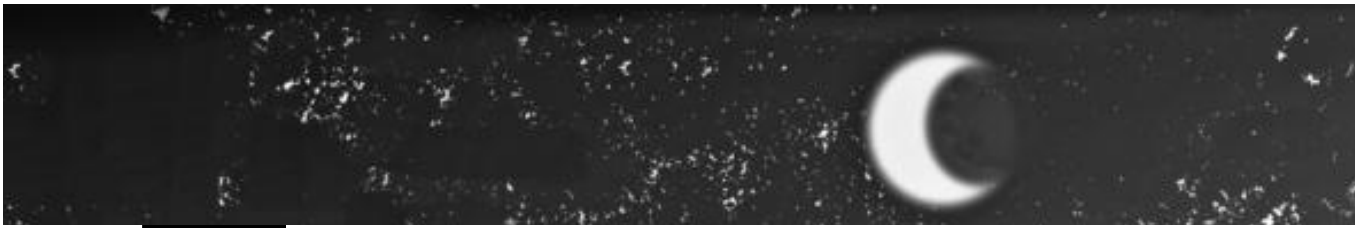


4 Geometría en el espacio

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Nocilla Experience

Marc estudia con detenimiento el libro que tiene delante, *Guía agrícola Philips 1968*; la encontró entre los trastos viejos de su padre y se la quedó. Observa de reojo la azotea a través de la puerta de su caseta. Vive ahí. Un tinglado, situado en lo alto de un edificio de 8 plantas, que ha ido construyendo con diferentes hojas de latas, bidones, trozos de cartones petroleados y fragmentos de uralitas. Todo ensamblado de tal modo que las 4 paredes configuran un mosaico de palabras e iconos cuarteados de aceite La Giralda, lubricantes Repsol, Beba Pepsi o sanitarios Roca. A veces los mira, y entre todo ese hermanamiento de marcas comerciales intenta descubrir mapas, recorridos, señales latentes de otros territorios artificiales. En la azotea, que ningún vecino ya frecuenta, hay una serie de alambres que van de lado a lado en los que en vez de ropa colgada hay hojas escritas, a mano y por una sola cara, con fórmulas matemáticas; cada una sujeta de una pinza. Cuando sopla el viento [siempre sopla] y se mira de frente el conjunto de hojas, éstas forman una especie de mar de tinta teórico y convulso. Si se ven desde atrás, las caras en blanco de las DIN-A4 parecen la más exacta simbología de un desierto. Las ve aletear y piensa, Es fascinante mi teoría. Cierra la *Guía agrícola Philips 1968*, la deja sobre la mesa, sale y descuelga unas cuantas hojas de los cables número 1, 4 y 7. Antes de volver a entrar se acoda en la barandilla y piensa en el Mundial que nunca hemos ganado, en que lo más plano que existe sobre la Tierra son las vías de los trenes, en que la música de *El acorazado Potemkin*, si te fijas, es el «Purple Haze» de Jimi Hendrix versioneado. Después entra en la caseta, que tiembla cuando cierra la puerta de un golpe. [...]

Domingo, son más de las 4 de la tarde, la gente está en la playa; él aún no ha comido. Por entre las uralitas de la caseta entra un pincel de luz que incide sobre la tecla 0 del PC. Tiene sonando el CD de Sufjan Stevens, *The Avalanche,* [...] mientras termina de dar los últimos retoques a una demostración de la cual se siente muy satisfecho. Sale a la azotea con el folio en la mano, y en los tendales que conforman la retícula lo cuelga en la posición, $x = 10$, $y = 15$. No hay nada mejor para comprobar la firmeza de una teoría que airearla antes de propagarla, piensa.

AGUSTÍN FERNÁNDEZ MALLO

Nocilla Experience
Agustín Fernández Mallo

El protagonista de esta novela, cuyo autor es licenciado en ciencias Físicas, es una especie de ermitaño moderno que vive en una especie de chabola que ha construido en la azotea de una casa.

El asunto que lo distrae es una teoría que hace años que tiene en marcha, enmarcada en algo más amplio que él denomina socio-física teórica. El radio de acción, el banco de pruebas para su constatación, no pasa de 2 o 3 manzanas en torno a su azotea. En el barrio encuentra todo cuanto necesita: comestibles, conversaciones banales y ropa de temporada en tergal. La pretensión de su teoría consiste en demostrar con términos matemáticos que la soledad es una propiedad, un estado, connatural a los seres humanos superiores, y para ello se fundamenta en una evidencia física bien conocida por los científicos: sólo existen en la naturaleza dos clases de partículas, los fermiones [electrones y protones, por ejemplo] y los bosones [fotones, gluones, gravitones, etcétera]. Los fermiones se caracterizan por el hecho, ampliamente demostrado, de que no puede haber 2 o más en un mismo estado, o lo que es lo mismo, que no pueden estar juntos. La virtud de los bosones es justamente la contraria: no sólo pueden estar varios en un mismo estado y juntos, sino que buscan ese apilamiento, lo necesitan. Así, Marc toma como reflejo y patrón esa clasificación para postular la existencia de personas solitarias que, como los fermiones, no soportan la presencia de nadie. Son éstas las únicas que le merecen respeto alguno. Aparte, están las otras, las que como los bosones se arraciman en cuanto pueden bajo asociaciones, grupos y demás apiñamientos a fin de enmascarar en la masa su genética mediocridad. A estos últimos Marc los desprecia, por eso no es extraño que a él no le importe cómo marcha el mundo, ni si hay pobreza o riqueza, ni si sube o baja el precio de la fruta o el pescado, ni las manifestaciones, colectividades, partidos políticos, religiones u ONGs. Por supuesto, tiene por auténticos modelos de vida elevada, de vida esencialmente fermiónica, a Nietzsche, Wittgenstein, Unabomber, Cioran y sobre todo a Henry J. Darger, aquel hombre que jamás salió de su habitación de Chicago. Además, Marc, como todo fermión, hace tiempo que dejó de frecuentar mujeres y amigos. Su única conexión estable con el mundo es la red internauta.

Pese a su aislamiento, a Marc le suceden algunas cosas interesantes, como la visita del gran escritor Julio Cortázar, convertido por el autor de la novela en un personaje de ficción.

¿Cómo ha logrado Marc *convertir* el conjunto de tendales de la azotea en un sistema de coordenadas cartesianas?
Ahora imagina que Marc ya los llenó todos y, para tener más espacio, decide poner otro cable debajo de cada uno de los que ya había, a media altura. Explica cómo asignarías las coordenadas para determinar la posición de los folios que cuelgue.

Ha numerado los cables por orden y ha asignado una numeración, también ordenada, a las pinzas que utiliza para colgar las hojas.

Se podrían mantener las dos coordenadas que ya tenía cada folio y añadir una tercera coordenada que fuese 1 si este se encontrara en los cables que ya había ó 2 si se coloca en la nueva serie de alambres.

Geometría en el espacio

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Dados los puntos $A(0, 3)$, $B(2, 1)$, $C(-2, 2)$ y $D(-3, 4)$, halla los vectores.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (2, -2) - (-1, 2) = (3, -4)$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} = (-2, -1) + (1, -2) = (-1, -3)$

c) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} = (-5, 3) + (2, 1) = (-3, 4)$

002 Dados $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 3)$, realiza estas operaciones de vectores.

a) $\vec{u} - 3\vec{v}$ b) $5\vec{u} + \vec{v}$ c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$

a) $\vec{u} - 3\vec{v} = (2, -1) - 3(0, 3) = (2, -10)$

b) $5\vec{u} + \vec{v} = 5(2, -1) + (0, 3) = (10, -2)$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v} = -(2, -1) + 2(0, 3) = (-2, 7)$

$\vec{v}$

003 Calcula estos determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -4$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$

004 Halla el rango de estas matrices.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

a) Rango $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$

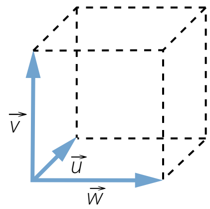
c) Rango $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} = 3$

b) Rango $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} = 1$

d) Rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = 2$

ACTIVIDADES

001 Dados los siguientes vectores, calcula.



a) $\vec{u}+\vec{v}$

b) $\vec{v}-\vec{w}$

c) $\vec{u}+\vec{w}$

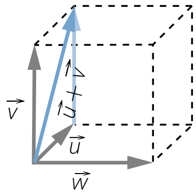
d) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

e) $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$

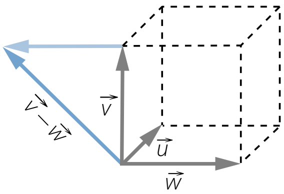
f) $\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}$

g) $(\vec{u}+\vec{v})+(\vec{v}-\vec{w})$

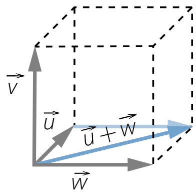
a)



