vec{v}\in V_3$ (Homogénea)

d) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{v}\times\vec{u}+\vec{u}\times\vec{w} \quad \forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V_3$ (Distributiva)

e) En general $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) \neq \left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\times\vec{w} \quad \forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V_3$ (No asociativa)

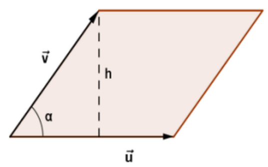
f) $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0} \quad \forall\vec{u}\in V_3$

Nota 15: **(Expresión analítica del producto vectorial)** Sean $\vec{u}=\left(u_1,u_2,u_3\right)$ y $\vec{v}=\left(v_1,v_2,v_3\right)$ las coordenadas de dos vectores del espacio referidos a una base ortonormal. Entonces: $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$.

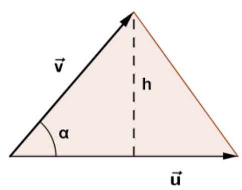
Nota 16: **(Aplicaciones del producto vectorial)**

a) $\vec{u}\times\vec{v}$ es un vector perpendicular a ambos vectores, por tanto, es perpendicular al plano que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) El área del paralelogramo que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$.



c) El área del triángulo que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$.



Ejemplo 12: Calculemos el producto vectorial de $\vec{u}=(3,-5,1)$ por $\vec{v}=(4,7,6)$. Utilizamos la expresión analítica: $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -5 & 1\\ 4 & 7 & 6\end{vmatrix}=-37\vec{i}-14\vec{j}+41\vec{k}\rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=(-37,-14,41)$

Ejemplo 13: Hallemos un vector perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{u}=(2,1,0)$ *y* $\vec{v}=(0,3,-1)$. Para ello, hacemos el producto vectorial de ambos vectores y resulta: $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}\rightarrow\vec{w}=(-1,2,6)$ es perpendicular a dicho plano.

Ejemplo 14: Hallemos el área del triángulo definido por $\vec{u}=(3,7,-6)$ *y* $\vec{v}=(4,1,-2)$. Será $A_T=\frac{1}{2}\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 7 & -6\\ 4 & 1 & -2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{8^2+18^2+25^2}=\frac{\sqrt{1013}}{2}u^2$

7.- PRODUCTO MIXTO DE VECTORES. APLICACIONES.

Definición 20: Se define el **producto mixto** de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ como el escalar $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$

Nota 17: Conviene observar que, igual que el producto escalar, el producto mixto de tres vectores es un número y no un vector.

Proposición 8: **(Propiedades del producto mixto)** El producto mixto definido verifica las siguientes propiedades:

a) El producto mixto de tres vectores cambia de signo si se permutan dos de ellos.

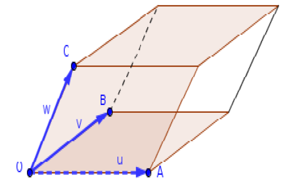
b) $\left[\vec{u}+\vec{u}',\vec{v},\vec{w}\right]=\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]+\left[\vec{u}',\vec{v},\vec{w}\right]\ \forall\vec{u},\vec{u}',\vec{v},\vec{w}\in V_3$ (Análogamente con $\vec{v}$ *o* $\vec{w}$)

c) $\left[\alpha\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\alpha\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]\ \forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V_3$ (Análogamente con $\vec{v}$ *o* $\vec{w}$)

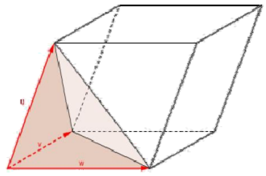
d) El producto mixto de tres vectores no nulos es cero cuando son linealmente dependientes.

Nota 18: **(Expresión analítica del producto mixto)** Sean $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ las coordenadas de tres vectores del espacio referidos a una base ortonormal. Entonces: $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$.

<u>Nota 19:</u> (Aplicaciones del producto mixto)



a) El volumen del paralepípedo que determinan $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ es $V_P = \left\| \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \right] \right\|$



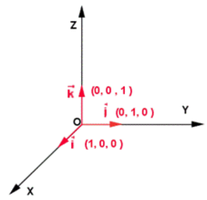
b) El volumen del tetraedro que determinan $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ es $V_T = \frac{1}{6} \cdot \left\| \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \right] \right\|$

<u>Ejemplo 15:</u> Hallemos el volumen del paralepípedo y del tetraedro determinado por los vectores: $\vec{u} = (3, -5, 1)$, $\vec{v} = (7, 4, 2)$ y $\vec{w} = (0, 6, 1)$.

$$V_P = \left\| \begin{matrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{matrix} \right\| = |12 + 42 + 35 - 36| = |53| = 53u^3$$. Así pues: $V_T = \frac{1}{6} \cdot 53 = \frac{53}{6} u^3$

Se proponen las **Actividades de la 12 a la 16.**

<u>8.- SISTEMA DE REFERENCIA. EL ESPACIO AFÍN.</u>



<u>Definición 21:</u> Un **sistema de referencia** en el espacio es un sistema $\Re = \left\{ O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3} \right\}$, siendo O un punto del espacio, llamado **origen** y $B = \left\{ \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3} \right\}$ una base de del espacio vectorial V_3 en el que a cada punto P del espacio se le asocian las coordenadas $P(a, b, c)$ del vector $\overrightarrow{OP} = (a, b, c)$.

Si la base es ortogonal se llama **sistema de referencia ortogonal** y si es ortonormal, se llama **sistema de referencia ortonormal.** A las rectas que contienen al origen y a cada uno de los vectores de la base, los llamaremos **ejes coordenados** y los nombraremos por x, y, z respectivamente o bien OX, OY, OZ.

<u>Nota 20:</u> En adelante, utilizaremos siempre como punto el punto $O(0,0,0)$ y como base, la base canónica $B_c = \left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$ y se llama **sistema de referencia canónico.**

<u>Definición 22:</u> Llamamos **espacio afín** a la terna (E_3, V_3, φ), siendo E_3 el conjunto de puntos del espacio, V_3 el espacio vectorial tridimensional y φ la aplicación que hace corresponder a cada punto P, el vector $\varphi(P) = \overrightarrow{OP}$.

<u>Nota 21:</u> A partir de las definiciones anteriores, es inmediato comprobar que:

- Las coordenadas del vector que une dos puntos son la diferencia de las coordenadas de los puntos, es decir,
  $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, *siendo* $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(a_3, b_3, c_3)$

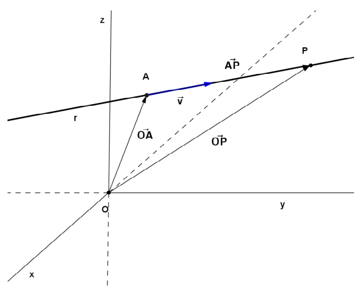
- Las coordenadas del punto medio de un segmento $\overline{AB}$ vienen dadas por: $M_{\overline{AB}}\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$, siendo $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$
- Las del baricentro de un triángulo ABC son $B_{ABC}\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_1+b_2+c_2}{3}, \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$, siendo $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ y $C(c_1,c_2,c_3)$.

<u>Ejemplo 16:</u> Dados los puntos $A(-1,0,2)$, $B(0,2,3)$ y $C(1,1,-1)$. Hallemos

- El punto medio del segmento $\overline{AB}$, que es: $M_{\overline{AB}}\left(\frac{-1+0}{2},\frac{0+2}{2},\frac{2+3}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2},1,\frac{5}{2}\right)$.
- El baricentro del triángulo ABC, que es: $B_{ABC}\left(\frac{-1+0+1}{3},\frac{0+2+1}{3},\frac{2+3-1}{3}\right)=\left(0,1,\frac{4}{3}\right)$.

<u>9.- ECUACIONES DE LA RECTA.</u>

Una recta en el espacio afín puede venir definida de varias formas. La más usual es la que utiliza para definirla un punto y un vector que marque la dirección de la recta al que se suele llamar **vector director** de la recta. Consideremos pues, la recta r determinada por un punto $A(a_1,a_2,a_3)$ y un vector director $\vec{v_r}=(v_1,v_2,v_3)$.



- Pero es evidente que un punto $P(x,y,z)\in r \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \parallel \vec{v_r} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AP}=\lambda\cdot\vec{v_r}$. Ahora bien, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$, con lo que la relación anterior se traduce en que los puntos de la recta son los que cumplen que: $\boxed{r:\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\vec{v_r}}$. A esta última relación se le llama **ecuación vectorial** de la recta. Escribiéndola con coordenadas, queda la expresión siguiente: $\boxed{r:(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)=\lambda(v_1,v_2,v_3)}$

- Si en la última expresión de la ecuación vectorial igualamos coordenada a coordenada, llegamos al sistema equivalente: $\boxed{r:\begin{cases} x=a_1+\lambda v_1 \\ y=a_2+\lambda v_2 \\ z=a_3+\lambda v_3 \end{cases}, \ \lambda\in\mathbb{R}}$, que se conocen como **ecuaciones paramétricas** de la recta y que corresponden a los infinitos puntos de la misma cuando hacemos variar el parámetro λ, de tal forma que para cada valor del mismo, obtenemos un punto distinto de la recta.

- Llegados a este punto, nos proponemos deducir unas ecuaciones que no dependan de un parámetro. Este proceso que ya vimos en la unidad anterior (eliminación de parámetros) se hace muy sencillo en este caso, ya que sin más que despejar el parámetro λ en las tres ecuaciones e igualar, obtenemos la llamada **ecuación continua** de la recta: $r:\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3}$.

Nota 22: Una cuestión importante a tener en cuenta con respecto a la ecuación continua de la recta es que si alguna de las componentes del vector director es nula, no existiría desde el punto de vista aritmético. No obstante, en muchos casos, se admite la ecuación continua como expresión simbólica en el sentido de que el producto en cruz de cada par de fracciones coincide.

- Por último, si multiplicamos en cruz en dos de las tres igualdades de la ecuación continua o eliminamos el parámetro matricialmente y reordenamos, obtenemos un sistema de ecuaciones de la forma: $r:\begin{cases} Ax+By+Cz=D \\ A'x+B'y+C'=D' \end{cases}$ que se llaman **ecuaciones implícitas** de la recta.

Nota 23: En numerosas ocasiones la recta viene dada por dos puntos A, B en lugar de por un punto y un vector director. En este caso, basta considerar como vector director el vector $\overrightarrow{AB}$ que une dichos puntos y como punto cualquiera de los dos.

Ejemplo 17: Consideremos la recta que pasa por los puntos $A(-1,0,-2)$ y $B(2,-3,4)$.

Es evidente que un vector director es $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}=(3,-3,6)\,||\,(1,-1,\,2)$.

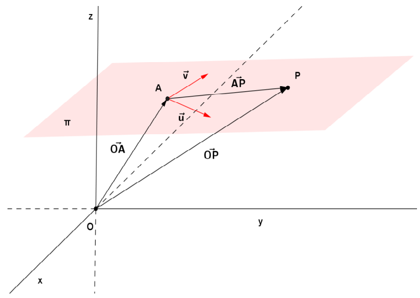
- Así pues, tomando como punto A (podríamos haber tomado B sin ningún inconveniente), la ecuación vectorial es $r:(x,y,z)=(-1,0,-2)+\lambda(1,-1,\,2)$
- Igualando, obtenemos las implícitas: $r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$
- La ecuación continua será: $r: x+1=-y=\dfrac{z+2}{2}$
- Igualando la central a las otras dos y agrupando, obtenemos unas ecuaciones implícitas: $r:\begin{cases} x+y=-1 \\ 2y+z=-2 \end{cases}$

Ejemplo 18: Sea ahora la recta definida por $s:\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y-2z=1 \end{cases}$. Veamos cómo se obtienen el resto de ecuaciones:

Si resolvemos el sistema: $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y-2z=1 \end{cases}$. Si sumamos las dos ecuaciones, obtenemos la ecuación: $3x-z=4$. Llamando $x=\lambda$, se obtiene $z=-4+3\lambda$ y sustituyendo en una de las dos del principio: $\lambda-y+8-6\lambda=1\rightarrow y=7-5\lambda$. Así pues, unas ecuaciones paramétricas son: $s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=7-5\lambda \\ z=-4+3\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$ y la ecuación continua $s: x=\dfrac{y-7}{-5}=\dfrac{z+4}{3}$

Se proponen las **Actividades de la 17 a la 20.**

10.- ECUACIONES DEL PLANO.

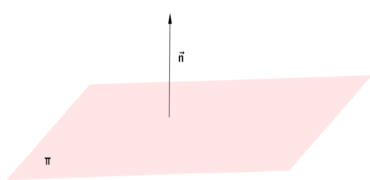


Un plano en el espacio afín puede venir definido de varias formas. La más usual es la que utiliza para definirla un punto y dos vectores que marquen las dos direcciones del plano a los que se suelen llamar **vectores directores** del plano. Consideremos pues, el plano π determinado por un punto $A(a_1, a_2, a_3)$ y dos vectores directores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

- Pero es evidente que un punto $P(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$. Ahora bien, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$, con lo que la relación anterior se traduce en que los puntos del plano son los que cumplen que: $\boxed{\pi : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}}$. A esta última relación se le llama **ecuación vectorial** del plano. Escribiéndola con coordenadas, queda la expresión siguiente: $\boxed{\pi : (x,y,z) = (a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3) = \lambda(v_1, v_2, v_3)}$

- Si en la última expresión de la ecuación vectorial igualamos coordenada a coordenada, llegamos al sistema equivalente: $\boxed{\pi : \begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}}$, que se conocen como **ecuaciones paramétricas** del plano y que corresponden a los infinitos puntos del mismo cuando hacemos variar los parámetros λ y μ, de tal forma que para cada par de valores de los mismos, obtenemos un punto distinto de la recta.

- Llegados a este punto, nos proponemos deducir unas ecuaciones que no dependan de los parámetros. Este proceso que ya vimos en la unidad anterior (eliminación de parámetros) se hace muy sencillo en este caso, ya que de las ecuaciones paramétricas deducimos que debe ser: $\boxed{\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0}$. Sin más que desarrollar el determinante anterior se obtiene la **ecuación implícita, general o cartesiana** del plano: $\boxed{\pi : Ax + By + Cz + D = 0}$.