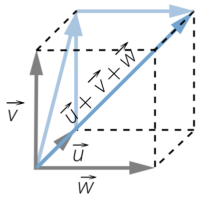
b)



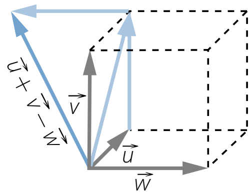
c)

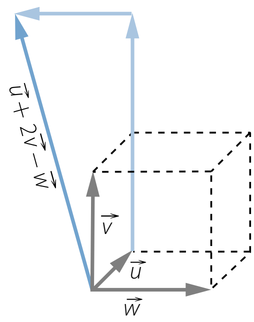


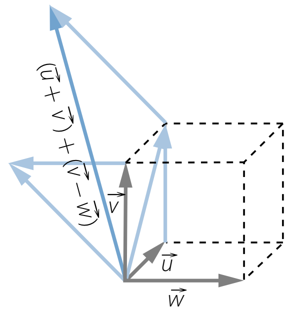
d)



e)



f) 

g) 

002 **Demuestra que el opuesto de cualquier vector coincide con el vector multiplicado por -1.**

$$\text{Op}(\vec{v}) = -1 \cdot \vec{v}$$

Deduce que el opuesto del opuesto de un vector es el mismo vector: $\text{Op}(\text{Op}(\vec{u})) = \vec{u}$

$-1 \cdot \vec{v} = -\vec{v} = \text{Op}(\vec{v})$ $\qquad$ $\text{Op}(\text{Op}(\vec{u})) = \text{Op}(-\vec{u}) = -(-\vec{u}) = \vec{u}$

003 **Comprueba las siguientes igualdades.**

a) $\text{Op}(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$

b) $\text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} - \vec{v})))) = -\vec{v}$

a) $\text{Op}(\vec{u} - \vec{v}) = -(\vec{u} - \vec{v}) = -\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} - \vec{u}$

b) $\text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} - \vec{v})))) = \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \vec{v} - \vec{u}))) =$
$= \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{v}))) = \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} - \vec{v})) =$
$= \text{Op}(\vec{u} + \vec{v} - \vec{u}) = \text{Op}(\vec{v}) = -\vec{v}$

004 **¿Es cierto que si tres vectores son linealmente independientes, dos a dos, entonces son linealmente independientes considerando los tres a la vez?**

No necesariamente, ya que si son linealmente independientes dos a dos tienen distintas direcciones, pero la combinación lineal de un par de ellos puede dar como resultado el tercero de modo que sean linealmente dependientes.

005 **Comprueba si los vectores cuya expresión respecto de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es (1, 0, 2), (2, 0, 1) y (1, 0, 5), son base del espacio.**

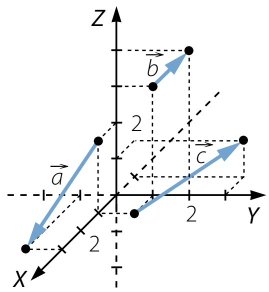
Los vectores forman una base si existen tres valores λ_1, λ_2 y λ_3 tales que:

$\lambda_1(1, 0, 2) + \lambda_2(2, 0, 1) + \lambda_3(1, 0, 5) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Los vectores no son linealmente independientes y no forman una base.

006 Calcula las coordenadas y el módulo de estos vectores:



$\vec{a} = (3, -1, 0) - (1, 0, 2) = (2, -1, -2)$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$

$\vec{b} = (0, 2, 4) - (0, 1, 3) = (0, 1, 1)$

$|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\vec{c} = (-1, 3, 1) - (1, 1, 0) = (-2, 2, 1)$

$|\vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3$

007 Dada la siguiente igualdad de vectores:

$$(1, 2, 3) + (3, 2, 1) = (4, 4, 4)$$

comprueba esta desigualdad de sus módulos:

$$|(1, 2, 3)| + |(3, 2, 0)| \geq |(4, 4, 4)|$$

$|(1, 2, 3)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$|(3, 2, 0)| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13}$

$|(4, 4, 4)| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}$

$|(1, 2, 3)| + |(3, 2, 0)| = \sqrt{14} + \sqrt{13} \geq 4\sqrt{3} = |(4, 4, 4)|$

008 Demuestra que para todo número real λ:

$$|(\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot c)| = |\lambda| \cdot |(a, b, c)|$$

$$|(\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot c)| = \sqrt{(\lambda \cdot a)^2 + (\lambda \cdot b)^2 + (\lambda \cdot c)^2} =$$
$$= \sqrt{\lambda^2 (a^2 + b^2 + c^2)} = |\lambda| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} =$$
$$= |\lambda| \cdot |(a, b, c)|$$

009 Realiza las siguientes operaciones de vectores.

$\vec{u}_1 = (0, 1, 1)$ $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$ $\vec{u}_3 = (1, 1, 0)$

a) $\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$ b) $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3$

a) $\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3 = (0, 1, 1) + 2(1, 0, 1) + 3(1, 1, 0) = (5, 4, 3)$

b) $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (0, 1, 1) - (1, 0, 1) + (1, 1, 0) = (0, 2, 0)$

010 Halla dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que:

$$\vec{u}-\vec{v}=(0,0,1) \qquad \vec{u}+\vec{v}=(1,0,0)$$

¿Cuántos vectores en el espacio verifican estas dos condiciones?

$$2\vec{u}=(\vec{u}-\vec{v})+(\vec{u}+\vec{v})=(0,0,1)+(1,0,0)=(1,0,1)$$

$$2\vec{u}=(1,0,1)\rightarrow\vec{u}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$$

$$2\vec{v}=(\vec{u}+\vec{v})-(\vec{u}-\vec{v})=(1,0,0)-(0,0,1)=(1,0,-1)$$

$$2\vec{v}=(1,0,-1)\rightarrow\vec{v}=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son únicos.

011 Determina el número máximo de vectores independientes, y elige vectores que lo sean.

$$\vec{v}_1=(1,-1,0) \qquad \vec{v}_2=(0,1,-1) \qquad \vec{v}_3=(3,0,-3) \qquad \vec{v}_4=(1,1,1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=3$$

Hay tres vectores linealmente independientes.

$\vec{v}_1=(1,-1,0)$, $\vec{v}_2=(0,1,-1)$ y $\vec{v}_4=(1,1,1)$ son vectores linealmente independientes.

012 Comprueba si estas colecciones de vectores son base del espacio o no.

a) $\vec{v}_1=(2,-1,0)$, $\vec{v}_2=(2,1,0)$ y $\vec{v}_3=(2,0,1)$

b) $\vec{v}_1=(3,-7,1)$, $\vec{v}_2=(-1,4,0)$ y $\vec{v}_3=(5,-10,2)$

a) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=3$$

Los vectores forman una base.

b) $$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & -10 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=5\neq 0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & -10 & 2 \end{pmatrix}=2$$

Los vectores no forman una base.

013 **Halla un punto C en el segmento AB, determinado por los puntos $A(-3, 0, 1)$ y $B(0, 6, 5)$, de modo que $\overline{AC}$ sea la mitad que $\overline{CB}$.**

Sea $C(c_1, c_2, c_3)$ entonces: $\overrightarrow{AC} = (c_1 + 3, c_2, c_3 - 1)$ y $\overrightarrow{CB} = (-c_1, 6 - c_2, 5 - c_3)$

Si $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB} \rightarrow (c_1 + 3, c_2, c_3 - 1) = \frac{1}{2} \cdot (-c_1, 6 - c_2, 5 - c_3)$

$$\left.\begin{array}{r} c_1 + 3 = -\frac{1}{2}c_1 \\ c_2 = \frac{1}{2}(6 - c_2) \\ c_3 - 1 = \frac{1}{2}(5 - c_3) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = -2 \\ c_2 = \ \ 2 \\ c_3 = \frac{7}{3} \end{array}\right. \rightarrow C\left(-2, 2, \frac{7}{3}\right)$$

014 **Encuentra un punto D, para que el polígono $ABCD$ sea un paralelogramo.**

$A(0, 0, 0)$ $\quad$ $B(2, -1, 3)$ $\quad$ $C(-1, 2, 1)$

Respuesta abierta.

Por ejemplo:

Considerando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, el punto D que buscamos es:

$D = B + \overrightarrow{AC} = C + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 3)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1)$

$D = B + \overrightarrow{AC} = (2, -1, 3) + (-1, 2, 1) = (1, 1, 4)$

015 **Calcula la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto y tiene el vector director indicado.**

a) $A(2, -1, -1)$ y $\vec{v} = (-2, -4, 4)$ $\qquad$ b) $A(1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (-2, -2, -2)$

a) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v} \rightarrow (x, y, z) = (2, -1, -1) + t(-2, -4, 4)$

b) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v} \rightarrow (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(-2, -2, -2)$

016 **Halla las ecuaciones paramétricas de la recta, sabiendo que un punto y un vector director son:**

a) $A(3, 0, -7)$ y $\vec{v} = (-10, 2, 6)$ $\qquad$ b) $A(0, 0, 0)$ y $\vec{v} = (1, 0, 0)$

a) $\left.\begin{array}{l} x = 3 - 10t \\ y = 2t \\ z = -7 + 6t \end{array}\right\}$ $\qquad$ b) $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$

017 **Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por cada par de puntos.**

a) $A(2, -1, -1)$ y $B(0, -5, 3)$ $\qquad$ b) $A(1, 1, 1)$ y $B(-1, -1, -1)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 4) \rightarrow \frac{x - 2}{-2} = \frac{y + 1}{-4} = \frac{z + 1}{4}$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2) \rightarrow \frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 1}{-2}$

018 **Halla las ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por cada par de puntos.**

a) $A(3, 0, -7)$ **y** $B(-7, 2, -1)$ **b)** $A(0, 0, 0)$ **y** $B(1, 0, 0)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-10, 2, 6) \rightarrow \dfrac{x-3}{-10} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+7}{6}$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - 6 = -10y \\ 6x - 18 = -10z - 70 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 5y - 3 = 0 \\ 6x + 10z + 52 = 0 \end{array}\right\}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0) \rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$

019 **Obtén la ecuación vectorial del plano en cada caso.**

a) $A(2, -1, -1)$, $B(0, -5, 3)$ **y** $C(1, 1, 1)$ **b)** $A(1, 1, 1)$, $B(-1, -1, -1)$ **y** $C(1, 2, 2)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 4)$ $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, 2)$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \rightarrow (x, y, z) = (2, -1, -1) + \lambda(-2, -4, 4) + \mu(-1, 2, 2)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2)$ $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \rightarrow (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-2, -2, -2) + \mu(0, 1, 1)$

020 **Halla las ecuaciones paramétricas del plano correspondiente.**

a) $A(3, 0, -7)$, $\vec{u} = (-10, 2, 6)$ **y** $\vec{v} = (0, 3, 10)$

b) $A(0, 0, 0)$, $\vec{u} = (1, 0, 0)$ **y** $\vec{v} = (4, 4, 4)$

a) $\pi\colon \left.\begin{array}{l} x = 3 - 10\lambda \\ y = 2\lambda + 3\mu \\ z = -7 + 6\lambda + 10\mu \end{array}\right\}$ b) $\pi\colon \left.\begin{array}{l} x = \lambda + 4\mu \\ y = 4\mu \\ z = 4\mu \end{array}\right\}$

021 **Halla la ecuación general del plano que pasa por el punto** $P(-1, 0, 2)$ **y contiene a la recta de ecuación:**

$$r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{3}$$

El plano está definido por $P(-1, 0, 2)$, el vector director de la recta $\vec{v_2} = (1, -1, 3)$ y el vector $\overrightarrow{AP}$, con $A(1, 3, -4) \in r$.

$\overrightarrow{AP} = (-2, -3, 6)$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi\colon 3x - 12y - 5z + 13 = 0$$

022 **Obtén la ecuación general del plano que pasa por los puntos** $A(1, 1, -7)$, $B(5, -2, 9)$ **y** $C(5, -4, 0)$**.**

$\overrightarrow{AB} = (4, -3, 16)$ $\overrightarrow{AC} = (4, -5, 7)$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+7 \\ 4 & -3 & 16 \\ 4 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi\colon 59x + 36y - 8z - 151 = 0$$

023 **Calcula la ecuación general de los planos que contienen a dos de los ejes coordenados.**

Eje X y eje Y: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z = 0$

Eje X y eje Z: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y = 0$

Eje Y y eje Z: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x = 0$

024 **Determina la posición de estas rectas:**

$$r: (x, y, z) = (0, -5, 3) + t(1, 1, 1)$$

$$s: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$$

$r: \begin{cases} P(0, -5, 3) \\ \vec{u} = (1, 1, 1) \end{cases}$

$s: \begin{cases} Q(3, 0, -2) \\ \vec{v} = (2, 2, 2) \end{cases}$

$\overrightarrow{PQ} = (3, 5, -5)$

Rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1$ Rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} = 2$

Las rectas son paralelas.

025 **Determina las posiciones relativas de las siguientes rectas:**

$$r: (x, y, z) = (2, 2, 2) + t(1, 1, 1)$$

$$s: (x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, 0, 0)$$

$r: \begin{cases} P(2, 2, 2) \\ \vec{u} = (1, 1, 1) \end{cases}$

$s: \begin{cases} Q(0, 0, 0) \\ \vec{v} = (1, 0, 0) \end{cases}$

$\overrightarrow{PQ} = (-2, -2, -2)$

Rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ Rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2$

Las rectas son secantes.

026 **Estudia la posición relativa de estas rectas:**

$$r\colon \left.\begin{array}{r} -x+2y-z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{array}{r} x+y-z+2=0 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Las rectas son secantes.

027 **Estudia la posición relativa de las rectas:**

$$r\colon \left.\begin{array}{r} y-z-3=0 \\ 2x-z+1=0 \end{array}\right\}$$

$$s\colon \left.\begin{array}{r} -y+z=0 \\ x-3y+z-1=0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

Las rectas se cruzan.

028 **Calcula la posición relativa de la recta y el plano:**

$$r\colon \left.\begin{array}{r} x+y-z+2=0 \\ -x+3y-z+1=0 \end{array}\right\} \qquad \pi\colon x+z+1=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

La recta y el plano se cortan en un punto.

029 **Halla la posición relativa de la recta y el plano:**

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1} \qquad \pi: 2x - 5y + 3z + 3 = 0$$

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1} \to r: \left.\begin{matrix} 2x = y+2 \\ -x = z-1 \end{matrix}\right\} \to r: \left.\begin{matrix} 2x - y - 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

La recta y el plano se cortan en un punto.

030 **Halla la posición relativa de estas parejas de planos.**

a) $\pi_1: -x + 2y - z = 0$
$\pi_2: x - 2y + z + 1 = 0$

b) $\pi_1: x - z + 11 = 0$
$\pi_2: -2y - z + 11 = 0$

a) $\text{Rango} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Los planos son paralelos.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & -1 & 11 \end{pmatrix} = 2$

Los planos son secantes.

031 **Estudia la posición relativa de los planos.**

a) $\pi_1: -6x + 5y - 3z + 2 = 0$
$\pi_2: x - y + z = 0$

b) $\pi_1: x - 2y - z + 1 = 0$
$\pi_2: -2x + 4y - 2z + 3 = 0$

a) $\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to \begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Los planos son secantes.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 2$

Los planos son secantes.

032 **Escribe la ecuación vectorial de un plano que sea paralelo al plano que pasa por los puntos $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 2, 3)$ y $C(2, -1, 4)$.**

¿Cuántos planos hay que verifiquen esta condición?

El plano que buscamos tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, -2, 2)$, y puede pasar por cualquier punto que no pertenezca al plano que pasa por A, B y C.

El punto $D(0, 0, 0)$ no pertenece a ese plano.

$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(-1, 1, 1) + \mu(2, -2, 2)$

Hay infinitos planos paralelos al plano que pasa por A, B y C.

033 **Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas:**

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{3} \qquad s: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$$

$$r: \begin{cases} A(1, 3, -4) \\ \vec{u} = (1, -1, 3) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} B(0, -1, 0) \\ \vec{v} = (1, -1, 3) \end{cases} \qquad \overrightarrow{AB} = (-1, -4, 4)$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 8x - 7y - 5z = 0$$

034 **Escribe la ecuación de tres planos en el espacio que se cortan en el origen de coordenadas. Comprueba que verifican la condición de planos que se cortan en un punto.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{l} \pi_1: x - y + z = 0 \\ \pi_2: x + y - z = 0 \\ \pi_3: x + y + z = 0 \end{array}\right\}$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \text{Secantes en un punto.}$$

035 **Da la ecuación vectorial de tres planos distintos que contengan al eje X, y comprueba que verifican la condición de ser planos concurrentes en una recta.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(1, 1, 1) \\ \pi_2: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(2, -1, 1) \\ \pi_3: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(1, -1, 2) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi_1: y - z = 0 \\ \pi_2: y + z = 0 \\ \pi_3: 2y + z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Los planos verifican la condición de ser secantes en una recta.