<u>**Nota 24:**</u> En las condiciones anteriores, el vector $\vec{n} = (A, B, C)$ es un vector perpendicular a los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del plano y, por tanto, es un vector perpendicular al plano π.
A todo vector $\vec{n} \perp \pi$ se le llama **vector normal** del plano. Es inmediato comprobar, además, que la ecuación implícita es equivalente a la ecuación $\boxed{\pi : A(x - a_1) + B(y - a_2) + C(z - a_3) = 0}$, denominada **ecuación normal** del plano. Por todo lo visto en la unidad es evidente también que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores directores del plano, entonces el vector $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ es un vector normal al plano.

Nota 25: Al igual que en la recta, en numerosas ocasiones el plano viene dado por tres puntos no alineados A, B y C en lugar de por un punto y dos vectores directores. En este caso, basta considerar un punto de los tres y dos vectores distintos de los que se pueden formar con los puntos.

Nota 26: Es importante tener en cuenta que las ecuaciones paramétricas de la recta dependen siempre de un parámetro y las del plano de dos parámetros. Por ello una recta tiene siempre dos ecuaciones implícitas linealmente independientes mientras que el plano tiene una sola. Esto se debe a que la recta es un objeto de dimensión 1 (1 vector como base) mientras que el plano es de dimensión 2 (2 vectores como base). En general, se cumple siempre la relación: $\boxed{\dim(objeto) = 3 - N^o ecuaciones\ \ implícitas}$ y $\dim(objeto) = N^o parámetros$ con lo que $\boxed{N^o\ parámetros = 3 - N^o ecuaciones\ \ implícitas}$.

Nota 27: Otra cuestión también importante a tener en cuenta, es que no existen "las ecuaciones" sino "unas ecuaciones", es decir, las ecuaciones de una recta o un plano no son únicas y dependen tanto del punto y/o vector/es director/es elegidos como de los cálculos intermedios que se escojan. Por ejemplo, para pasar de la continua a las implícitas en una recta, hemos de elegir dos de las tres posibles igualdades. De esa elección dependerá que obtengamos unas ecuaciones u otras. Además, conviene recordar también que los vectores directores o normales únicamente sirven para marcar direcciones, siendo su módulo y sentido indiferente. En cualquier momento podemos cambiar de un vector a otro proporcional si estimamos que es más sencillo de manejar.

Ejemplo 19: Hallemos todas las ecuaciones del plano π que contiene a los puntos $A(0,-1,1)$, $B(-3,-1,2)$ y $C(5,0,0)$. Tomamos el punto A como punto y los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-3,0,1)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (5,1,-1)$

- La ecuación vectorial será: $\pi : (x,y,z) = (0,-1,1) + \lambda(-3,0,1) + \mu(5,1,-1)$.
- Las paramétricas serán: $\pi : \begin{cases} x = -3\lambda + 5\mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 1 + \lambda - \mu \end{cases}$.
- Reagrupando en la ecuación $\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z = 5$ que es la ecuación implícita.

Ejemplo 20: Veamos ahora cómo se obtienen las paramétricas partiendo de la implícita. Consideremos el plano de ecuación $\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$. Sin más que resolver el SCI, obtenemos unas ecuaciones implícitas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 6 - 2\lambda - 3\mu \end{cases}$ y además tenemos un punto $A(0,0,6)$ y dos vectores $\vec{u} = (1,0,-2)$ y $\vec{v} = (0,1,-3)$. Si necesitáramos más puntos del plano, no hay más que dar pares de valores a los parámetros λ, μ.

Se proponen las **actividades 21 a la 25**

11.- POSICIONES RELATIVAS DE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS.

Nota 28: **(Punto y punto)** Dos puntos son iguales si sus coordenadas son iguales y distintos si son distintas

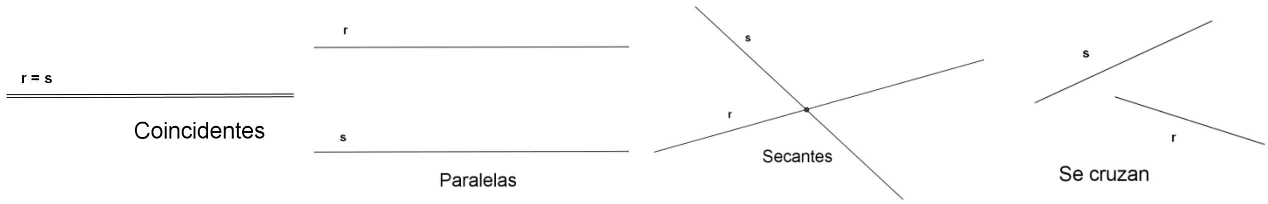
Nota 29: **(Punto y recta)** Un punto está contenido en una recta si verifica su/s ecuación/es y no está contenido si no la/s verifica.

Nota 30: **(Punto y plano)** Un punto está contenido en un plano si verifica su/s ecuación/es y no está contenido si no la/s verifica.

Nota 31: **(Tres puntos alineados)** Tres puntos A, B y C están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$ son paralelos, es decir, si sus coordenadas son proporcionales.

Nota 32: **(Cuatro puntos coplanarios)** Cuatro puntos A, B C y D son coplanarios (están en el mismo plano) si uno de ellos pertenece al plano determinado por los otros tres o equivalentemente si los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}\ y\ \overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes.

Nota 33: **(Recta y recta)** En el caso de las posiciones relativas entre dos rectas pueden darse las situaciones que se adjuntan en los gráficos:



Coincidentes Paralelas Secantes Se cruzan

Vamos a ver dos formas distintas de estudiar su posición relativa. En función de los datos que tengamos será más fácil la primera o la segunda forma, siendo las dos igualmente válidas.

- Partiendo de ecuaciones paramétricas o continua: Sea la recta r definida por el punto $A(a_1,a_2,a_3)$ y el vector director $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y la recta s definida por el punto $B(b_1,b_2,b_3)$ y el vector director $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$. Consideremos las matrices: $M=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \end{pmatrix}$. Entonces:
    - Si $\text{rg}M=1=\text{rg}M' \rightarrow$ Las rectas son coincidentes.
    - Si $\text{rg}M=1\ y\ \text{rg}M'=2 \rightarrow$ Las rectas son paralelas.
    - Si $\text{rg}M=2=\text{rg}M' \rightarrow$ Las rectas son secantes.
    - Si $\text{rg}M=2\ y\ \text{rg}M'=3 \rightarrow$ Las rectas se cruzan.

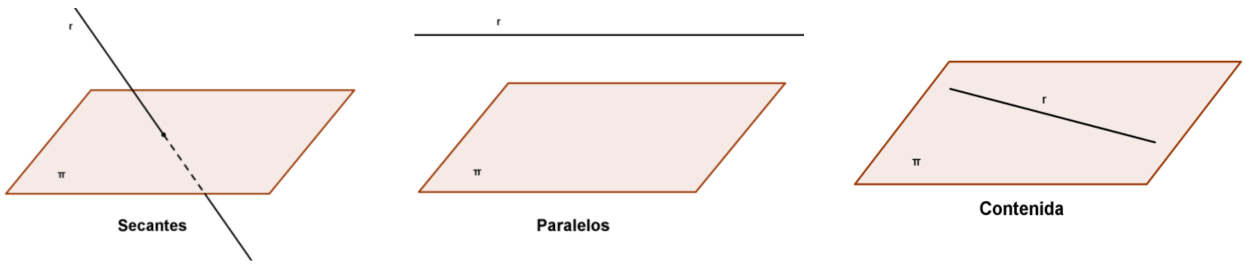
- Partiendo de ecuaciones implícitas: Sea la recta $r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \end{cases}$ y la recta $s:\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z=D_3 \\ A_4x+B_4y+C_4z=D_4 \end{cases}$. Consideremos las matrices de coeficientes y ampliada asociadas al sistema que forman las dos rectas, es decir, las matrices: $A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$. Entonces:

- Si $\text{rg}A = 2 = \text{rg}A^* \to$ Las rectas son coincidentes.
- Si $\text{rg}A = 2$ y $\text{rg}A^* = 3 \to$ Las rectas son paralelas.
- Si $\text{rg}A = 3 = \text{rg}A^* \to$ Las rectas son secantes.
- Si $\text{rg}A = 3$ y $\text{rg}A^* = 4 \to$ Las rectas se cruzan.

<u>Ejemplo 21:</u> Sean las rectas: $r:\begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 3+5\lambda \\ z = 5 \end{cases}$ y $s: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-5}{0}$. Es evidente que $M=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Es muy fácil ver que $\text{rg}M = \text{rg}M' = 2$. Así pues, las rectas son secantes en un punto. Si queremos hallar dicho punto, resolvemos el sistema.

<u>Ejemplo 22:</u> Consideremos ahora las mismas rectas. Es fácil ver que unas ecuaciones implícitas son: $r:\begin{cases} x+3z=2 \\ y-5z=3 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} 2x+y=2 \\ z=0 \end{cases}$. Considerando ahora las matrices asociadas: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es inmediato comprobar que $\text{rg}A = \text{rg}A^* = 3$. Así pues, es un SCD y las rectas son secantes en un punto.

<u>Nota 34:</u> (Recta y plano) En el caso de las posiciones relativas entre una recta y un plano, pueden darse las situaciones que se adjuntan en los gráficos:



Como en el caso de recta y plano únicamente hay tres posiciones relativas, formando el sistema de ecuaciones de la recta y el plano, puede ocurrir:

- Si el sistema es compatible determinado, entonces son secantes en un punto.
- Si el sistema es compatible indeterminado, entonces la recta está contenida en el plano.
- Si el sistema es incompatible, entonces son paralelos.

Esto anterior, se puede ver, principalmente de dos formas:

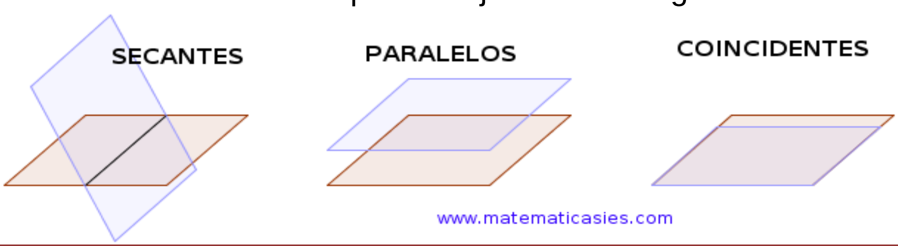
- <u>Partiendo de ecuaciones implícitas</u>: Sea la recta $r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \end{cases}$ y el plano $\pi: A_3x+B_3y+C_3z=D_3$. Consideremos las matrices de coeficientes y ampliada asociadas al sistema que forman la recta y el plano, es decir, las matrices: $A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$. Entonces:
    - Si $\text{rg}A=2=\text{rg}A^* \rightarrow$ La recta está contenida en el plano.
    - Si $\text{rg}A=2$ y $\text{rg}A^*=3 \rightarrow$ La recta es paralela al plano.
    - Si $\text{rg}A=3=\text{rg}A^* \rightarrow$ La recta y el plano son secantes en un punto.
- <u>Partiendo de ecuaciones paramétricas de la recta</u>: Sea la recta $r:\begin{cases} x=a_1+\lambda u_1 \\ y=a_2+\lambda u_2 \\ z=a_3+\lambda u_3 \end{cases}$ y el plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$. Si sustituimos los valores de x, y, z de la paramétrica de la recta en la ecuación del plano y despejamos el parámetro λ, podemos obtener:
    - $\lambda=k \rightarrow SCD \rightarrow$ La recta y el plano son secantes.
    - $0\lambda=k \rightarrow SI \rightarrow$ La recta y el plano son paralelos.
    - $0\lambda=0 \rightarrow SCI \rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

<u>Ejemplo 23:</u> Estudiemos la posición relativa de la recta $r:\begin{cases} 2x-y+3z=5 \\ x-y-2z=1 \end{cases}$ y el plano $\pi: x+5z=3$. Estudiamos el rango:. $A^*=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Es fácil ver que: $\text{rg}A=2$ y $\text{rg}A^*=3$. Así pues, la recta es paralela al plano.

<u>Ejemplo 24:</u> Determina la posición relativa de $r:\begin{cases} x=2-3t \\ y=-1+t \\ z=2-2t \end{cases}$ y $\pi: x+2y+z-3=0$.

Sustituyendo la ecuación de paramétrica de la recta en la implícita del plano: $2-3t+2(-1+t)+2-2t-3=0 \rightarrow -3t-1=0 \rightarrow t=\frac{-1}{3}$. Luego son secante en un punto.

<u>Nota 35:</u> (Plano y plano) En el caso de las posiciones relativas entre una recta y un plano, pueden darse las situaciones que se adjuntan en los gráficos:



Aunque se puede tratar de otras formas, lo más sencillo es trabajar con las dos ecuaciones implícitas del plano. Sean $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ y $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z = D_2$. Así, si consideramos las matrices asociadas al sistema que forman los planos: $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_2 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$, se cumplirá:

- Si $\text{rg}A = 1 = \text{rg}A^* \rightarrow$ SCI (en función de 2 parámetros) $\rightarrow$ Coincidentes.
- Si $\text{rg}A = 1$ y $\text{rg}A^* = 2 \rightarrow$ SI $\rightarrow$ Paralelos.
- Si $\text{rg}A = 2 = \text{rg}A^* \rightarrow$ SCI (en función de 1 parémetro) $\rightarrow$ Secantes.

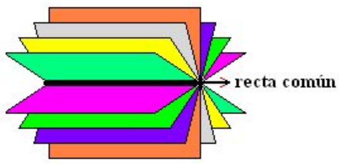
<u>**Ejemplo 25:**</u> Estudiemos la posición relativa de los planos de ecuaciones: $\alpha : 3x - y + 3z + 1 = 0$ y $\beta : 2x - 5y + z - 2 = 0$. Consideremos la matriz ampliada del sistema: $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Es inmediato ver que: $\text{rg}A = \text{rg}A^* = 2$.

<u>**Nota 36:**</u> Aunque es una cuestión evidente, conviene recordar que:

- Dos rectas son paralelas cuando sus vectores directores son paralelos.
- Dos rectas tienen direcciones perpendiculares cuando sus vectores directores son perpendiculares.
- Dos planos son paralelos cuando sus vectores normales lo son.
- Dos planos son perpendiculares cuando sus vectores normales lo son.
- Una recta es paralela a un plano cuando su vector director es perpendicular al vector normal de la recta.
- Una recta es perpendicular a un plano cuando su vector director es paralelo al vector normal de la recta.

Se proponen las **actividades de la 26 a la 28**

<u>12.- HAZ DE PLANOS.</u>



<u>**Definición 23:**</u> Llamamos **haz de planos secantes** en la recta $r : \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ al conjunto:

$\boxed{\pi_{\lambda,\mu} : \lambda\left(Ax + By + Cz + D\right) + \mu\left(A'x + B'y + C'z + D'\right) = 0}$, de todos los planos secantes en la recta r.

<u>**Nota 37:**</u> Una definición prácticamente equivalente a esta sería considerando un solo parámetro y definiendo el haz de planos anteriormente definido como el conjunto: $\boxed{\pi_\alpha : Ax + By + Cz + D + \alpha\left(A'x + B'y + C'z + D'\right) = 0}$ del que estaría excluido el plano $\pi' : A'x + B'y + C'z + D' = 0$ ya que se obtiene dividiendo la ecuación por el parámetro $\lambda \neq 0$ y llamando $\alpha = \dfrac{\mu}{\lambda}$.

Algo análogo podríamos hacer dividiendo por el otro parámetro y obtendríamos una tercera definición de haz de planos del que estaría excluido π en lugar de π'.

En la inmensa mayoría de las ocasiones, el haz de planos sirve para determinar un plano desconocido que casi nunca (es muy raro que ocurra) es ninguno de los planos que se utilizan para construir el haz por lo que el considerar un parámetro en lugar de dos, no suele fallar y, si lo hiciera (no obtuviésemos un valor concreto del parámetro), de inmediato consideraríamos la opción de que el excluido fuese el plano buscado.

Definición 24: Llamamos **haz de planos paralelos** a un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ al conjunto $\boxed{\pi_\lambda : Ax + By + Cz + \lambda = 0}$ de los infinitos planos paralelos a π.

Nota 38: A diferencia del haz de planos secantes en una recta, que lo usaremos en algunas ocasiones, el haz de planos paralelos apenas se usa ya que es obvio que cualquier plano paralelo a π tiene vector normal paralelo al de π.

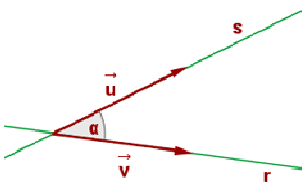
Ejemplo 26: Dadas dos rectas $r : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, hallemos la ecuación implícita del plano π que contiene a la recta r y que es paralelo a la recta s de dos formas distintas:

- Utilizando el haz de planos: Si el plano $\pi \supset r$, entonces es uno de los del haz de planos: $\pi_\lambda : x - y + 1 + \lambda(2x + z - 3) = 0 \Leftrightarrow (1 + 2\lambda)x - y + \lambda z + 1 - 3\lambda = 0$. Si además, debe ser $\pi \parallel s \rightarrow \overrightarrow{n_\pi} \perp \overrightarrow{v_s} \rightarrow \overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \rightarrow 2(1 + 2\lambda) + 1 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-3}{5}$. Así pues, el plano buscado es $\pi : \frac{-1}{5}x - y - \frac{3}{5}z + \frac{14}{5} = 0 \leftrightarrow \pi : x + 5y + 3z - 14 = 0$.
- Si utilizar el haz de planos: Evidentemente si contiene a r y es paralelo a s, para determinar su ecuación basta considerar cualquier punto de r y los vectores directores de r y s. Nos falta el punto y el vector de r, para ello, pasamos a las paramétricas de r sin más que resolver: $r : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$, *llamando* $x = \lambda \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$. Así pues, el plano será : $\pi : \begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow -x - 5(y - 1) - 3(z - 3) = 0 \leftrightarrow \pi : x + 5y + 3z - 14 = 0$

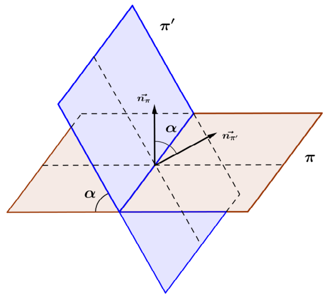
Se proponen las **actividades de la 29 a la 30**

13.- PROBLEMAS MÉTRICOS EN EL ESPACIO.

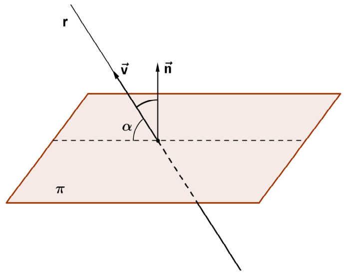
Nota 39: **(Ángulo entre dos rectas)** Dadas dos rectas r y s, el ángulo que forman es el menor de los dos ángulos que forman sus direcciones, así pues, según lo visto en los puntos anteriores de la unidad, vendrá dado por la expresión: $\boxed{\left(\widehat{r,s}\right) = \arccos \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right|}}$.



(Ángulo entre dos planos) Dados dos planos π y π', el ángulo que forman es el menor de los dos ángulos que forman sus direcciones, así pues, según lo visto en los puntos anteriores de la unidad, vendrá dado por el ángulo que forman sus vectores normales, siendo su expresión: $\boxed{\left(\widehat{\overrightarrow{n_\pi},\overrightarrow{n_{\pi'}}}\right)=\arccos\dfrac{\left|\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{n_{\pi'}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\pi}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_{\pi'}}\right|}}$



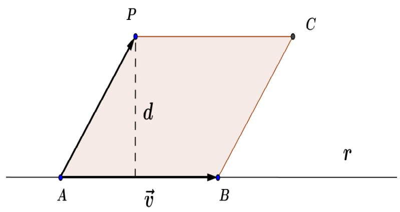
<u>Nota 40:</u> (Ángulo entre una recta y un plano) Dada una recta r y un plano π, el ángulo que forman es el menor de los dos ángulos que forman sus direcciones, que resulta el complementario del que forman el vector director de la recta y el normal del plano, así pues, según lo visto en los puntos anteriores de la unidad, vendrá dado por la expresión: $\boxed{\left(\widehat{r,\pi}\right)=90^\circ-\arccos\dfrac{\left|\vec{v}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\operatorname{arcsen}\dfrac{\left|\vec{v}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}}$.



<u>Ejemplo 27:</u> Hallemos el ángulo que forma la recta $r:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=z+3$ con el plano $\pi: 2x+y+7=0$. Según la fórmula: $\left(\widehat{r,\pi}\right)=\operatorname{arcsen}\dfrac{4-1+0}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}}=\operatorname{arcsen}\dfrac{3}{\sqrt{30}}\simeq 33^\circ\,12'\,39''$

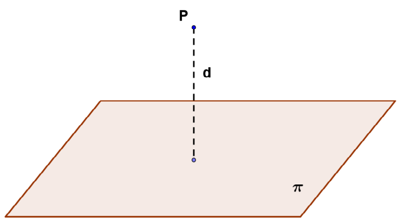
<u>Nota 41:</u> (Distancia entre dos puntos) Ya hemos visto durante la unidad que la distancia entres dos puntos $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ es el módulo del vector que los une, es decir: $\boxed{d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}}$.

<u>Nota 42:</u> (Distancia de un punto a una recta) Sea P un punto del espacio y r la recta que pasa por A y tiene como vector director $\vec{v}$. Entonces, la distancia del punto a la recta viene dada por la expresión: $\boxed{d(P,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}}$.



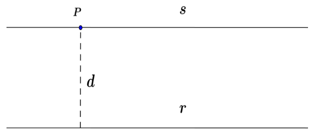
<u>Nota 43:</u> Otra forma de hallar la distancia de un punto P a una recta r es:
1.- Hallamos el plano $\pi\perp r$ tal que $\pi\supset P$.
2.- Hallamos el punto $P'=\pi\cap r$.
3.- Tendremos que $d(P,r)=d(P,P')=\left|\overrightarrow{PP'}\right|$.

<u>Nota 44:</u> (Distancia de un punto a un plano) Sea $P(x_0,y_0,z_0)$ un punto del espacio y $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ la ecuación implícita de un plano. Entonces, la distancia del punto al plano viene dada por: $\boxed{d(P,\pi)=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$.

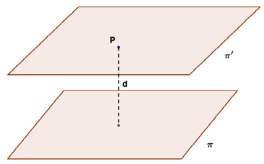


<u>Nota 45:</u> Otra forma de hallar la distancia de un punto P a un plano π es:

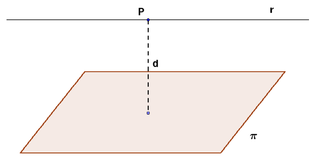
1.- Hallamos la recta $r \perp \pi$ tal que $\pi \supset P$.
2.- Hallamos el punto $P' = \pi \cap r$.
3.- Tendremos que $d(P,r) = d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right|$.



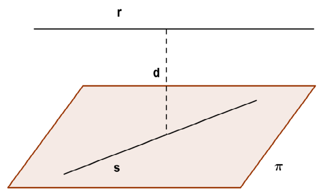
<u>Nota 46:</u> (Distancia entre dos rectas paralelas) La distancia entre dos rectas paralelas es igual a la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra recta.



<u>Nota 47:</u> (Distancia entre dos planos paralelos) La distancia entre dos planos paralelos es igual a la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro plano. No obstante, una fórmula es: $\boxed{d(\pi,\pi') = \dfrac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$, siendo $\begin{cases} \pi : Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi' : A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$



<u>Nota 48:</u> (Distancia de una recta a un plano paralelo a ella) La distancia de una recta a un plano paralelo a ella es igual a la de un punto cualquiera de la recta al plano.



<u>Nota 49:</u> (Distancia entre dos rectas que se cruzan) Sean dos rectas r y s que se cruzan definidas por los puntos P_r, P_s y los vectores directores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ respectivamente. Entonces, la distancia entre ellas viene dada por: $\boxed{d(r,s) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|}}$

<u>Nota 50:</u> Otra forma de hallar la distancia entre dos rectas r y s que se cruzan es:

1.- Hallamos el plano π que contiene a una de ellas y es paralelo a la otra, por ejemplo, el plano $\pi \parallel r$ tal que $\pi \supset s$.
2.- Tendremos que $d(r,s) = d(r,\pi) = d(P_r,\pi)$.

<u>Ejemplo 28:</u> Hallemos la distancia del punto $P(-1,0,3)$ al plano $\pi : 2x+y+5z+1=0$. Si utilizamos la fórmula: $d(P,\pi) = \dfrac{|-2+15+1|}{\sqrt{4+1+25}} = \dfrac{14}{\sqrt{30}} u$. Otra forma de hacerlo es mediante el procedimiento descrito en la nota 46, aunque es bastante más largo.

<u>Ejemplo 29:</u> Hallemos la distancia entre el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r : x = y = \dfrac{z+2}{2}$.

Una forma de hacerlo sería utilizando la fórmula de la nota 43 (que es bastante fácil). Veamos esta vez cómo se hace sin utilizar la fórmula, es decir, mediante el proceso descrito en la nota 44.

1.- Hallamos el plano $\pi \perp r$ tal que $\pi \supset P$, que vendrá dado por la ecuación $\pi : 1(x-1)+1(y-0)+2(z-1)=0 \rightarrow \pi : x+y+2z-3=0$

2.- Hallamos el punto $P' = \pi \cap r$. Para ello, es más cómodo escribir la recta en paramétricas: $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$ y sustituir en la ecuación implícita del plano:

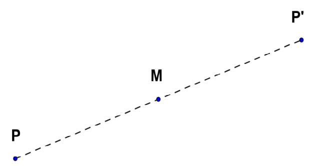
$\lambda + \lambda + 2(-2+2\lambda) - 3 = 0 \to 6\lambda - 7 = 0 \to \lambda = \frac{7}{6}$. Así pues: $P'\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{1}{3}\right)$ y la distancia será:

$$d(P,r) = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \sqrt{\left(\frac{7}{6}-1\right)^2 + \left(\frac{7}{6}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{11}{6}}\,u$$

<u>Ejemplo 30:</u> Hallemos la distancia entre las rectas $r: \frac{x-1}{-1} = y = z-2$, $s: x = \frac{y-3}{-1} = z$ que se cruzan. Según la fórmula, será: $d(r,s) = \frac{\left|\left[(-1,3,-2),(-1,1,1),(1,-1,1)\right]\right|}{\left|(-1,1,1)\times(1,-1,1)\right|} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}\,u$

Se proponen las **actividades de la 31 a la 36**

<u>14.- SIMETRÍAS EN EL ESPACIO.</u>

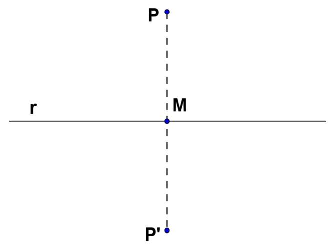


<u>Definición 25:</u> Dado un punto P, llamamos **simétrico de P respecto a un punto M (llamado centro de simetría)** al único punto P' que verifica que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

<u>Nota 51:</u> Para hallar el punto simétrico de uno dado respecto de otro, basta tener en cuenta que, en la situación de la definición anterior, $\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{PM}$ o equivalentemente: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{PM}$

<u>Ejemplo 31:</u> Hallemos el simétrico del punto $P(1,0,-2)$ respecto del centro $M(0,2,-5)$. Sea $P'(x,y,z)$ el punto simétrico buscado. Entonces, se cumplirá la relación $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{PM} = (0,2,-5) + (-1,2,-3) = (-1,4,-8)$. Luego $P'(-1,4,-8)$

<u>Definición 26:</u> Dado un punto P no perteneciente a una recta r, llamamos **simétrico de P respecto de la recta r** al único punto P' perteneciente a la recta perpendicular a r por el punto P y tal que $d(P,r) = d(P',r)$.



<u>Nota 52:</u> Para hallar el punto simétrico de P respecto de r:

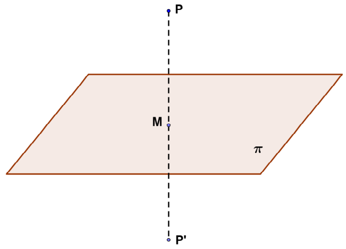
1.- Se halla el plano $\pi \perp r$ y tal que $\pi \supset P$.
2.- Se halla el punto $M = \pi \cap r$
3.- P' será el simétrico de P respecto de M.