036 Determina la posición relativa de estos planos:

$$\pi_1: 6x + 3y - z = 0$$
$$\pi_2: 3x - 2y + z - 3 = 0$$
$$\pi_3: 2y - z + 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Los planos se cortan en un punto.

037 Estudia la posición relativa de los planos:

$$\pi_1: x - z + 2 = 0$$
$$\pi_2: 2x + 2y + 3z + 3 = 0$$
$$\pi_3: 3x + 8y + 7z + 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Los planos se cortan en un punto.

038 Dados los vectores $\vec{u} = (3, 5, 1)$ y $\vec{v} = (6, -4, -2)$, realiza las siguientes operaciones.

a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$

b) $5\vec{u} - 4\vec{v}$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$

d) $-2\vec{u} - \vec{v}$

a) $2\vec{u} + 3\vec{v} = (6, 10, 2) + (18, -12, -6) = (24, -2, -4)$

b) $5\vec{u} - 4\vec{v} = (15, 25, 5) - (24, -16, -8) = (-9, 41, 13)$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v} = (-3, -5, -1) + (12, -8, -4) = (9, -13, -5)$

d) $-2\vec{u} - \vec{v} = (-6, -10, -2) - (6, -4, -2) = (-12, -6, 0)$

039 Halla dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que verifiquen las siguientes condiciones simultáneamente:

$$2\vec{u} + \vec{v} = (-3, 4, -1)$$
$$3\vec{u} - 2\vec{v} = (-8, 13, -19)$$

$$\left.\begin{aligned} 2\vec{u} + \vec{v} &= (-3, 4, -1) \\ 3\vec{u} - 2\vec{v} &= (-8, 13, -19) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} + \left.\begin{aligned} 4\vec{u} + 2\vec{v} &= (-6, 8, -2) \\ 3\vec{u} - 2\vec{v} &= (-8, 13, -19) \end{aligned}\right\}$$
$$7\vec{u} = (-14, 21, -21) \rightarrow \vec{u} = (-2, 3, -3)$$

$2\vec{u} + \vec{v} = (-3, 4, -1) \rightarrow \vec{v} = (-3, 4, -1) - 2\vec{u}$

$\vec{v} = (-3, 4, -1) - 2(-2, 3, -3) = (1, -2, 5)$

040 Calcula m y n para que se verifique que $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$, siendo $\vec{a} = (2, 10, -4)$, $\vec{b} = (-1, 3, -2)$ y $\vec{c} = (11, 15, -2)$.

$$m(2, 10, -4) + n(-1, 3, -2) = (11, 15, -2) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2m - n = 11 \\ 10m + 3n = 15 \\ -4m - 2n = -2 \end{array}\right\}$$

Resolvemos las dos primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 6m - 3n = 33 \\ 10m + 3n = 15 \end{array}\right\} \rightarrow 16m = 48 \rightarrow m = 3 \rightarrow n = -5$$

Comprobamos que se verifica la última ecuación:

$-4 \cdot 3 - 2 \cdot (-5) = -2$

La solución es válida: $m = 3$ y $n = -5$

041 Encuentra un vector $\vec{t}$ que verifique que $2\vec{u} - 3\vec{v} = 2\vec{t} - \vec{w}$, siendo $\vec{u} = (8, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -6)$ y $\vec{w} = (-6, 2, 4)$.

$$2\vec{t} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = (16, -2, 6) - (6, 0, -18) + (-6, 2, 4) = (4, 0, 28)$$

$$\vec{t} = (2, 0, 14)$$

042 Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en una cierta base de V_3 son:

$$\vec{u} = (2, 0, -1) \qquad \vec{v} = (-3, 1, 2) \qquad \vec{w} = (4, -2, 7)$$

Hallar en esa misma base las componentes del vector:

$$2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$$

(Aragón. Junio 2007. Opción B. Cuestión 4)

$$2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = (4, 0, -2) - (-3, 1, 2) + \frac{1}{3}(4, -2, 7) = \left(\frac{25}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

043 Expresa, en cada caso, el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u} = (-2, 3, -3)$ y $\vec{v} = (1, -2, 5)$.

a) $\vec{w} = (-9, 14, -17)$

b) $\vec{w} = (10, -16, 22)$

c) $\vec{w} = (-1, 1, -1)$

a) $(-9, 14, -17) = a(-2, 3, -3) + b(1, -2, 5)$

$$\left.\begin{array}{r} -2a + b = -9 \\ 3a - 2b = 14 \\ -3a + 5b = -17 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4a + 2b = -18 \\ 3a - 2b = 14 \end{array}\right\} \rightarrow -a = -4 \rightarrow a = 4 \rightarrow b = -1$$

Comprobamos en la última ecuación: $-3 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) = -17$

Entonces: $\vec{w} = 4\vec{u} - \vec{v}$

b) $(10, -16, 22) = a(-2, 3, -3) + b(1, -2, 5)$

$$\left.\begin{array}{r} -2a + b = 10 \\ 3a - 2b = -16 \\ -3a + 5b = 22 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4a + 2b = 20 \\ 3a - 2b = -16 \end{array}\right\} \rightarrow -a = 4 \rightarrow a = -4 \rightarrow b = 2$$

Comprobamos en la última ecuación: $-3 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 = 22$

Entonces: $\vec{w} = -4\vec{u} + 2\vec{v}$

c) $(-1, 1, -1) = a(-2, 3, -3) + b(1, -2, 5)$

$$\left.\begin{array}{r} -2a + b = -1 \\ 3a - 2b = 1 \\ -3a + 5b = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4a + 2b = -2 \\ 3a - 2b = 1 \end{array}\right\} \rightarrow -a = -1 \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 1$$

Comprobamos en la última ecuación: $-3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 2 \neq -1$

Entonces $\vec{w}$ no se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

044 **Determina k para que los tres vectores sean linealmente dependientes.**

$\vec{u} = (3, -2, 0)$ $\quad$ $\vec{v} = (1, 3, 11)$ $\quad$ $\vec{w} = (2, 4, k)$

Si los tres vectores son linealmente dependientes:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 11 \\ 2 & 4 & k \end{pmatrix} < 3 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 11 \\ 2 & 4 & k \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 11k - 176 = 0 \rightarrow k = 16$$

045 **Demuestra que no se pueden encontrar a, b y c, distintos de cero, tales que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$, siendo $\vec{u} = (-2, 0, 4)$, $\vec{v} = (-1, -3, 9)$ y $\vec{w} = (3, 1, 7)$.**

$a(-2, 0, 4) + b(-1, -3, 9) + c(3, 1, 7) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{array}{r} -2a - b + 3c = 0 \\ -3b + c = 0 \\ 4a + 9b + 7c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 92 \neq 0$$

El sistema es compatible determinado. Al ser un sistema homogéneo, la única solución es: $a = b = c = 0$

046 **Demuestra que los tres vectores son coplanarios.**

$\vec{u} = (9, 4, 1)$ $\quad$ $\vec{v} = (-3, 3, -7)$ $\quad$ $\vec{w} = (2, -2, 6)$

$$\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & -7 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 52 \neq 0$$

Los vectores son coplanarios porque son linealmente dependientes.

047 **Decide si son bases del espacio los tríos de vectores siguientes.**

a) $\vec{u} = (5, 2, -1)$ $\quad\vec{v} = (4, 0, -2)$ $\quad\vec{w} = (3, 4, 2)$

b) $\vec{u} = (5, -2, 3)$ $\quad\vec{v} = (-2, 4, 2)$ $\quad\vec{w} = (-1, 10, 9)$

c) $\vec{u} = (2, 3, 0)$ $\quad\vec{v} = (0, -1, 3)$ $\quad\vec{w} = (-1, -1, -1)$

d) $\vec{u} = (-2, 1, 0)$ $\quad\vec{v} = (2, 2, 3)$ $\quad\vec{w} = (4, 3, 3)$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

Forman una base porque son linealmente independientes.

b) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 10 & 9 \end{vmatrix} = 0$

No forman una base porque son linealmente dependientes.

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Forman una base porque son linealmente independientes.

d) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$

Forman una base porque son linealmente independientes.