<u>Ejemplo 32:</u> Hallemos el simétrico de $P(0,1,0)$ respecto de $r: x+1 = \frac{y+2}{2} = z-1$

1.- Hallamos $\pi: x + 2(y-1) + z = 0 \to \pi: x + 2y + z - 2 = 0$

2.- Pasamos la recta a paramétricas: $r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=-2+2\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$ y la cortamos con el plano, obteniendo: $-1+\lambda+2(-2+2\lambda)+1+\lambda-2=0 \rightarrow 6\lambda-6=0 \rightarrow \lambda=1 \rightarrow M(0,0,2)$. Así pues: $\overrightarrow{OP'}=(0,0,2)+(0,-1,2)=(0,-1,4)$. Luego $P'(0,-1,4)$

Definición 27: Dado un punto P no perteneciente a un plano π, llamamos **simétrico de P respecto del plano** π, al único punto P' perteneciente a la recta r, perpendicular al plano π por P y tal que $d(P,\pi)=d(P',\pi)$.



Nota 53: Para hallar el punto simétrico de P respecto de π:

1.- Se halla la recta $r \perp \pi$ y tal que $r \supset P$.
2.- Se halla el punto $M=\pi \cap r$
3.- P' será el simétrico de P respecto de M.

Ejemplo 33: Hallemos el simétrico de $P(0,1,1)$ respecto de $\pi: x+y-z+3=0$

1.- Hallamos $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$

2.- Cortamos la recta con el plano: $\lambda+1+\lambda-1+\lambda+3=0 \rightarrow \lambda=-1 \rightarrow M(-1,0,2)$.
Así pues: $\overrightarrow{OP'}=(-1,0,2)+(-1,-1,1)=(-2,-1,3)$. Luego $P'(-2,-1,3)$.

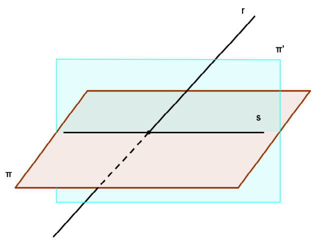
Se proponen las **actividades de la 37 a la 38.**

15.- PROBLEMAS TÍPICOS.

A continuación y para concluir con la unidad, vamos a abordar la resolución de algunos problemas con cierta complejidad para visualizarlos y a los que habremos de enfrentarnos en numerosas ocasiones.

Nota 54: **(Proyección ortogonal de un punto sobre una recta o un plano)** La proyección de puntos sobre rectas y planos ya la hemos abordado en las simetrías, siendo el punto proyectado de P el M construido durante el proceso.

Nota 55: **(Proyección ortogonal de una recta sobre un plano)** Se trata de hallar la proyección de una recta r sobre un plano π. Para ello:



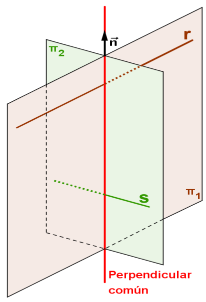
1.- Hallamos el plano $\pi' \supset r$ y tal que $\pi' \perp \pi$.
2.- La recta s proyectada será $s=\pi \cap \pi'$

Ejemplo 34: Hallemos la proyección ortogonal de la recta $r:\begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=4+6\lambda \end{cases}$ sobre el plano $\pi: x-3y+5z+11=0$.

1.- Hallamos el plano $\pi' \supset r$ y tal que $\pi' \perp \pi$. Este plano pasará por cualquier punto de r (por ejemplo por $P(3,1,4)$) y tiene como vectores directores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{n_\pi}$. Así pues, su ecuación implícita viene dada por: $\pi': \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-4 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi': 13x+16y+7z=83$

2.- La proyección será: $s: \begin{cases} x-3y+5z+11=0 \\ 13x+16y+7z=83 \end{cases}$

Nota 56: **(Perpendicular común a dos rectas que se cruzan)** La perpendicular común a dos rectas r y s que se cruzan es la única recta t que es secante y perpendicular a ambas rectas. Para hallarla:



1.- Hallamos un vector $\vec{n}$ perpendicular a r y a s. Basta tomar $\vec{n} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}$.

2.- Hallamos el plano $\pi_r \supset r$ y tal que $\pi_r \perp s$. Para ello consideramos un punto $A_r \subset r$ y los vectores directores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$.

3.- Hallamos el plano $\pi_s \supset s$ y tal que $\pi_s \perp r$. Para ello consideramos un punto $A_s \subset s$ y los vectores directores $\overrightarrow{v_s}$ y $\vec{n}$.

4.- La perpendicular común será $t = \pi_r \cap \pi_s$

Ejemplo 35: Hallemos la perpendicular común a las rectas que se cruzan siguientes $r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 0 \\ z = 1+\lambda \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 1+\mu \end{cases}$

1.- Hallamos el vector normal $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \rightarrow \vec{n} = (-1,-1,1) \parallel (1,1,-1)$

2.- Hallamos el plano $\pi_r: \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi_r: x-2y-z=1$

3.- Hallamos el plano $\pi_s: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi_s: 2x-y+z=1$

4.- La perpendicular común será $t: \begin{cases} x-2y-z=1 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$

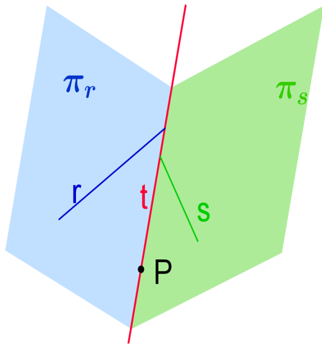
Nota 57: Otra forma alternativa a la anterior es considerar el vector genérico que une dos puntos genéricos (uno de cada recta) y obligarle a que sea perpendicular a ambas. Con ello obtenemos los dos puntos de apoyo y el vector director de la recta. Es un cálculo relativamente sencillo y que resuelve bastante rápidamente el problema. Veámoslo con el mismo ejemplo anterior:

Dos puntos genéricos de las rectas son $A_r\left(2+\lambda,0,1+\lambda\right)$ y $A_s\left(0,\mu,1+\mu\right)$. Luego el vector director de una recta que corta a ambas será de la forma: $\overrightarrow{v_t}=\left(-2-\lambda\ ,\ \mu\ ,\ \mu-\lambda\right)$. Ahora bien, para que la recta sea la perpendicular común, este vector ha de ser ortogonal a los vectores directores de las dos rectas, luego:

$$\begin{cases}(1,0,1)\cdot\left(-2-\lambda\ ,\ \mu\ ,\ \mu-\lambda\right)=0\\(0,1,1)\cdot\left(-2-\lambda\ ,\ \mu\ ,\ \mu-\lambda\right)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-2-\lambda+\mu-\lambda=0\\\mu+\mu-\lambda=0\end{cases}\xrightarrow{Fácil}\begin{cases}\lambda=-2/3\\\mu=-4/3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A_r\left(\frac{4}{3},0,\frac{1}{3}\right)\\A_s\left(0,\frac{-4}{3},\frac{-1}{3}\right)\end{cases}.$$

Así pues, la recta será: $\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}+2\lambda\\y=2\lambda\\z=\dfrac{1}{3}+\lambda\end{cases}$

Nota 58: **(Recta que se apoya en dos rectas que se cruzan)** Es un problema similar al anterior pero sin la condición de perpendicularidad. Dadas dos rectas r y s que se cruzan y un punto P no contenido en ninguna de ellas, se trata de hallar una recta t que pase por dicho punto y sea secante a ambas. Para ello:



1.- Hallamos el plano $\pi_r\supset r$ y tal que $\pi_r\supset P$. Para ello consideramos el punto P y los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{A_rP}$.

2.- Hallamos el plano $\pi_s\supset s$ y tal que $\pi_s\supset P$. Para ello consideramos el punto P y los vectores $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{A_sP}$.

3.- La recta que se apoya será $t=\pi_r\cap\pi_s$

Ejemplo 36: Vamos a determinar la ecuación de la recta que pasa por el origen y se apoya en las rectas $r:\dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z+3}{-1}$, $s:x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$

1.- Hallamos el plano π_r : $\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&-3\\2&1&-1\end{vmatrix}=0\rightarrow 3x-5y+z=0$

2.- Hallamos el plano π_s : $\begin{vmatrix}x&y&z\\0&0&2\\1&2&-1\end{vmatrix}=0\rightarrow 2x-y=0$

3.- La recta que se apoya será $t:\begin{cases}3x-5y+z=0\\2x-y=0\end{cases}$

Se proponen las **actividades de la 39 a la 41.**

16.- ACTIVIDADES.

ACTIVIDADES INTERCALADAS EN LA TEORÍA

Actividad 1: Si $\vec{u}=(-3\ ,5\ ,1)\ y\ \vec{v}=(7,\ 4\ ,-2)$, halla las coordenadas de los vectores:

a) $2\vec{u}+\vec{v}$ b) $\vec{v}-\vec{u}$ c) $5\vec{u}-3\vec{v}$

Actividad 2: Demuestra que $B=\{(1,-5\ ,2)\ ,(3\ ,4\ ,-1)\ ,(6\ ,3\ ,-5)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ Calcula después, las coordenadas del vector $\vec{v}=(24\ ,-26\ ,-6)$ respecto de B.

Actividad 3: Dados los vectores $\vec{u}=(1,-3\ ,2)\ ,\vec{v}=(-2\ ,6\ ,-4)\ \ y\ \ \vec{w}=(2\ ,0\ ,1)$.

a) Expresa $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}\ \ y\ \ \vec{w}$.
b) ¿Es posible expresar $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}\ \ y\ \ \vec{v}$?
c) ¿Son linealmente independientes $\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ \ y\ \ \vec{w}$?

Actividad 4: Halla el valor de k para el cual los vectores $\vec{u}=(1,\ 2\ ,-1)\ ,\ \vec{v}=(0\ ,1,\ 2)\ \ y\ \ \vec{w}=(-1,\ k\ ,3)$ son linealmente dependientes. Obtén, en este caso, una relación de dependencia lineal entre $\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ \ y\ \ \vec{w}$.

Actividad 5: Sean $\{\vec{u_1}\ ,\vec{u_2}\ ,\vec{u_3}\}$ tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$. ¿Son linealmente independientes los vectores: $\vec{v_1}=\vec{u_1}-\vec{u_3}\ ,\ \vec{v_2}=\vec{u_2}+\vec{u_3}\ \ y\ \ \vec{v_3}=\vec{u_1}-\vec{u_2}+\vec{u_3}$?

Actividad 6: ¿Cuáles son las coordenadas del punto D que, junto con los puntos $A(2,-5,3)\ ,B(1,2,3)\ ,C(0,2,-4)$ forman el paralelogramo ABCD?

Actividad 7: Dado el triángulo ABC, de vértices $A(1,2,1)\ ,B(0,3,1)\ y\ C(1,0,-1)$, ¿es equilátero, isósceles o escaleno?

Actividad 8: Dados los vectores $\vec{u}=(5,-1,2)\ \ y\ \ \vec{v}=(-1,2,-2)$, calcula:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ b) $|\vec{u}|$ c) $|\vec{v}|$ d) $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$

Actividad 9: Calcula x e y para que el vector $(x,y,1)$ sea ortogonal a los vectores $(3,2,0)\ y\ (2,1,-1)$.

Actividad 10: Obtén tres vectores perpendiculares a $\vec{v}=(3,2,7)$ que no sean paralelos entre sí.

Actividad 11: Normaliza el vector $\vec{u}=(1,-2,0)$.

Actividad 12: Dados los vectores: $\vec{u}=(1,2,3)$, $\vec{v}=(-1,0,1)$ y $\vec{w}=(0,1,1)$, obtén:

a) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ b) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

Actividad 13: Dados los vectores $\vec{u}=(3,1,-1)$ y $\vec{v}=(2,3,4)$, halla

a) Los módulos de ambos vectores.
b) El producto vectorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$.
c) Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.
d) El área del paralelogramo de lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Actividad 14: Dados los puntos $A(3,1,2)$, $B(1,0,3)$ y $C(-1,6,2)$, obtén:
a) Las coordenadas del punto D para que $2\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$.
b) Las coordenadas del punto D para que ABCD sea un paralelogramo.

Actividad 15: Calcula el volumen del tetraedro definido por los siguientes puntos: $A(1,1,2)$, $B(2,1,5)$, $C(-2,-4,5)$ y $D(-3,4,0)$.

Actividad 16: Halla el volumen del cubo de bases ABCD y EFGH, sabiendo que: $A(8,0,0)$, $B(8,8,0)$, $C(0,8,0)$ y $F(8,8,8)$. Obtén también las coordenadas de los restantes vértices.

Actividad 17: Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(2,0,5)$ y $B(-1,4,6)$.

Actividad 18: Halla la ecuación continua de la recta r que pasa por $(3,-1,4)$ y es paralela al vector $\vec{v}=(2,-5,0)$.

Actividad 19: Escribe en forma implícita la recta de ecuaciones: $\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-5 \\ z=1+\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$

Actividad 20: Obtén las ecuaciones paramétricas, la ecuación continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por los puntos: $A(-5,3,7)$ y $B(2,-3,3)$.

Actividad 21: Halla las ecuaciones paramétricas e implícita del plano que pasa por el punto $(0,1,-1)$ y tiene vectores directores $\vec{u}=(2,0,1)$ y $\vec{v}=(-1,1,1)$.

Actividad 22: Estudia si los puntos A, B, C y D son coplanarios y, en caso afirmativo, escribe la ecuación del plano que los contiene:

a) $A(0,0,4)$, $B(3,3,3)$, $C(2,3,4)$ y $D(3,0,1)$
b) $A(1,0,-1)$, $B(1,-1,-3)$, $C(0,-3,0)$ y $D(-1,-1,-1)$

Actividad 23: Determina el plano que pasa por el punto $A(1,2,1)$ y es paralelo a las rectas $r:\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} -x-y+z+1=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$

Actividad 24: Determina el plano que pasa por el punto $A(2,-3,0)$ y es paralelo al plano

$$\pi:\begin{cases} x=-2\lambda+8\mu \\ y=4+\lambda+\mu \\ z=4+\lambda-\mu \end{cases}$$

Actividad 25: Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,-1,3)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $r:\dfrac{x-2}{-3}=y=z-1$.

Actividad 26: Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $r:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=-1+4\lambda \end{cases}$

b) $r:\begin{cases} x+3y+z=2 \\ x+y-2z=4 \end{cases}$, $s:\begin{cases} 2x-z=6 \\ 2y-z=2 \end{cases}$

Actividad 27: Estudia la posición relativa de los siguientes pares de planos:

a) $\pi:2x-y+z-1=0$, $\pi':4x-2y+2z-2=0$
b) $\pi:-x+2y-z+5=0$, $\pi':2x-4y+2z-4=0$
c) $\pi:x-y+3z+4=0$, $\pi':x+y+z+6=0$

Actividad 28: Estudia la posición relativa de las rectas y planos siguientes:

a) $r:x+2=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-3}$, $\pi:x+y+z-2=0$

b) $r:\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{5}$, $\pi:2x-3y+z-5=0$

c) $r:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-8}=\dfrac{z-5}{2}$, $\pi:2x-3y+4z-54=0$

Actividad 29: Halla la ecuación del haz de planos de eje la recta $r:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$

Actividad 30: Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A y contiene a la recta r.

a) $A(2,0,1)$, $r:\begin{cases} x+y+z=-3 \\ 3x-2y+z-2=0 \end{cases}$

b) $A(2,5,1)$, $r:x-2=\dfrac{y-1}{3}=z+1$

Actividad 31: Halla el ángulo que forman las rectas $r:\begin{cases}3x+2y-3=0\\ y+3z+6=0\end{cases}$, $s: x-1=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{-5}$

Actividad 32: Halla el ángulo que forman la recta $r:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$ y el plano de ecuación $\pi: 5x+4y-2z+5=0$.

Actividad 33: Halla el ángulo que forman los planos $\begin{matrix}\pi: 2x-y+z-7=0\\ \pi': x+y+2z-11=0\end{matrix}$

Actividad 34: Halla la distancia del punto $P(0,1,1)$ a la recta $r: x-1=\dfrac{y}{2}=z+4$

Actividad 35: Calcula la distancia entre las rectas $r: x=y=z$, $s=\begin{cases}x+z=8\\ x+y+z=1\end{cases}$

Actividad 36: Halla la distancia entre los planos $\begin{matrix}\pi: 2x+y+z+7=0\\ \pi': 4x+2y+2z-6=0\end{matrix}$

Actividad 37: Halla el punto simétrico de $P(0,1,4)$ respecto del plano de ecuación $\pi: 4x-2y-3z+4=0$

Actividad 38: Halla el punto simétrico de $P(1,0,2)$ respecto de la recta de ecuación $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{-1}$

Actividad 39: Halla la proyección ortogonal de la recta $r:\dfrac{x-1}{3}=y=z+2$ sobre el plano $\pi: x-y+z-2=0$.

Actividad 40: Halla la perpendicular común a las rectas: $r:\begin{cases}3y+z=5\\ x=0\end{cases}$, $s:\begin{cases}x=5+2\lambda\\ y=3+6\lambda\\ z=1-\lambda\end{cases}$

Actividad 41: Determina la recta que pasa por el punto $P(1,0,-2)$ y se apoya en las rectas $r:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$, $s:\begin{cases}x=2-2\lambda\\ y=2\lambda\\ z=5-6\lambda\end{cases}$

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

Actividad 42: Dados los vectores $\vec{u}=(3,3,2)$, $\vec{v}=(5,-2,1)$ y $\vec{w}=(1,-1,0)$:

a) Halla los vectores: $\vec{u}-2\vec{v}+3\vec{w}$ y $-2\vec{u}+\vec{v}-4\vec{w}$

b) Calcula a y b para que: $\vec{u}=a\vec{v}+b\vec{w}$.

Actividad 43: Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:

a) $\vec{u}=(1,2,1)$, $\vec{v}=(-1,0,3)$ y $\vec{w}=(1,2,-1)$

b) $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{b}=(1,0,1)$ y $\vec{c}=(5,2,3)$

Actividad 44: Determina k para que los siguientes conjuntos de vectores sean coplanarios:

a) $\vec{u}=(k,-3,2)$, $\vec{v}=(2,3,k)$ y $\vec{w}=(4,6,-4)$

b) $\vec{u}=(3,2,5)$, $\vec{v}=(2,4,7)$ y $\vec{w}=(1,-1,k)$

Actividad 45: ¿Para qué valores de a el conjunto de vectores siguiene: $S=\{(1,1,1),(a,1,1),(1,a,0)\}$ es una base?

Actividad 46: En una base ortonormal, tenemos $\vec{a}=(1,2,3)$ y $\vec{b}=(-4,5,-3)$, calcula:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b) $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ c) $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$

Actividad 47: Dados los vectores: $\vec{a}=\vec{i}+m\vec{j}+\vec{k}$ y $\vec{b}=-2\vec{i}+4\vec{j}+m\vec{k}$, halla m para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean:

a) Paralelos b) Ortogonales

Actividad 48: Halla un vector perpendicular a $\vec{u}=(2,3,1)$ y $\vec{v}=(2,0,1)$ que sea unitario.

Actividad 49: Calcula el volumen del paralepípedo que determinan los vectores:

$\vec{a}=(3,-1,1)$, $\vec{b}=(1,7,2)$ y $\vec{c}=(2,1,-4)$.

Actividad 50: Dados los vectores: $\overrightarrow{u_1}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{u_2}=(0,1,-3)$ y $\overrightarrow{u_3}=a\overrightarrow{u_1}+b\overrightarrow{u_2}$, ¿qué relación deben cumplir a y b para que $\overrightarrow{u_3}$ sea ortogonal al vector $\vec{v}=(1,1,1)$?

Actividad 51: Dados los vectores $\vec{u}=(a,1+a,2a)$, $\vec{v}=(a,1,a)$ y $\vec{w}=(1,a,1)$, se pide:

a) Halla los valores de a para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector $\vec{c}=(3,3,0)$ depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a=2$.

c) Justifica razonadamente si para $a=0$ se cumple la igualdad $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0$.

Actividad 52: Halla un vector $\vec{u}$ de la misma dirección que $\vec{v}=(1,-2,3)$ y tal que forme con $\vec{w}=(-2,4,-1)$ un paralelogramo de área $25u^2$.

Actividad 53: Halla un vector $\vec{v}$ coplanario con $\vec{a}=(2,-1,1)$ y $\vec{b}=(1,-2,3)$ y ortogonal a $\vec{c}=(2,3,0)$.

Actividad 54: Consideremos un paralepípedo de bases ABCD y EFGH, siendo: $A(1,1,1)$, $B(2,1,1)$, $C(2,4,1)$ y $E(1,2,7)$, halla:

a) El área de una de las bases.
b) El volumen del paralepípedo.

Actividad 55: Dados los vértices $A(0,1,3)$, $B(1,0,2)$ y $C(1,0,1)$ de un triángulo, obtén:

a) El tipo de triángulo que es.
b) Su perímetro.
c) Sus ángulos.
d) Su área.

Actividad 56: Halla el área del paralelogramo y del triángulo determinado por: $\vec{u}=(-1,2,4)$ y $\vec{v}=(3,1,-2)$.

Actividad 57: Escribe la ecuación implícita del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas: $r:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-7}{3}=\dfrac{z-8}{4}$ y $s: x=y=z$.

Actividad 58: Deduce una ecuación para el plano π_1 que es perpendicular a los planos: $\pi_2: 2x+3y+z=1$, $\pi_3: 6x+3y+2z=3$ y que pasa por el punto $A(4,1,2)$.

Actividad 59: Se consideran las rectas: $r:\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=3t \\ y=1-2t \\ z=2+t \end{cases}$. Encuentra la ecuación del plano que contiene a la recta r y al punto de intersección de s con el plano $\pi: x-3y-2z+7=0$

Actividad 60: Halla la recta que pasa por el punto $P(1,2,1)$ y corta perpendicularmente a la recta: $r:\begin{cases} x-y-z=1 \\ x+z=2 \end{cases}$.

Actividad 61: Determina el conjunto de puntos que equidistan de $P(-1,2,5)$ y $Q(-3,4,1)$. ¿Qué figura geométrica forman? ¿A qué distancia se encuentra el punto P de dicha figura geométrica?

Actividad 62: Obtén las coordenadas del punto del plano de ecuación $x-z=3$ que está más cerca del punto $P(3,1,4)$, así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

Actividad 63: Calcula la ecuación de la recta r que pasa por $P(-1,2,3)$ y $Q(3,5,0)$. Halla los puntos de r cuya distancia al punto $C(-1,0,1)$ es de 12 unidades.

Actividad 64: Halla la ecuación de la recta s que pasa por el punto $P(1,2,3)$ y es paralela a la recta: $r:\begin{cases} 2x+3y-z=-1 \\ x-y+3z=4 \end{cases}$. Determina la distancia entre r y s.

Actividad 65: Estudia la posición relativa de las rectas r y s y calcula el ángulo que forman: $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$, $s: \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = 4+3\lambda \end{cases}$.

Actividad 66: Calcula el ángulo que forman los planos de ecuaciones: $\pi_1 : x+y+z=1$ y $\pi_2 : x-2y+z=2$

Actividad 67: Halla el punto Q simétrico de $P(2,0,1)$ respecto de la recta r que pasa por el punto $A(0,3,2)$ y es paralela a la recta $s: \begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Actividad 68: Halla el punto simétrico de $A(-1,3,3)$ respecto del plano $\pi : x+y-2z=5$

Actividad 69: Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,1,1)$ y $B(0,2,0)$. Si el centro del paralelogramo es $P(0,0,1)$, se pide:

a) Las coordenadas de los otros dos vértices.
b) La ecuación del plano que contiene al paralelogramo.
c) El área del paralelogramo.

Actividad 70: Considera el paralepípedo de bases ABCD y EFGH, siendo $A(1,1,1)$, $B(2,1,1)$, $C(2,4,1)$ y $E(1,2,7)$. Halla el área de una de sus bases, el volumen del paralepípedo y la distancia entre las bases.

Actividad 71: Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son el punto $(1,1,1)$ y los puntos en los que el plano $2x+y+z=2$ corta a los ejes coordenados.

Actividad 72: Un rayo luminoso cuya dirección es la recta $r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$ y que es incidente con el punto $A(1,2,3)$ se refleja en el plano $\pi : 2x+y+z-1=0$. ¿Será el rayo reflejado incidente con el punto $B(2,-3,1)$? ¿Y con la recta $x=y+2=z-3$?

ACTIVIDADES DE SELECTIVIDAD

Actividad 73: (2003) Se sabe que los puntos $A(1,0,-1)$, $B(3,2,1)$ y $C(-7,1,5)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo *ABCD*.

a) Calcula las coordenadas del punto D.
b) Halla el área del paralelogramo.

Actividad 74: (2003) Los puntos $A(1,1,0)$ y $B(2,2,1)$ son vértices consecutivos de un rectángulo *ABCD*. Además se sabe que los vértices C y D están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Halla C y D.

Actividad 75: (2003) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,1,-1)$, es paralela al plano $3x-y+z=4$ y corta a la recta intersección de los planos $x+z=4$ y $x-2y+z=1$

Actividad 76: (2003) Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ y=2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x-2y+x=0$.

a) Calcula el haz de planos que contiene a la recta r.
b) Halla el plano que contiene a la recta r y corta al plano π en una recta paralela al plano $z=0$.

Actividad 77: (2003) Considera el punto $P(-2,3,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z+2=0 \\ 2x-2y+z+1=0 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a la recta r.
b) Determina el punto de r más próximo a P.

Actividad 78: (2003) Considera una recta r y un plano π cuyas ecuaciones son respectivamente $\left.\begin{array}{l} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{array}\right\} (t \in \mathbb{R}) \qquad \left.\begin{array}{l} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{array}\right\} (\alpha,\beta \in \mathbb{R})$

a) Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π.
b) Dados los puntos $B(4,4,4)$ y $C(0,0,0)$, halla un punto A en la recta r de manera que el triángulo formado por los puntos A, B y C sea rectángulo en B.

Actividad 79: (2003) Sabiendo que las rectas $r \equiv x=y=z$ y $s \equiv \begin{cases} x=1+\mu \\ y=3+\mu \\ z=-\mu \end{cases}$ se cruzan, halla los puntos A y B de r y s respectivamente, que están a mínima distancia.

Actividad 80: (2003) Determina el punto P de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3}$ que equidista de los planos $\pi_1 \equiv x+y+z+3=0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6-\mu \end{cases}$.

Actividad 81: (2003) Se sabe que el plano π corta a los semiejes positivos en los puntos A, B y C, siendo las longitudes OA, OB y OC de 4 unidades, donde O es el origen de coordenadas.

a) Halla la ecuación del plano π.
b) Calcula el área del triángulo ABC.
c) Obtén un plano paralelo al π que diste 4 unidades del origen de coordenadas.

Actividad 82: (2003) Halla la perpendicular común a las rectas $r \equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=-\alpha \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=\beta \\ y=2+\beta \\ z=0 \end{cases}$

Actividad 83: (2003) Considera el plano $\pi \equiv x-2y+1=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x-3y+z=0 \\ x-y+az+2=0 \end{cases}$

a) Halla el valor de *a* sabiendo que la recta está contenida en el plano.

b) Calcula el ángulo formado por el plano π y la recta $s \equiv \begin{cases} x-3y+z=0 \\ x-y+z+2=0 \end{cases}$.

Actividad 84: (2004) Calcula el área del triángulo de vértices $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$ *y* C, siendo *C* la proyección ortogonal del punto $(1,1,1)$ sobre el plano $x+y+z=1$.

Actividad 85: (2004) Considera el punto $A(0,1,-1)$, la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-z=-4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x-2y-z=2$. Halla la ecuación de la recta que pasa por A, es paralela a π y corta a *r*.

Actividad 86: (2004) Se sabe que el triángulo ABC es rectángulo en el vértice C, que pertenece a la recta de intersección de los planos $y+z=1$ e $y-3z+3=0$ y que sus otros dos vértices son $A(2,0,1)$ y $B(0,-3,0)$. Halla C y el área del triángulo ABC.

Actividad 87: (2004) Halla la perpendicular común a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\alpha \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x=\beta \\ y=\beta-1 \\ z=-1 \end{cases}$$

Actividad 88: (2004) Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x=y \\ z=2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ z=3 \end{cases}$. Halla la ecuación de una recta que corte a r y s, y sea perpendicular al plano $z=0$.

Actividad 89: (2004) Sean los puntos $A(1,0,-1)$ *y* $B(2,-1,3)$.

a) Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por A y por B.
b) Calcula el área del paralelogramo de vértices consecutivos ABCD sabiendo que la recta determinada por los vértices C y D pasa por el origen de coordenadas.