048 **¿Qué valor debe tener p para que el vector $\vec{u} = (4, p, 6)$ esté en el mismo plano que $\vec{v} = (2, -1, 5)$ y $\vec{w} = (-5, 3, -13)$?**

Para que el vector $\vec{u}$ esté en el mismo plano que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ los tres vectores tienen que ser coplanarios, por tanto, deben ser linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} 4 & p & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ -5 & 3 & -13 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow p - 2 = 0 \rightarrow p = 2$$

049 **¿Qué relación deben cumplir a y b para que los tres vectores sean coplanarios?**

$\vec{u} = (a, 2, b)$ $\quad\vec{v} = (3, a, 5)$ $\quad\vec{w} = (1, -b, -1)$

Los vectores son coplanarios si son linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} a & 2 & b \\ 3 & a & 5 \\ 1 & -b & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -a^2 + 4ab - 3b^2 + 16 = 0$$

050 Di si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, y justifica tu respuesta con un ejemplo ilustrativo:

Si tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, entonces también lo son los vectores: $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$.

(Cantabria. Septiembre 2007. Bloque 3. Opción A)

La afirmación es verdadera. Si tres vectores son linealmente independientes, el determinante que forman sus coordenadas es distinto de cero.
Por las propiedades de los determinantes, al hacer combinaciones lineales de sus filas, el valor del determinante no varía, es decir, también es distinto de cero.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(2,1,3)\\ \vec{v}=(1,2,1)\\ \vec{w}=(1,0,1)\end{array}\right\}\rightarrow\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2\neq 0\rightarrow \text{Son linealmente independientes.}$$

$$\left.\begin{array}{r}\vec{u}+\vec{v}=(3,3,4)\\ \vec{u}-\vec{v}=(1,-1,2)\\ \vec{u}-\vec{v}+\vec{w}=(2,-1,3)\end{array}\right\}\rightarrow\begin{vmatrix}3 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=4\neq 0\rightarrow \text{Son linealmente independientes.}$$

051 Considera los vectores: $\vec{u}=(1,1,m)$ $\quad\vec{v}=(0,m,-1)$ $\quad\vec{w}=(1,2m,0)$

a) Determina el valor de m para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

b) Para el valor de m obtenido en el apartado anterior expresa el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(Andalucía. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 4)

a) $\begin{vmatrix}1 & 1 & m\\ 0 & m & -1\\ 1 & 2m & 0\end{vmatrix}=0\rightarrow -m^2+2m-1=0\rightarrow m=1$

b) $(1,2,0)=a(1,1,1)+b(0,1,-1)\rightarrow \left.\begin{array}{r}a=1\\ a+b=2\\ a-b=0\end{array}\right\}\rightarrow b=1\rightarrow \vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$

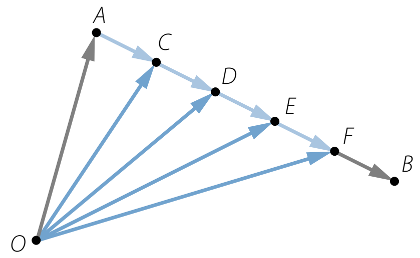
052 Halla un punto C en el segmento AB, sabiendo que $A(-1,4,3)$ y $B(2,10,-6)$, de modo que $\overline{AC}$ sea la mitad que $\overline{CB}$.

Sea $C(c_1, c_2, c_3)$, entonces:

$$\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CB}\rightarrow(c_1+1, c_2-4, c_3-3)=\frac{1}{2}\cdot(2-c_1, 10-c_2, -6-c_3)$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}c_1+1=1-\frac{1}{2}c_1\\ c_2-4=5-\frac{1}{2}c_2\\ c_3-3=-3-\frac{1}{2}c_3\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}c_1=0\\ c_2=6\\ c_3=0\end{array}\right.\rightarrow C(0,6,0)$$

053 **Determina los cuatro puntos que dividen el segmento de extremos $A(2, -6, 3)$ y $B(12, -1, 8)$ en cinco partes iguales.**



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = (2, -6, 3) + \frac{1}{5}(10, 5, 5) = (4, -5, 4) \rightarrow C(4, -5, 4)$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = (2, -6, 3) + \frac{2}{5}(10, 5, 5) = (6, -4, 5) \rightarrow D(6, -4, 5)$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = (2, -6, 3) + \frac{3}{5}(10, 5, 5) = (8, -3, 6) \rightarrow E(8, -3, 6)$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} = (2, -6, 3) + \frac{4}{5}(10, 5, 5) = (10, -2, 7) \rightarrow F(10, -2, 7)$$

054 **Comprueba si están alineados los siguientes puntos en el espacio.**

a) $A(3, 3, -5)$, $B(4, -6, 1)$ y $C(2, -4, 5)$ b) $A(-4, 1, 2)$, $B(0, 6, 1)$ y $C(-12, -9, 4)$

a) $\overrightarrow{AB} = (1, -9, 6)$ $\overrightarrow{AC} = (-1, -7, 10)$

Los vectores no son proporcionales, por tanto, los puntos no están alineados.

b) $\overrightarrow{AB} = (4, 5, -1)$ $\overrightarrow{AC} = (-8, -10, 2)$

Los vectores son proporcionales, luego los puntos están alineados.

055 **Encuentra los valores de a y b que hacen que los tres puntos estén alineados: $P(2, -1, a)$, $Q(5, 1, 6)$ y $R(b, -5, 9)$.**

Los puntos están alineados si los vectores son proporcionales:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ} = (3, 2, 6-a) \\ \overrightarrow{PR} = (b-2, -4, 9-a)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{3}{b-2} = \frac{2}{-4} = \frac{6-a}{9-a} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 7 \\ b = -4\end{array}\right.$$

056 **Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(3, 1, 0)$, $B(4, 5, 2)$ y $C(4, 7, -2)$.**

a) Halla el cuarto vértice del paralelogramo. b) Calcula su perímetro.

a) Sea $D(d_1, d_2, d_3)$ el vértice que buscamos.

$\overrightarrow{AB} = (1, 4, 2)$

Entonces: $\overrightarrow{CD} = (d_1 - 4, d_2 - 7, d_3 + 2) = (1, 4, 2) \rightarrow D(5, 11, 0)$

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$

$\overrightarrow{AC} = (1, 6, -2)$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{41}$

El perímetro del paralelogramo es: $2\sqrt{21} + 2\sqrt{41}$

057 **Decide si los siguientes cuartetos de puntos están en el mismo plano o no.**

a) $A(0, 1, 2)$, $B(2, 2, 1)$, $C(1, 0, 5)$ **y** $D(1, 3, -2)$

b) $A(0, 0, -1)$, $B(1, 0, -2)$, $C(0, 1, -2)$ **y** $D(4, 1, 5)$

a) $\overrightarrow{AB} = (2, 1, -1)$ $\qquad \overrightarrow{AC} = (1, -1, 3)$ $\qquad \overrightarrow{AD} = (1, 2, -4)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 11 \rightarrow \text{Los puntos son coplanarios.}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (1, 0, -1)$ $\qquad \overrightarrow{AC} = (0, 1, -1)$ $\qquad \overrightarrow{AD} = (4, 1, 6)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 11 \rightarrow \text{Los puntos no son coplanarios.}$$

058 **¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que los puntos $P(3, 5, -7)$, $Q(4, a, -3)$ y $R(b, -7, c)$ estén alineados?**

Si P, Q y R están alineados, entonces $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son linealmente dependientes, es decir, son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (1, a-5, 4) \\ \overrightarrow{PR} = (b-3, -12, c+7) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{b-3} = \frac{a-5}{-12} = \frac{4}{c+7} \rightarrow \left.\begin{array}{l} (a-5)(b-3) = -12 \\ (a-5)(c+7) = -48 \end{array}\right\}$$

059 **Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3, -1, 4)$ y $B(-4, 3, 2)$.**

$$\overrightarrow{AB} = (-7, 4, -2) \qquad r\colon \left.\begin{array}{l} x = 3 - 7t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 - 2t \end{array}\right\}$$

060 **Determina una recta paralela al eje Y que pase por el punto $(4, -2, 3)$.**

Por ser paralelo al eje Y, un vector director de la recta es $(0, 1, 0)$.

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = -2 + t \\ z = 3 \end{array}\right\}$$

061 **¿Pertenece el punto $(-1, 2, 7)$ a la recta $r\colon \left.\begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{array}\right\}$? En caso negativo, obtén la ecuación en forma paramétrica de la recta paralela a r que pasa por dicho punto.**

$-1 = -2 + \lambda \rightarrow \lambda = 1$

$2 = 3 - \lambda \rightarrow \lambda = 1$

$7 = 2 + 3\lambda \rightarrow \lambda \neq 1 \rightarrow$ El punto no pertenece a la recta.

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{array}\right\}$$

062 **Expresa en forma continua la ecuación de la recta que pasa por el punto (−5, −4, 0) y es paralela a la recta r, cuyas ecuaciones paramétricas son:**

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{array}\right\}$$

a) ¿Está el punto (1, −13, −3) en dicha recta? **b) ¿Y (−3, −7, −2)?**

$$r\colon \frac{x+5}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{1}$$

a) $\dfrac{1+5}{-2} = \dfrac{-13+4}{3} = \dfrac{-3}{1} \rightarrow$ El punto pertenece a la recta.

b) $\dfrac{-3+5}{-2} = \dfrac{-7+4}{3} \neq \dfrac{-2}{1} \rightarrow$ El punto no pertenece a la recta.

063 **Dados los puntos $A(-3, 2, 9)$, $B(1, 0, -7)$ y $C(0, 4, -3)$:**

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y B.

b) ¿Están los tres puntos alineados?

a) $\overrightarrow{AB} = (4, -2, -16)$

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = 1 + 4t \\ y = -2t \\ z = -7 - 16t \end{array}\right\}$$

b) $\left.\begin{array}{l} 0 = 1 + 4t \rightarrow t = -\dfrac{1}{4} \\ 4 = -2t \rightarrow t \neq -\dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \rightarrow$ C no pertenece a la recta que pasa por A y por B. Los puntos no están alineados.

064 **Calcula el valor que debe tomar m para que las siguientes rectas se corten en un punto.**

$$r\colon \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{0} \qquad s\colon \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 6 + 4\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{array}\right\}$$

$$r\colon \begin{cases} P(m, -10, -3) \\ \vec{v} = (-1, 4, 0) \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} Q(1, 6, -1) \\ \vec{u} = (0, 4, 2) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$\overrightarrow{PQ} = (1 - m, 16, 2)$

Las rectas se cortan si $\text{Rango} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1-m & 16 & 2 \end{pmatrix} = 2.$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1-m & 16 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -8m + 32 = 0 \rightarrow m = 4$$

065 Expresa en la forma indicada la ecuación de las rectas cuyas ecuaciones implícitas son:

a) $r\colon \left.\begin{array}{r} x-3y+4z=2 \\ 3x-y+2z=4 \end{array}\right\}$ en forma paramétrica

b) $s\colon \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=1 \\ x+3y+2z=0 \end{array}\right\}$ en forma continua

a) $x=2+3y-4z \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y+4z=2 \\ 8y-10z=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{4}-t \\ y=-\dfrac{1}{4}+5t \\ z=4t \end{array}\right\}$

b) $y=1-2x+z \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=1 \\ -5x+5z=-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{5}+t \\ y=-\dfrac{1}{5}-t \\ z=t \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-\frac{3}{5}}{1}=\dfrac{y+\frac{1}{5}}{-1}=\dfrac{z}{1}$

066 Pasa a forma implícita la ecuación de la recta:

$$r\colon \frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}$$

$r\colon \dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{2} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{r} x-1=-3y+3 \\ 2x-2=-3z+6 \end{array}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{r} x+3y-4=0 \\ 2x+3z-8=0 \end{array}\right\}$

067 Calcular la ecuación cartesiana de la recta cuya expresión paramétrica es $r\colon \left.\begin{array}{l} x=1-3\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=2+2\alpha \end{array}\right\}$

¿Existe algún valor de v tal que el punto (v, v, v) pertenezca a la recta? Razonar la respuesta.

(País Vasco. Julio 2006. Bloque B. Problema B)

$r\colon \dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{2} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{r} x-1=-3y+3 \\ 2x-2=-3z+6 \end{array}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{r} x+3y-4=0 \\ 2x+3z-8=0 \end{array}\right\}$

$r\colon \left.\begin{array}{r} x+3y-4=0 \\ 2x+3z-8=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{P(v,v,v)} \begin{array}{l} v+3v-4=0 \rightarrow v=1 \\ 2+3-8 \neq 0 \end{array}$

Ningún punto (v, v, v) verifica las dos ecuaciones, por tanto, no existe un valor de v tal que $P(v, v, v) \in r$.

068 Calcule la ecuación de la recta paralela a la recta $r\colon \left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=1 \end{array}\right\}$ que pasa por el punto (0, 1, 0).

(Cataluña. Septiembre 2006. Cuestión 3)

$$r\colon \left.\begin{array}{r} z=x+y \\ 3x=1 \end{array}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ y=-\dfrac{1}{3}+t \\ z=t \end{array}\right\} \text{ La recta paralela es } s\colon \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=1+t \\ z=t \end{array}\right\}$$

069 Sea r la recta definida por $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-k}{2}=\dfrac{z}{3}$ y s la recta definida por $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$. Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.

$$r\colon \begin{cases} P(2, k, 0) \\ \vec{v}=(1, 2, 3) \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} Q(-2, 1, 3) \\ \vec{u}=(-3, -2, -1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ}=(-4, 1-k, 3)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -4 & 1-k & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 8k-12=0 \rightarrow k=\frac{3}{2}$$

070 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-2, -1, -4)$ y se apoya en las siguientes rectas:

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x=4+t \\ y=1+t \\ z=2+t \end{array}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{array}{r} 2x-y+z+4=0 \\ x+3y-2z-3=0 \end{array}\right\}$$

Calculamos la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r:

$Q(4, 1, 2) \in r \qquad \overrightarrow{PQ}=(6, 2, 6) \qquad \vec{v}_r=(1, 1, 1)$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z+4 \\ 6 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4x+4z+8=0 \rightarrow \pi\colon x-z-2=0$$

Calculamos la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta s:

$$s\colon \left.\begin{array}{r} 2x-y+z+4=0 \\ -7y+5z+10=0 \end{array}\right\} \rightarrow s\colon \left.\begin{array}{l} x=-1-t \\ y=5t \\ z=-2+7t \end{array}\right\} \begin{array}{l} R(-1, 0, -2) \in s \qquad \overrightarrow{PR}=(1, 1, 2) \\ \vec{v}_s=(-1, 5, 7) \end{array}$$

$$\sigma\colon \begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -3x-9y+6z+9=0 \rightarrow \sigma\colon x+3y-2z-3=0$$

La recta buscada es $m\colon \left.\begin{array}{r} x-z-2=0 \\ x+3y-2z-3=0 \end{array}\right\}$

071 Sean A y B los puntos del espacio de coordenadas $A(0, 1, 2)$, $B(1, 2, 3)$.
Encontrar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por dichos puntos.
¿Existen valores de r y s para los cuales el punto C de coordenadas $C(3, r+s, r-s)$ pertenezca a la recta calculada antes? En caso afirmativo calcular los valores de r y s. Razonar la contestación en caso negativo.

(País Vasco. Junio 2004. Bloque B. Cuestión B)

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$

$$m\colon \left.\begin{aligned} x &= t\\ y &= 1+t\\ z &= 2+t\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= t\\ r+s &= 1+t\\ r-s &= 2+t\end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} r+s &= 4\\ r-s &= 5\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} r &= \frac{9}{2}\\ s &= -\frac{1}{2}\end{aligned}\right.$$

072 Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(1, 0, 0)$ y corta a las rectas:

$$r_1\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \qquad r_2\colon \left.\begin{aligned} x+2y+z-1 &= 0\\ 2x-y-z-3 &= 0\end{aligned}\right\}$$

(Navarra. Septiembre 2006. Grupo 1. Opción B)

Calculamos la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r_1:

$Q(2, 1, 0) \in r_1 \qquad \overrightarrow{PQ} = (1, 1, 0) \qquad \vec{u} = (1, -1, 2)$

$$\pi_1\colon \begin{vmatrix} x-1 & y & z\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix} = 2x-2y-2z-2 = 0 \to \pi_1\colon x-y-z-1 = 0$$

Calculamos la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r_2:

$$\pi_2\colon \left.\begin{aligned} x+2y+z-1 &= 0\\ 3x+y-4 &= 0\end{aligned}\right\} \to \pi_2\colon \left.\begin{aligned} x &= t\\ y &= 4-3t\\ z &= -7+5t\end{aligned}\right\} R(0, 4, -7) \in r_2 \qquad \begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= (-1, 4, -7)\\ \vec{v}_r &= (1, -3, 5)\end{aligned}$$

$$\pi_2\colon \begin{vmatrix} x-1 & y & z\\ -1 & 4 & -7\\ 1 & -3 & 5\end{vmatrix} = -x-2y-z+1 = 0 \to \pi_2\colon x+2y+z-1 = 0$$

La recta es s: $$\left.\begin{aligned} x-y-z-1 &= 0\\ x+2y+z-1 &= 0\end{aligned}\right\} \to s\colon \left.\begin{aligned} x &= t\\ y &= 2-2t\\ z &= -3+3t\end{aligned}\right\} \to s\colon \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{3}$$

073 Prueba que las ecuaciones $\left.\begin{aligned} x-y+z-4 &= 0\\ 3x+5z-9 &= 0\end{aligned}\right\}$ y $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-3}$ representan la misma recta.