Actividad 90: (2004) Halla la distancia entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y-1=\dfrac{x-2}{-3} \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-1=1-z \\ y=0 \end{cases}$

Actividad 91: (2004) Considera los puntos $P(6,-1,-10)$, $Q(0,2,2)$ *y* R, que es el punto de intersección del plano $\pi \equiv 2x+\lambda y+z-2=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ y=1 \end{cases}$. Determina λ sabiendo que los puntos P, Q y R están alineados.

Actividad 92: (2004) Considera el plano $\pi \equiv 2x+y-z+7=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases}$

a) Halla la ecuación de un plano perpendicular a π y que contenga a la recta r.
b) ¿Hay algún plano paralelo a π y que contenga a la recta r? En caso afirmativo determina sus ecuaciones.

Actividad 93: (2004) Las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+2y+z-4=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y-6=0 \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$ contienen dos lados de un cuadrado.

a) Calcula el área del cuadrado.
b) Halla la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

Actividad 94: (2004) Sean los puntos $A(1,2,1), B(2,3,1), C(0,5,3)$ y $D(-1,4,3)$.

a) Prueba que los cuatro puntos están en el mismo plano. Halla la ecuación de dicho plano.
b) Demuestra que el polígono de vértices consecutivos ABCD es un rectángulo.
c) Calcula el área de dicho rectángulo.

Actividad 95: (2004) Dados los vectores $\vec{u}=(2,1,0)$ y $\vec{v}=(-1,0,1)$, halla un vector unitario $\vec{w}$ que sea coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.

Actividad 96: (2005) Considera el punto $P(2,0,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y=6 \\ z=2 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r.
b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Actividad 97: (2005) Sean los vectores $\overrightarrow{v_1}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{v_2}=(2,1,-1)$ y $\overrightarrow{v_3}=(2,3,-1)$.

a) ¿Son los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ linealmente dependientes?

b) ¿Para qué valores de a el vector $(4,a+3,-2)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$?

c) Calcula un vector unitario y perpendicular a $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$.

Actividad 98: (2005) Sea el punto $P(1,0,-3)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+z=0 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r.
b) Calcula las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

Actividad 99: (2005) Se sabe que los puntos $A(m,0,1), B(0,1,2), C(1,2,3)$ y $D(7,2,1)$ están en un mismo plano.

a) Halla m y calcula la ecuación de dicho plano.
b) ¿Están los puntos *B, C* y *D* alineados?

Actividad 100: (2005) Se sabe que las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} ax+6y+6=0 \\ x-2z+2=0 \end{cases}$ son paralelas.

a) Calcula *a*.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a r y s.

Actividad 101: (2005) Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x+z-2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{2} = y-1 = \frac{z}{3}$.

a) Halla la ecuación del plano π que contiene a s y es paralelo a r.
b) Calcula la distancia de la recta r al plano π.

Actividad 102: (2005) Halla la distancia entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x=6+\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=5-7\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases}$

Actividad 103: (2005) Sean $A(-3,4,0), B(3,6,3)$ y $C(-1,2,1)$ los vértices de un triángulo.

a) Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.
b) Halla la ecuación de la recta que contiene a π y pasa por el origen de coordenadas.
c) Calcula el área del triángulo *ABC*.

Actividad 104: (2005) Considera el punto $A(0,-3,1)$, el plano $\pi \equiv 2x-2y+3z=0$ y la recta $r \equiv x+3 = y = \frac{z-3}{2}$.

a) Determina la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.
b) Determina la ecuación de la recta que pasa por A, es paralela a π y corta a r.

Actividad 105: (2005) Se sabe que las rectas $r \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=b+t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y+z=3 \\ 6x+2z=2 \end{cases}$ están contenidas en un mismo plano.

a) Calcula b.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Actividad 106: (2005) Considera el plano $\pi \equiv x+y+mz=3$ y la recta $r \equiv x = y-1 = \frac{x-2}{2}$

a) Halla m para que r y π sean paralelos.
b) Halla m para que r y π sean perpendiculares.
c) ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π.

Actividad 107: (2005) Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x+y-z+5=0$ y $\pi_2 \equiv x+2y+z+2=0$.

a) Calcula las coordenadas del punto P sabiendo que está en el plano π_1 y que su proyección ortogonal sobre el plano π_2 es el punto $(1,0,-3)$.
b) Calcula el punto simétrico de P respecto del plano π_2.

Actividad 108: (2006) Sea *r* la recta de ecuación $\begin{cases} x = a+t \\ y = 1-2t \\ z = 4-t \end{cases}$ y *s* la recta de ecuación $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{3}$.

a) Calcula el valor de a sabiendo que las rectas r y s se cortan.
b) Calcula el punto de corte.

Actividad 109: (2006) Halla un punto A de la recta r de ecuación $x = y = z$ y un punto B de la recta s de ecuación $x = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ de forma que la distancia de A a B sea mínima.

Actividad 110: (2006) Determina los puntos de la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x = 0 \\ y-1 = \dfrac{z-3}{2} \end{cases}$ que equidistan del plano π de ecuación $x+z=1$ y del plano π' de ecuación $y-z=3$.

Actividad 111: (2006) Considera los puntos $A(1,0,-2)$ y $B(-2,3,1)$.

a) Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales.
b) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C, donde C es un punto de la recta de ecuación $-x = y-1 = z$. ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C?

Actividad 112: (2006) Considera el plano π de ecuación $2x+y-z+2=0$ y la recta r de ecuación $\dfrac{x-5}{-2} = y = \dfrac{z-6}{m}$.

a) Halla la posición relativa de r y π según los valores del parámetro m.
b) Para $m=-3$, halla el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.
c) Para $m=-3$, halla el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

Actividad 113: (2006) Considera el punto $P(3,2,0)$ y la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$.

a) Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y la recta r.
b) Determina las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de la recta r.

Actividad 114: (2006) Sea r la recta de ecuación $\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{4}$ y s la recta de ecuación $\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -x+2y-3z=2 \end{cases}$.

a) Determina la posición relativa de ambas rectas.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

Actividad 115: (2006) Considera la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$.
a) Determina la ecuación del plano que contiene a r y no corta al eje *OZ*.
b) Calcula la proyección ortogonal del punto $A(1,2,1)$ sobre la recta r.

Actividad 116: (2006) Considera los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,4,1)$ y la recta r de ecuación $x=y-2=\frac{z-3}{2}$.
a) Determina un punto C de la recta r que equidiste de los puntos A y B.
b) Calcula el área del triángulo de vértices ABC.

Actividad 117: (2006) Halla la ecuación de un plano que sea paralelo al plano π de ecuación $x+y+z=1$ y forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $18\sqrt{3}$.

Actividad 118: (2006) Sea la recta r de ecuación $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}$ y el plano π de ecuación $x+y+z+1=0$. Calcula el área del triángulo de vértices ABC, siendo A el punto de corte de la recta r y el plano π, B el punto $(2,1,2)$ de la recta r y C la proyección ortogonal del punto B sobre el plano π.

Actividad 119: (2006) Halla las ecuaciones paramétricas de una recta sabiendo que corta a la recta r de ecuación $x=y=z$, es paralela al plano π de ecuación $3x+2y-z=4$ y pasa por el punto $A(1,2,-1)$.

Actividad 120: (2007)

a) Halla los dos puntos que dividen al segmento de extremos $A(1,2,1)$ y $B(-1,0,3)$ en tres partes iguales.
b) Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio.

Actividad 121: (2007) Considera los vectores $\vec{u}=(1,1,m)$, $\vec{v}=(0,m,-1)$ y $\vec{w}=(1,2m,0)$.

a) Determina el valor de m para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.
b) Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, expresa el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Actividad 122: (2007) Considera los planos de ecuaciones $x-y+z=0$ y $x+y-z=2$

a) Determina la recta que pasa por el punto $A(1,2,3)$ y no corta a ninguno de los planos dados.
b) Determina los puntos que equidistan de $A(1,2,3)$ y $B(2,1,0)$ y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.

Actividad 123: (2007) Considera los puntos $A(0,3,-1)$ y $B(0,1,5)$.

a) Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices $A(0,3,-1)$, $B(0,1,5)$ y $C(x,4,3)$ tiene un ángulo recto en C.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0,1,5)$ y $(3,4,3)$ y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

Actividad 124: (2007) Sea r al recta definida por $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-k}{4}=\dfrac{z}{5}$ y s definida por $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$.

a) Halla k sabiendo que las recta r y s se cortan en un punto.
b) Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Actividad 125: (2007) Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $x+2y+3z-1=0$ que corta perpendicularmente a la recta definida por $\begin{cases} x=2z+4 \\ y=2x+3 \end{cases}$ en el punto $(2,1,-1)$.

Actividad 126: (2007) Considera la recta r definida por $\dfrac{x-1}{\alpha}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ y el plano π de ecuación $2x-y+\beta z=0$. Determina α y β en cada uno de los siguientes casos.

a) La recta r es perpendicular al plano π.
b) La recta r está contenida en el plano π.

Actividad 127: (2007) Calcula la distancia del punto $P(1,-3,7)$ a su punto simétrico respecto de la recta definida por $\left.\begin{array}{r} 3x-y-z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\}$.

Actividad 128: (2007)

a) Encuentra la ecuación de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a los planos π_1 de ecuación $x+y+z=3\sqrt{3}$ y π_2 de ecuación $-x+y+z=2$.
b) Halla la distancia de r a π_1.

Actividad 129: (2007) Considera el punto $P(1,0,-2)$ y la recta definida por $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 2x+y-4z=7 \end{cases}$

a) Determina la recta perpendicular a r que pasa por P.
b) Halla las distancia entre el punto P y su simétrico Q respecto de la recta r.

Actividad 130: (2007) Considera el plano π de ecuación $2x+2y-z-6=0$ y el punto $P(1,0,-1)$.

a) Calcula la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π
b) Encuentra el punto simétrico de P respecto del plano π.

Actividad 131: (2007) Considera el plano π de ecuación $2x+2y-z-6=0$ y la recta r definida por $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$.

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con el eje de coordenadas.
b) Calcula, razonadamente, la distancia de la recta al plano π.

Actividad 132: (2008) Los puntos $A(-2,3,1)$, $B(2,-1,3)$ y $C(0,1,-2)$ son vértices consecutivos del paralelogramo *ABCD*.

a) Halla las coordenadas del vértice D.
b) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC.
c) Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.

Actividad 133: (2008) Sea la recta r dada por $\begin{cases} 2x+y-mz=2 \\ x-y-z=-m \end{cases}$ y el plano π definido por $x+my-z=1$.

a) ¿Existe algún valor de *m* para el que π *y* r son paralelos?
b) ¿Para qué valor de *m* la recta está contenida en el plano?
c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando $m=0$?

Actividad 134: (2008) Sea la recta s dada por $\begin{cases} x-z=-1 \\ 2y+z=3 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a la recta s y que contiene a la recta r, dada por $x-1=-y+2=z-3$.
b) Estudia la posición relativa de la recta s y el plano π_2, de ecuación $x+y=3$, y deduce la distancia entre ambos.

Actividad 135: (2008) Dados los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,1,2)$ y $C(1,-1,1)$.

a) Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan.
b) Halla la ecuación del plano que contiene al punto A y es perpendicular a la recta determinada por B y C.

Actividad 136: (2008) Dada la recta r definida por $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.
b) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r.

Actividad 137: (2008) Dados los puntos $A(2,1,1)$ y $B(0,0,1)$, halla los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

Actividad 138: (2008) Considera la recta r definida por $\begin{cases} x=0 \\ 3y+z=3 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} 2x-z=3 \\ y=0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y s.
b) Halla la ecuación general del plano que contiene a s y es paralelo a r.

Actividad 139: (2008) Sea la recta r definida por $\begin{cases} x=1 \\ x-y=0 \end{cases}$ y sean los planos π_1, de ecuación $x+y+z=0$, y π_2, de ecuación $y+z=0$. Halla la recta contenida en π_1, que es paralela a π_2 y que corta a la recta r.

Actividad 140: (2008) Se sabe que los planos de ecuaciones $x+2y+bz=1$, $2x+y+bz=0$, $3x+3y-2z=1$ se cortan en una recta r.

a) Calcula el valor de b.
b) Halla las ecuaciones paramétricas de r.

Actividad 141: (2008) Dados los puntos $A(2,1,-1)$ y $B(-2,3,1)$ y la recta r definida por las ecuaciones $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{cases}$, halla las coordenadas de un punto de la recta r que equidiste de los puntos A y B.

Actividad 142: (2008) Se considera la recta r definida por $mx=y=z+2$, $(m\neq 0)$, y la recta s definida por $\dfrac{x-4}{4}=y-1=\dfrac{z}{2}$.

a) Halla el valor de m para el que r y s son perpendiculares.
b) Deduce razonadamente si existe algún valor de m para el que r y s son paralelas.

Actividad 143: (2008) Considera los puntos $A(2,0,1)$, $B(-1,1,2)$, $C(2,2,1)$ y $D(3,1,0)$

a) Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos B, C y D.
b) Halla el punto simétrico de A respecto del plano π.

Actividad 144: (2009) Considera el punto $A(1,-2,1)$ y la recta r definida por las ecuaciones $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y+z=7 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A.
b) Calcula la distancia del punto A, a la recta r.

Actividad 145: (2009) Considera la recta r definida por $\begin{cases} y=-1 \\ 2x-z=2 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} x=4+3\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=5+4\lambda \end{cases}$. Halla la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Actividad 146: (2009) Considera el punto $P(1,0,0)$, la recta r definida por las $x-3=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$ y la recta s definida por $(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,2,0)$.

a) Estudia la posición relativa de r y s.
b) Halla la ecuación del plano que pasando por P es paralelo a r y s.

Actividad 147: (2009) Considera la recta r definida por $\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} 2y+1=0 \\ x-2z+3=0 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.
b) ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s? Razona la respuesta.

Actividad 148: (2009) Se considera la recta r definida por $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda-2 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} x=\mu \\ y=\mu-1 \\ z=-1 \end{cases}$. Halla la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

Actividad 149: (2009) Considera la recta r definida por $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$.

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas.
b) Determina un punto C de la recta r tal que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ sean perpendiculares.