(La Rioja. Septiembre 2002. Propuesta A. Ejercicio 1)

$$r\colon \left.\begin{aligned} x-y+z-4 &= 0\\ 3x+5z-9 &= 0\end{aligned}\right\} \to r\colon \left.\begin{aligned} x &= 3+5t\\ y &= -1+2t\\ z &= -3t\end{aligned}\right\} \to r\colon \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

Las dos rectas tienen la misma ecuación, representan la misma recta.

074 **Sean P y Q los puntos del espacio $P(1, 2, 2)$ y $Q(2, a, a)$. Hallar el valor de a para que la recta que une P y Q pase por el origen de coordenadas.**

Hallar la ecuación de la recta como intersección de dos planos y en forma paramétrica.

(País Vasco. Julio 2007. Bloque B. Problema B)

$$\overrightarrow{PQ} = (1, a-2, a-2) \qquad r\colon \left.\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2+(a-2)t \\ z &= 2+(a-2)t \end{aligned}\right\}$$

Si la recta pasa por el origen de coordenadas: $\left.\begin{aligned} 0 &= 1+t \\ 0 &= 2+(a-2)t \\ 0 &= 2+(a-2)t \end{aligned}\right\} \to \begin{cases} t = -1 \\ a = 4 \end{cases}$

Así, la ecuación de la recta es:

$$r\colon \left.\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2+2t \\ z &= 2+2t \end{aligned}\right\} \to r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2} \to r\colon \left.\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ 2x - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

075 **De todas las rectas que pasan por el punto $P(0, 2, -1)$, halle la que corta a las rectas de ecuaciones:**

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) + t(2, -1, 0) \qquad (x, y, z) = (0, 1, 1) + s(-3, 1, 2)$$

(Baleares. Junio 2006. Opción B. Cuestión 2)

Sean $A(1+2t, 1-t, 2)$ un punto de la primera recta, y $B(-3s, 1+s, 1+2s)$ un punto de la segunda.

Si la recta que buscamos pasa por A, B y P entonces, los puntos están alineados, es decir, $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BP}$ son proporcionales.

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (-1-2t, 1+t, -3) \\ \overrightarrow{BP} &= (3s, 1-s, -2-2s) \end{aligned}\right\} \to \frac{-1-2t}{3s} = \frac{1+t}{1-s} = \frac{-3}{-2-2s}$$

$$\to \left.\begin{aligned} (1+2t)(2+2s) &= -9s \\ (1+t)(2+2s) &= 3(1-s) \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 4t + 11s + 4st &= -2 \\ 2t + 5s + 2st &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\to 4t(1+s) = -2-11s \to t = -\frac{2+11s}{4(1+s)}$$

$$\to -\frac{2+11s}{2(1+s)} + 5s - s\cdot\frac{2+11s}{2(1+s)} = 1 \to s^2 + 5s + 4 = 0 \to \begin{cases} s = -1 \text{ (no válida)} \\ s = -4 \to t = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Así, $P(0, 2, -1) \in r$ y un vector director es $\overrightarrow{BP} = (12, -5, -6)$.

$$r\colon \left.\begin{aligned} x &= 12t \\ y &= 2-5t \\ z &= -1-6t \end{aligned}\right\}$$

076 **Encuentra la ecuación de la recta contenida en el plano $\pi: x + 2y + 6z - 2 = 0$ que corta a los ejes Y y Z.**

(Cataluña. Junio 2007. Cuestión 4)

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 6z - 2 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(0, 1, 0) \text{ es el punto de intersección del plano con el eje } Y.$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 6z - 2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow B\left(0, 0, \frac{1}{3}\right) \text{ es el punto de intersección del plano con el eje } Z.$$

Así, un vector director de la recta contenida en π que corta a los ejes Y y Z es $\overrightarrow{AB} = \left(0, -1, \frac{1}{3}\right)$.

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = \frac{1}{3}t \end{array}\right\}$$

077 **Dados los puntos $A(-2, -4, -3)$ y $B(2, 6, 5)$, y la recta $r: \left.\begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{array}\right\}$, averiguar si existe alguna recta tal que contenga los puntos A y B y corte a la recta r. Razonar la respuesta.**

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2000. Bloque 1. Pregunta B)

La recta que contiene a A y B es:

$$\overrightarrow{AB} = (4, 10, 8) \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 4t \\ y = 6 + 10t \\ z = 5 + 8t \end{array}\right\}$$

Calcularemos un vector director de r:

$$r: \left.\begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ 3x - 2z = 2 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = -2 + 5t \\ z = -1 + 3t \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r = (2, 5, 3)$$

$$P(0, -2, -1) \in r \qquad \overrightarrow{AP} = (2, 2, 2)$$

Estudiamos las posiciones relativas de r y s.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

Las rectas no se cortan, se cruzan.

078 Halla las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por los puntos $P(3, -1, 5)$, $Q(1, 2, 3)$ y $R(9, -2, -2)$.

$\overrightarrow{PQ} = (-2, 3, -2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{PR} = (6, -1, -7)$

$$\pi: \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2\lambda + 6\mu \\ y = -1 + 3\lambda - \mu \\ z = 5 - 2\lambda - 7\mu \end{array}\right\}$$

079 Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $P(4, 3, 1)$, $Q(6, 2, -3)$ y $R(2, 4, -2)$.

$\overrightarrow{PQ} = (2, -1, -4)$ $\qquad$ $\overrightarrow{PR} = (-2, 1, -3)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z-1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7x + 14y - 70 = 0 \rightarrow \pi: x + 2y - 10 = 0$$

080 Encuentra las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a las rectas

$$r: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \ \text{ y } \ s: \left.\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{array}\right\} \text{ que pasa por el punto } P(8, 9, 1).$$

Los vectores directores de las rectas son los vectores directores del plano.

$$\pi: \left.\begin{array}{l} x = 8 - 2\lambda - \mu \\ y = 9 - \lambda + 3\mu \\ z = 1 + 2\lambda - 3\mu \end{array}\right\}$$

081 Escribe en forma paramétrica las ecuaciones del plano $2x - y + 4z = 7$.

$$\pi: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -7 + 2\lambda + 4\mu \\ z = \mu \end{array}\right\}$$

082 Escribe en forma implícita la ecuación del plano:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda + 3\mu \\ y = 3 + 2\lambda - \mu \\ z = 5 + 2\mu \end{array}\right\}$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4x - 2y - 7z + 45 = 0 \rightarrow \pi: 4x - 2y - 7z + 45 = 0$$

083 **Escribe las ecuaciones paramétricas de los planos cartesianos (los planos que contienen a dos de los ejes cartesianos).**

Ecuaciones paramétricas del plano OXY: $\left.\begin{array}{r} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{array}\right\}$

Ecuaciones paramétricas del plano OXZ: $\left.\begin{array}{r} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{array}\right\}$

Ecuaciones paramétricas del plano OYZ: $\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array}\right\}$

084 **Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-5}{2}$ y pasa por el punto $A(4, 0, -1)$.**

$P(1, -1, 5) \in r$ $\qquad \overrightarrow{AP} = (-3, -1, 6)$ $\qquad \vec{v}_r = (-1, 3, 2)$

Buscamos un plano que pase por $A(4, 0, -1)$ y tiene como vectores directores $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{AP}$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-4 & y & z+1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 20x + 10z - 70 = 0 \rightarrow \pi: 2x + z - 7 = 0$$

085 **Halla los puntos en que corta a los ejes coordenados el plano $\pi: 2x - 3y + 5z - 30 = 0$.**

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 5z - 30 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 15$$

Corta al eje X en el punto $P(15, 0, 0)$.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 5z - 30 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y = -10$$

Corta al eje Y en el punto $Q(0, -10, 0)$.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 5z - 30 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow z = 6$$

Corta al eje Z en el punto $R(0, 0, 6)$.