Actividad 150: (2009) Considera el punto $P(1,0,-2)$, la recta r definida por $\begin{cases} x-2y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$ y el plano π de ecuación $2x+y+3z-1=0$.

a) Halla la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a r y es perpendicular a s.
b) Halla la ecuación de la recta que pasa por P, corta a r y es paralela a π.

Actividad 151: (2009) Considera el plano π de ecuación $3x-2y-2z=7$ y la recta r definida por $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{2}$

a) Determina la ecuación del plano paralelo a π que contiene a r.
b) Halla la ecuación del plano ortogonal a π que contiene a r.

Actividad 152: (2009) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,1,-1)$, es paralela al plano de ecuación $x-y+z=1$ y corta al eje Z.

Actividad 153: (2009) Sea la recta r definida por $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 3x+z=0 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1,1,1)$.
b) Halla los puntos de r cuya distancia al origen es de 4 unidades.

Actividad 154: (2009) Sea la recta r definida por $\begin{cases} x-y=-2 \\ x-z=-3 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} x=1 \\ 2y-z=-2 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y s.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r.

Actividad 155: (2009) Sea el punto $P(2,3,-1)$ y la recta r definida por $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-2y-4z=1 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.
b) Halla el punto de r que está más cerca de P.

Actividad 156: (2010) Considera los puntos $A(1,0,2)$ y $B(-1,2,4)$ y la recta r definida por $\frac{x+2}{2}=y-1=\frac{z-1}{3}$

a) Determina la ecuación del plano formado por los puntos que equidistan de A y de B.
b) Halla la ecuación del plano paralelo a r y que contiene los puntos A y B.

Actividad 157: (2010) Considera los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,-2,2)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,-1,2)$.

a) Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
b) Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C.

Actividad 158: (2010) Sean las rectas r y s de ecuaciones $x-1=y=1-z$, $\begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}$

a) Determina su punto de corte.
b) Halla el ángulo que forman r y s.
c) Determina la ecuación del plano que contiene a r y s.

Actividad 159: (2010) Los puntos $P(2,0,0)$ y $Q(-1,12,4)$ son vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta r de ecuación $\begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$.

a) Calcula las coordenadas del punto S sabiendo que r es perpendicular a la recta que pasa por P y S.
b) Comprueba si el triángulo es rectángulo.

Actividad 160: (2010) Considera los puntos $A(1,2,1)$ y $B(-1,0,3)$

a) Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento AB en tres partes iguales.
b) Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento AB y que pasa por A.

Actividad 161: (2010) Considera el plano π definido por $2x-y+nz=0$ y la recta r dada por $\frac{x-1}{m}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{2}$ con $m\neq 0$.

a) Calcula *m* y *n* para que la recta r sea perpendicular al plano π.
b) Calcula *m* y *n* para que la recta r esté contenida en el plano π.

Actividad 162: (2010) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $6x+3y+2z=6$ con los ejes de coordenadas.

Actividad 163: (2010) Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(-1,2,0)$, $C(2,1,2)$ y $D(t,-2,2)$.

a) Determina el valor de *t* para que A, B, C y D estén en el mismo plano.
b) Halla la ecuación de un plano perpendicular al segmento determinado por A y B que contenga al punto C.

Actividad 164: (2010) Halla la ecuación del plano que es paralelo a la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x-2y+11=0 \\ 2y+z-19=0 \end{cases}$ y contiene a la recta s definida por $\begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}$.

Actividad 165: (2010) Considera los planos π_1, π_2, π_3, dados respectivamente por las ecuaciones $x+y=1$, $ay+z=0$ y $x+(1+a)y+az=a+1$

a) ¿Cuánto ha de valer *a* para que no tengan ningún punto en común?
b) Para $a=0$, determina la posición relativa de los planos.

<u>Actividad 166:</u> (2010) Halla el punto simétrico de $P(1,1,1)$ respecto de la recta r de ecuación $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$.

<u>Actividad 167:</u> (2010) Sean los puntos $A(2,\lambda,\lambda)$, $B(-\lambda,2,0)$ y $C(0,\lambda,\lambda-1)$.

a) ¿Existe algún valor de $\lambda\in\mathbb{R}$ para el que los puntos A, B y C estén alineados? Justifica la respuesta.
b) Para $\lambda=1$ halla la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C. Calcula la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

<u>Actividad 168:</u> (2011) Dados los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,0,1)$, $P(1,-1,1)$, y la recta r definida por $\begin{cases}x-y-2=0\\ z=0\end{cases}$

a) Halla los puntos de la recta r cuya distancia al punto P es de 3 unidades
b) Calcula el área del triángulo ABP.

<u>Actividad 169:</u> (2011) Dados el punto $P(1,1,-1)$ y la recta r de ecuaciones $\begin{cases}x+z=1\\ y+z=0\end{cases}$
a) Halla la ecuación del plano que contiene a r y pasa por P.
b) Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $y+z=0$, que es perpendicular a r y pasa por P.

<u>Actividad 170:</u> (2011) Considera los puntos $A(-1,k,3)$, $B(k+1,0,2)$, $C(1,2,0)$ y $D(2,0,1)$.

a) ¿Existe algún valor de k para el que los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean linealmente dependientes?
b) Calcula los valores de k para los que los puntos A, B, C y D forman un tetraedro de volumen 1.

<u>Actividad 171:</u> (2011) Dados el plano π de ecuación $x+2y-z=0$ y la recta r de ecuaciones $\begin{cases}3x-y=5\\ x+y-4z=-13\end{cases}$

a) Halla el punto de intersección del plano π y la recta r.
b) Halla el punto simétrico del punto $Q(1,-2,3)$ respecto del plano π.

<u>Actividad 172:</u> (2011) Sea el punto $P(2,3,-1)$ y la recta r dada por las ecuaciones $\begin{cases}x=1\\ y=-2\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P.
b) Calcula la distancia del punto P a la recta r y calcula el punto simétrico de P respecto de r.

Actividad 173: (2011) Considera los planos π_1 y π_2 dados respectivamente por las ecuaciones $(x,y,z)=(-2,0,7)+\lambda(1,-2,0)+\mu(0,1,-1)$ y $2x+y-z+5=0$. Determina los puntos de la recta r definida por $x=y+1=\dfrac{z-1}{-3}$ que equidistan de π_1 y π_2

Actividad 174: (2011) Dada la recta r definida por $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=-z+3$ y la recta s definida por $\begin{cases} x=1 \\ 2y-z=-2 \end{cases}$.

a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r.

Actividad 175: (2011) Dada la recta r definida por $\dfrac{x+7}{2}=\dfrac{y-7}{-1}=z$ y la recta s definida por $\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=\lambda \end{cases}$

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas.
b) Calcula la distancia entre r y s.

Actividad 176: (2011) Considera los puntos $A(1,0,2)$ y $B(1,2,-1)$.

a) Halla un punto C de la recta de ecuación $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=z$ que verifica que el triángulo de vértices A, B y C tiene un ángulo recto en B.
b) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y D, donde D es el punto de corte del plano de ecuación $2x-y+3z=6$ con el eje OX.

Actividad 177: (2011) Considera los planos π_1 , π_2 , π_3, dados respectivamente por las ecuaciones $3x-y+z-4=0$, $x-2y+z-1=0$, $x+z-4=0$. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,1,-1)$ es paralela al plano π_1 y corta a la recta intersección de los planos π_2 *y* π_3.

Actividad 178: (2011) Determina el punto simétrico del punto $A(-3,1,6)$ respecto de la recta r de ecuación $x-1=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{2}$.

Actividad 179: (2011) Considera los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(2,1,0)$, y la recta r definida por $\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=2 \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano que es paralelo a r y pasa por A y B.
b) Determina si la recta que pasa por los puntos $P(1,2,1)$ y $Q(3,4,1)$ está contenida en dicho plano.

Actividad 180: (2012) Determina el punto P de la recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto $A(3,2,1)$.

Actividad 181: (2012) Considera el punto $P(1,0,2)$ y la recta r dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}.$$

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r.
b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Actividad 182: (2012) El punto $M(1,-1,0)$ es el centro de un paralelogramo y $A(2,1,-1)$ y $B(0,-2,3)$ son dos vértices consecutivos del mismo.

a) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.
b) Determina uno de los otros vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

Actividad 183: (2012) Calcula de manera razonada la distancia del eje OX a la recta r de ecuaciones $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$

Actividad 184: (2012) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}$ y $s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$

a) Determina la posición relativa de las rectas r y s.
b) Calcula la distancia entre r y s.

Actividad 185: (2012) Los puntos $A(1,1,5)$ y $B(1,1,2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. El vértice C, consecutivo a B, está en la recta $r \equiv x = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+1}{2}$. Determina los vértices C y D.

Actividad 186: (2012) Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$.

a) Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
b) Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.
c) Calcula la distancia del punto D al plano π.

Actividad 187: (2012) Halla el punto simétrico de $P(2,1,-5)$ respecto de la recta r definida por $\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$

Actividad 188: (2012) De un paralelogramo ABCD conocemos tres vértices $A(2,-1,0)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,2)$.

a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.
b) Halla el área de dicho paralelogramo.
c) Calcula el vértice D.

Actividad 189: (2012) Sean r y s las rectas: $r \equiv \begin{cases} x+y-z=6 \\ x+z=3 \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{6} = \dfrac{z}{2}$

a) Determina el punto de intersección de ambas rectas.
b) Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

Actividad 190: (2012) Se consideran los vectores $\vec{u} = (k,1,1)$, $\vec{v} = (2,1,-2)$ y $\vec{w} = (1,1,k)$, donde k es un número real.

a) Determina los valores de k para los que $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.
b) Determina los valores de k para los que $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{v}-\vec{w}$ son ortogonales.
c) Para $k=-1$, determina aquellos vectores que son ortogonales a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y tienen módulo 1.

Actividad 191: (2012) Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{2-y}{2} = z-3$ cuya distancia al plano $\pi \equiv x-2y+2z=1$ vale cuatro unidades.

17.- SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES.

Actividad 1:

a) $(1,14,0)$ b) $(10,-1,-3)$ c) $(-36,13,11)$

Actividad 2: Basta hacerlo. $\vec{v} = (6,-2,4)_B$

Actividad 3:

a) $\vec{u} = \dfrac{-1}{2}\vec{v} + 0\vec{w}$ b) No c) No

Actividad 4: $k=-1$. $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$

Actividad 5: Sí

Actividad 6: $D(1,-5,-4)$

Actividad 7: Escaleno

Actividad 8:

a) –11 b) $\sqrt{30}$ c) 3 d) 132º 1' 26''

Actividad 9: $x = 2 \;\; e \;\; y = -3$

Actividad 10: Respuesta libre

Actividad 11: $\overrightarrow{n_u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, 0 \right)$

Actividad 12:

a) $(4,-8,4)$ b) –2

Actividad 13:

a) $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{11}$, $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{29}$ b) $\vec{u} \times \vec{v} = (7,-14,7)$ c) $\vec{u} \times \vec{v} = (1,-2,1)$ d) $A = 7\sqrt{6}\,u^2$

Actividad 14:

a) $D\left(\frac{-7}{3}, \frac{16}{3}, \frac{8}{3} \right)$ b) $E(1,7,1)$

Actividad 15: $\frac{43}{3}\,u^3$

Actividad 16: $512\,u^3$. $D(0,0,0)$, $E(8,0,8)$, $G(0,8,8)$ y $H(0,0,8)$

Actividad 17: $\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$

Actividad 18: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-4}{0}$

Actividad 19: $\begin{cases} y = -5 \\ x - 3z = -1 \end{cases}$

Actividad 20: $\begin{cases} x = -5 - 7\lambda \\ y = 3 + 6\lambda \\ z = 7 + 4\lambda \end{cases}$, $\frac{x+5}{-7} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-7}{4}$, $\begin{cases} 6x + 7y + 9 = 0 \\ 2y - 3z + 15 = 0 \end{cases}$

Actividad 21: $\pi:\begin{cases} x = 2\lambda - \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = -1 + \lambda + \mu \end{cases}$, $\pi: x + 3y - 2z - 5 = 0$

Actividad 22:

a) Son coplanarios siendo el plano $\pi:\begin{cases} x = 3\lambda + 2\mu \\ y = 3\lambda + 3\mu \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$ b) No son coplanarios.

Actividad 23: $\pi:\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 + 5\lambda + 2\mu \\ z = 1 - 3\lambda + 3\mu \end{cases}$

Actividad 24: $\pi:\begin{cases} x = 2 - 2\lambda + 8\mu \\ y = -3 + \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$

Actividad 25: $\pi: -3x + y + z + 1 = 0$

Actividad 26:

a) Paralelas b) Se cruzan

Actividad 27:

a) Coincidentes b) Paralelos c) Secantes

Actividad 28:

a) Contenida b) Paralela c) Secantes

Actividad 29: $\lambda(x + 2y - 5) + \mu(3x + z - 5) = 0$

Actividad 30:

a) $\pi: 13x - 17y + z = 27$ b) $\pi:\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 5 + 3\lambda - 4\mu \\ z = 1 + \lambda - 2\mu \end{cases}$

Actividad 31: 74º 16’ 12’’

Actividad 32: 22º 48’ 0’’

Actividad 33: 60º

Actividad 34: $\sqrt{21}u$

Actividad 35: $\frac{22}{\sqrt{6}}u$

Actividad 36: $\frac{10}{\sqrt{6}}u$

Actividad 37: $P'(80/29, -11/29, 56/29)$

Actividad 38: $P'(15/7, -16/7, -18/7)$

Actividad 39: $\begin{cases} x-y-2z=5 \\ x-y+z=2 \end{cases}$

Actividad 40: $\begin{cases} 20x+51y+17z=85 \\ 18x+13y+114z=225 \end{cases}$

Actividad 41: $\begin{cases} 3x-3y-z=5 \\ 7x+4y-z=9 \end{cases}$

Actividad 42:

a) $(-4,4,1)$ y $(-5,-4,-3)$

b) $a=2$ y $b=-7$

Actividad 43:

a) Linealmente independientes.

b) Linealmente dependientes.

Actividad 44:

a) $k=-2$

b) $k=-5/8$

Actividad 45: $\forall a \in \mathbb{R} - \{0,1\}$

Actividad 46:

a) -3

b) $\sqrt{14}$ y $5\sqrt{2}$

c) 96º 30’ 39’’

Actividad 47:

a) $m=-2$

b) $m=2/5$

Actividad 48: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$

Actividad 49: $111u^3$

Actividad 50: $a=b$

Actividad 51:

a) $a=0$, $a=-1$, $a=1$ b) No depende linealmente. c) Sí, por el apartado a).

Actividad 52: $\vec{u}=\left(\sqrt{5}\ ,-2\sqrt{5}\ ,3\sqrt{5}\right)$

Actividad 53: $\vec{v}=\left(-3,2,1\right)$

Actividad 54:

a) $3u^2$ b) $18u^3$

Actividad 55:

a) Escaleno. b) $(\sqrt{3}+\sqrt{6}+1)u$

c) $\hat{A}=19^{\circ}\,28'\,16''$, $\hat{B}=125^{\circ}\,15'\,52''$ y $\hat{C}=35^{\circ}\,15'\,52''$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}u^2$

Actividad 56: $\sqrt{213}\ u^2$

Actividad 57: $x-2y+z=0$

Actividad 58: $\pi_1:3x+2y-12z+10=0$

Actividad 59: $4x-11y+7z-3=0$

Actividad 60: $x-1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-1}$

Actividad 61: Es el plano: $x-y+2z+1=0$ y la distancia es $\frac{4\sqrt{6}}{3}u$

Actividad 62: El punto es $\left(5,1,2\right)$ y la distancia es $2\sqrt{2}u$.

Actividad 63: La recta es $r:\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-3}$ y los puntos son $\left(7,8,-3\right)\ y\ \left(-9,-4,9\right)$

Actividad 64: $s:\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z-3}{-5}$ y $d\left(r,s\right)=\frac{\sqrt{632}}{\sqrt{13}}u$

Actividad 65: Las rectas son secantes y el ángulo que forman es de 6º 58’ 57’’.

Actividad 66: El ángulo es de 90º

Actividad 67: $Q\left(18/5,16/5,3\right)$

Actividad 68: $A'(2,6,-3)$

Actividad 69:

a) $C(-1,-1,1)$ y $D(0,-2,2)$ b) El plano es: $x-y-2z+2=0$ c) $A=2\sqrt{3}\,u^2$

Actividad 70: El área es $3u^2$, el volumen es $18u^3$ y la distancia entre sus bases es $6u$.

Actividad 71: El volumen es $\frac{2}{3}u^3$.

Actividad 72: Con ninguno de los dos.

Actividad 73:

a) $D(-9,-1,3)$ b) $A=\sqrt{1208}\,u^2$

Actividad 74: $C\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$ y $D\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

Actividad 75: $r:\frac{x-3}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{11}$

Actividad 76:

a) $x+(1+\alpha)y-z-1-2\alpha=0$ b) $x-2y-z+5=0$

Actividad 77:

a) $5x+y+4z+7=0$ b) $Q\left(\frac{-14}{13},\frac{-9}{13},\frac{-3}{13}\right)$

Actividad 78:

a) $r\subset\pi$ b) $A(6,6,0)$

Actividad 79: $A(1,1,1)$, $B(0,2,1)$

Actividad 80: $P(-1,-2,-3)$

Actividad 81:

a) $x+y+z-4=0$ b) $A=\sqrt{192}\,u^2$ c) $x+y+z\pm4\sqrt{3}=0$

Actividad 82: $\frac{x+1}{-2}=y=\frac{z}{-1}$

Actividad 83:

a) $a=-1$ b) $\alpha = 18º25'48''$

Actividad 84: $A=\frac{\sqrt{3}}{6}u^2$

Actividad 85: $\frac{x}{14}=\frac{y-1}{13}=\frac{z+1}{-12}$

Actividad 86: $C(0,0,1)\quad y\quad A=\sqrt{10}\,u^2$

Actividad 87: $x-1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{0}$

Actividad 88: $\begin{cases} x=1/2 \\ y=1/2 \\ z=2+\lambda \end{cases}$

Actividad 89:

a) $\sqrt{\frac{3}{2}}\,u$ b) $3\sqrt{3}\,u^2$

Actividad 90: $\frac{3}{\sqrt{11}}u^2$

Actividad 91: $\lambda=0$

Actividad 92:

a) $4x-7y+z+2=0$ b) $-2x-y+z+2=0$

Actividad 93:

a) $8u^2$ b) $z=0$

Actividad 94:

a) $x-y+2z-1=0$ b) Hacerlo c) $2\sqrt{6}\,u^2$

Actividad 95: $\vec{w}=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

Actividad 96:

a) $x+2y-4z+2=0$ b) $P'\left(\frac{18}{5},\frac{16}{5},3\right)$

Actividad 97:

a) Sí b) $\forall a \in \mathbb{R}$ c) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

Actividad 98:

a) $\pi : -x - 2y + z + 4 = 0$ b) $P'(1,2,1)$

Actividad 99:

a) $m = -1 \quad y \quad \pi : x - 4y + 3z - 2 = 0$ b) No

Actividad 100:

a) $a = 3$ b) $\pi : x + 6y + 4z + 2 = 0$

Actividad 101:

a) $\pi : 4x - 5y - z + 5 = 0$ b) $\frac{8}{\sqrt{42}} u$

Actividad 102: $\frac{70}{\sqrt{245}} u$

Actividad 103:

a) $\pi : x - 2z + 3 = 0$ b) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = -2\lambda \end{cases}$ c) $4\sqrt{5}\, u^2$

Actividad 104:

a) $2x + 4y - 3z + 15 = 0$ b) $\frac{x}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{2}$

Actividad 105:

a) $b = 10$ b) $5x + 4y - z + 9 = 0$

Actividad 106:

a) $m = -1$ b) $m = 2$ c) No

Actividad 107:

a) $P\left(\frac{-7}{3}, \frac{-20}{3}, \frac{-19}{3}\right)$ b) $P'\left(\frac{13}{3}, \frac{20}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Actividad 108:

a) $a = 2$ b) $A(3,-1,3)$

Actividad 109: $A\left(\frac{-1}{7},\frac{-1}{7},\frac{-1}{7}\right)$, $B\left(\frac{2}{7},\frac{-2}{7},\frac{-3}{7}\right)$

Actividad 110: $P_1\left(0,\frac{-4}{3},\frac{-5}{3}\right)$, $P_2(0,4,9)$

Actividad 111:

a) $M(0,1,-1)$, $N(-1,2,0)$ b) $A=\frac{3\sqrt{2}}{2}u^2$. *No depende.*

Actividad 112:

a) $m=-3 \rightarrow$ *Paralela*; $m\neq -3 \rightarrow$ *Secante* b) $-x+4y+2z-7=0$ c) $2x+y-z-4=0$

Actividad 113:

a) $x+2y-4z-7=0$ b) $Q(-1,0,-2)$

Actividad 114:

a) Se cruzan b) $-9x+2y+5z+49=0$

Actividad 115:

a) $2x+5y-3=0$ b) $\left(\frac{1}{19},\frac{11}{19},\frac{7}{19}\right)$

Actividad 116:

a) $C(-1,1,1)$ b) $A=\frac{\sqrt{101}}{2}u^2$

Actividad 117: $\pi_1: x+y+z=6$, $\pi_2: x+y+z=-6$

Actividad 118: $\frac{16}{9}\sqrt{6}\,u^2$

Actividad 119: $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2 \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$

Actividad 120:

a) $M\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$, $N\left(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$ b) $x+y-z+1=0$

Actividad 121:

a) $m = 1$ b) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

Actividad 122:

a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ b) $C\left(1, \frac{17}{8}, \frac{9}{8}\right)$

Actividad 123:

a) $x = \pm\sqrt{5}$ b) $13x - 7y + 9z - 38 = 0$

Actividad 124:

a) $k = \frac{-4}{7}$ b) $x - 7y + 5z - 6 = 0$

Actividad 125: $\begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$

Actividad 126:

a) $\alpha = -8$, $\beta = -1/2$ b) $\alpha = 4$, $\beta = -2$

Actividad 127: $d = 2\sqrt{3}\,u$

Actividad 128:

a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ b) $d = 3u$

Actividad 129:

a) $x - 1 = \frac{y}{-1} = z + 2$ b) $2\sqrt{3}\,u$

Actividad 130:

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ b) $P'\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-5}{3}\right)$

Actividad 131:

a) $A = \frac{27}{2}u^2$ b) $d = 2u$

Actividad 132:

a) $D(-4,5,-4)$ b) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-3}$ c) $x+y-1=0$

Actividad 133:

a) $m=2$ b) $m=-1$ c) Secantes

Actividad 134:

a) $\pi_1 : x-z+2=0$ b) Secantes, luego $d=0u$

Actividad 135:

a) $A=2u^2$ b) $2y+z-2=0$

Actividad 136:

a) $7x-3y-5z=0$ b) $2x+3y+z=0$

Actividad 137: $C\left(\sqrt{11},0,0\right)$ o bien $C\left(-\sqrt{11},0,0\right)$

Actividad 138:

a) Se cruzan b) $-2x+3y+z+3=0$

Actividad 139: $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=-2+t \end{cases}$

Actividad 140:

a) $b=-1$ b) $r:\begin{cases} x=-1/3+\lambda \\ y=2/3+\lambda \\ z=3\lambda \end{cases}$

Actividad 141: $C(-1,-1,1)$

Actividad 142:

a) $m=\frac{-4}{3}$ b) No existe.

Actividad 143:

a) $x-y+2z-2=0$ b) $A'\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3}\right)$

Actividad 144:

a) $-x+y+z+2=0$ b) $d=\sqrt{6}\,u$

Actividad 145: $2x+2y-z=0$

Actividad 146:

a) Se cruzan b) $2x+y+2z-2=0$

Actividad 147:

a) $x-3y+2z+5=0$ b) No existe

Actividad 148: $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1 \end{cases}$

Actividad 149:

a) Secantes b) $C(2,0,0)$ o bien $C(1,1,-1)$

Actividad 150:

a) $x-2y-1=0$ b) $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{-5}$

Actividad 151:

a) $3x-2y-2z-4=0$ b) $2x+10y-7z+20=0$

Actividad 152: $\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1 \end{cases}$

Actividad 153:

a) $2x-3y-6z+7=0$ b) $A\left(\dfrac{8}{7},\dfrac{-12}{7},\dfrac{-24}{7}\right)$, $B\left(\dfrac{-8}{7},\dfrac{12}{7},\dfrac{24}{7}\right)$

Actividad 154:

a) Se cruzan b) $x-2y+z-3=0$

Actividad 155:

a) $x-y-2z-1=0$ b) $B\left(1,\dfrac{14}{5},\dfrac{-7}{5}\right)$

Actividad 156:

a) $-x+y+z-4=0$ b) $2x+5y-3z+4=0$

Actividad 157:

a) $V = \frac{5}{6}u^3$ b) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{5}$

Actividad 158:

a) $(3,2,-1)$ b) 19º 28' 12'' c) $y + z - 1 = 0$

Actividad 159:

a) $S(6,0,3)$ b) Es rectángulo en P

Actividad 160:

a) $M\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$, $N\left(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$ b) $x + y - z - 2 = 0$

Actividad 161:

a) $m = -8$, $n = -1/2$ b) $m = 4$, $n = -2$

Actividad 162: $A = \frac{7}{2}u^2$

Actividad 163:

a) $t = 5$ b) $2x - y + z - 5 = 0$

Actividad 164: $8x + 6y + 11z - 18 = 0$

Actividad 165:

a) $a = 1$ b) Dos coinciden y el tercero los corta.

Actividad 166: $P'\left(\frac{9}{7},\frac{-4}{7},\frac{-22}{7}\right)$

Actividad 167:

a) $\lambda = 2$ b) $x + y - 2z - 1 = 0$, $d = \frac{1}{\sqrt{6}}u$

Actividad 168:

a) $C_1(3,1,0)$, $C_2(-1,-3,0)$ b) $A = \frac{\sqrt{3}}{2}u^2$

Actividad 169:

a) $y+z=0$ b) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$

Actividad 170:

a) No b) $k=-1\pm\sqrt{5}$

Actividad 171:

a) $(2,1,4)$ b) $Q'(3,2,1)$

Actividad 172:

a) $-2y+z+7=0$ b) $d=\sqrt{\frac{6}{5}}u$, $P'\left(0,\frac{13}{5},\frac{-9}{5}\right)$

Actividad 173: $A(0,-1,1)$ o bien $A(-1,-2,4)$

Actividad 174:

a) $x-2y-z=0$ b) $5x-6y+3z-11=0$

Actividad 175:

a) $\begin{cases} x=5+\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=6 \end{cases}$ b) $d=3\sqrt{5}\,u$

Actividad 176:

a) $C(22,14,7)$ b) $A=\frac{\sqrt{68}}{2}u^2$

Actividad 177: $\frac{x-3}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{11}$

Actividad 178: $A'(9,1,0)$

Actividad 179:

a) $y-z-1=0$ b) No

Actividad 180: $P(1,1,2)$

Actividad 181:

a) $x+2y-z+1=0$

b) $P'\left(\frac{10}{3},\frac{2}{3},\frac{17}{3}\right)$

Actividad 182:

a) $5x-2y+z-7=0$

b) $D(2,0,-3)$, $A=\sqrt{120}\,u^2$

Actividad 183: $d=4u$

Actividad 184:

a) Paralelas

b) $d(r,s)=12\sqrt{\frac{2}{17}}\,u$

Actividad 185: $C\left(\frac{3}{2},3,2\right)$, $D\left(\frac{3}{2},3,5\right)$

Actividad 186:

a) $2x+3y+z-1=0$

b) Hacerlo

c) $\frac{\sqrt{14}}{2}u^2$

Actividad 187: $P'(-6,-1,1)$

Actividad 188:

a) $x-1=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$

b) $A=4\sqrt{6}\,u$

c) $D(4,-1,2)$

Actividad 189:

a) $M(-1,11,4)$

b) $\pi:-2x+y-4z+3=0$

Actividad 190:

a) $k=\pm 1$

b) $k=-2$

c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Actividad 191: $(5,0,4)$ o bien $\left(\frac{-23}{5},\frac{24}{5},\frac{8}{5}\right)$

NOTA IMPORTANTE: Las actividades de la 73 a la 191 son de Selectividad. En las dos páginas web siguientes se encuentran las soluciones de todos los exámenes de forma detallada:

- ***http://emestrada.wordpress.com/2010/02/20/matematicas-ii-problemas-selectividad-resueltos/***
- ***http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/***