086 **Obtén las ecuaciones del plano paralelo al plano $2x - 2y + 3z - 12 = 0$ que pasa por el punto $(-2, 3, -1)$.**

$$\pi: 2x - 2y + 3z - 12 = 0 \rightarrow \pi: \left.\begin{aligned} x &= 6 + \lambda - 3\mu \\ y &= \lambda \\ z &= 2\mu \end{aligned}\right\}$$

Los vectores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-3, 0, 2)$ son también vectores directores del plano que buscamos.

$$\pi': \begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 2y + 3z + 13 = 0 \rightarrow \pi': 2x - 2y + 3z + 13 = 0$$

087 **Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$ y es paralelo a la recta $s: \left.\begin{aligned} x + 2y - z + 4 &= 0 \\ 2x - 3y + 2z + 4 &= 0 \end{aligned}\right\}$.**

$$s: \left.\begin{aligned} x + 2y - z + 4 &= 0 \\ 2x - 3y + 2z + 4 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{aligned} x &= -3 - t \\ y &= 4t \\ z &= 1 + 7t \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{v}_s = (-1, 4, 7)$$

El punto que buscamos pasa por el punto $P(-1, -1, -3) \in r$, y tiene por vectores directores $\vec{v}_r = (-2, 2, -1)$ y $\vec{v}_s = (-1, 4, -7)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 18x + 15y - 6z + 15 = 0 \rightarrow \pi: 6x + 5y - 2z + 5 = 0$$

088 **Considera los puntos del espacio:**

$$A(0, 0, 1) \qquad B(1, 1, 2) \qquad C(0, -1, -1)$$

a) Encuentra la ecuación del plano *ABC*.

b) Si *D* es el punto de coordenadas $(k, 0, 0)$, ¿cuánto ha de valer k para que los cuatro puntos *A*, *B*, *C* y *D* sean coplanarios?

(Cataluña. Junio 2004. Cuestión 2)

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) \qquad \overrightarrow{AC} = (0, -1, -2)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -x + 2y - z + 1 = 0 \rightarrow \pi: x - 2y + z - 1 = 0$$

b) Si *D* pertenece al mismo plano entonces:

$k - 2 \cdot 0 + 0 - 1 = 0 \rightarrow k = 1$

089 Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano π: $x + y - z + 6 = 0$ con la recta s: $\frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta r: $\left.\begin{array}{r} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{array}\right\}$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 4. Pregunta A)

Calculamos la intersección entre π y s.

$$\left.\begin{array}{r} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \\ x + y - z + 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 3t + 2 + t + 1 - t + 6 = 0 \rightarrow t = -3$$

$P(-9, -1, -4)$ es el punto de intersección del plano π y la recta s.

Calculamos un vector director de r:

$$r: \left.\begin{array}{r} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 4 - 3t \\ z = 13 - 13t \end{array}\right\} \rightarrow \ \vec{v}_r = (1, -3, 13)$$

La recta paralela a r que pasa por P es m: $\left.\begin{array}{l} x = -9 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = -4 - 13t \end{array}\right\}$

090 Encuentra el plano que es paralelo a la recta: r: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{4}$ y que pasa por los puntos: $A(-3, 0, 1)$ $B(2, 2, -3)$.

El plano pasa por A y tiene por vectores $\overrightarrow{AB} = (5, 2, -4)$ y $\vec{v}_z = (2, -3, 4)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+3 & y & z-1 \\ 5 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -4x - 28y - 19z + 7 = 0 \rightarrow \pi: 4x + 28y + 19z - 7 = 0$$

091 Sean los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(a, 2, b)$ y $C(1, 0, 0)$.

a) Con $a = 2$, calcula b para que los tres puntos determinen un plano que pase por el punto $P(2, 0, 1)$. ¿Cuál es la ecuación de dicho plano?

b) Calcula los valores de a y b para que los puntos A, B y C estén alineados.

(Asturias. Junio 2006. Bloque 3)

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, b - 1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (0, -1, -1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & b-1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: (b-2)x + y - z + 2 - b = 0$$

Si el plano contiene al punto P entonces: $(b - 2) \cdot 2 - 1 + 2 - b = 0 \rightarrow b = 3$

La ecuación del plano es: $x + y - z - 1 = 0$

b) A, B y C están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(a-1,1,b-1)\\ \overrightarrow{AC}=(0,-1,-1)\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}a-1=0\\ b-1=1\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l}a=1\\ b=2\end{array}\right.$$

092 **Calcula la ecuación paramétrica y la ecuación cartesiana del plano que contiene a los puntos A, B y C de coordenadas $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$ y $C(1, 1, 1)$. ¿Existe algún valor de u tal que el punto $(3, 2u, u + 3)$ pertenezca al plano? Razonar la respuesta, calculando el valor de u en caso de que sea afirmativa.**

(País Vasco. Junio 2007. Bloque B. Problema B)

a) $\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)$ $\qquad\overrightarrow{AC}=(0,1,1)$

$$\pi:\left.\begin{array}{l}x=1-\lambda\\ y=\lambda+\mu\\ z=\lambda+\mu\end{array}\right\} \to \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0 \to \pi: y-z=0$$

Si el plano contiene el punto $(3, 2u, u + 3)$ entonces: $2u - u - 3 = 0 \to u = 3$

093 **Dadas las rectas: $r: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ $\qquad s: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z+5}{3}$ y el punto $P(1, 1, -1)$, queremos encontrar la ecuación de la recta que pasa por P y que corta a r y a s. Para conseguirlo:**

a) Encuentra la ecuación general o cartesiana (es decir, la ecuación de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π que contiene a la recta r y al punto P.

b) Encuentra el punto M calculando el punto de intersección del plano π con la recta s.

c) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y M.

d) Comprueba que la recta encontrada en el apartado anterior es la que buscamos.

(Cataluña. Junio 2008. Problema 6)

a) $Q(2, -1, 0) \in r$ $\qquad\overrightarrow{PQ}=(1,-2,1)$

$$\pi:\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z+1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=2y+4z+2=0 \to \pi: y+2z+1=0$$

b) $$s:\left.\begin{array}{l}x=1+t\\ y=-7+2t\\ z=-5+3t\end{array}\right\}$$

$\pi: y+2z+1=0 \to -7+2t-10+6t+1=0 \to t=2 \to M(3,-3,1)$

c) $\overrightarrow{PM}=(2,-4,2)$ $$m:\left.\begin{array}{l}x=1+2t\\ y=1-4t\\ z=-1+2t\end{array}\right\}$$

d) La recta m pasa por P, para $t = 0$, y por el punto M, punto de intersección de r y s, para $t = 1$.

094 **Determinar una recta que sea paralela al plano que pasa por los puntos de coordenadas (1, 1, 0), (1, 0, 1) y (0, 1, 1), que también sea paralela al plano $x + 2y + 3z = 0$, y que no esté contenida en ninguno de estos planos.**

(Extremadura. Septiembre 2004. Repertorio A. Ejercicio 2)

El plano que pasa por $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(0, 1, 1)$ es:

$\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x - y - z + 2 = 0 \rightarrow \pi: x + y + z - 2 = 0$$

La recta de intersección entre los dos planos es:

$$r: \left.\begin{aligned} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{aligned} x + y + z - 2 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{aligned} x &= 4 + t \\ y &= -2 - 2t \\ z &= t \end{aligned}\right\}$$

La solución del problema es una recta paralela a r. Por ejemplo:

$$s: \left.\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= 1 + t \end{aligned}\right\}$$

095 **Determine los extremos de un segmento AB sabiendo que el punto A pertenece al plano $2x + y + z = 0$, el punto B pertenece a la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{3}$ y el punto medio del segmento es (0, 0, 0).**

(Cataluña. Septiembre 2006. Problema 4)

El punto B es de la forma $(1 + 2t, 2 - t, 3t)$.
Si el punto medio del segmento es (0, 0, 0) entonces el punto A ha de ser de la forma $(-1 - 2t, -2 + t, -3t)$.
Como este punto pertenece al plano $2x + y + z = 0$ tenemos que:

$$2(-1 - 2t) - 2 + t - 3t = 0 \rightarrow -6t = 4 \rightarrow t = -\frac{2}{3}$$

Así, los puntos son $A\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{8}{3}, 2\right)$ y $B\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{8}{3}, -2\right)$.

096 **Encuentra las condiciones que deben satisfacer a y b para que el punto $Q(2, a, b)$ esté en el mismo plano que los puntos $A(1, 3, 1)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(0, 0, 2)$.**

(País Vasco. Julio 2005. Bloque B. Cuestión B)

$\overrightarrow{AB} = (0, -3, -2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (-1, -3, 1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -9x + 2y - 3z + 6 = 0 \rightarrow \pi: 9x - 2y + 3z - 6 = 0$$

Si Q pertenece al plano entonces: $18 - 2a + 3b - 6 = 0 \rightarrow 2a - 3b = 12$

097 Se consideran la recta $r: (x, y, z) = (t + 1, 2t, 3t)$, el plano $\pi: x - 2y - z = 0$ y el punto $P(1, 1, 1)$. Se pide:

a) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo al plano π.

b) Determinar la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P.

c) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos anteriores, π_1 y π_2.

(C. Valenciana. Junio 2004. Ejercicio B. Problema 2)

a) $$\pi: \left.\begin{aligned} x &= 2\lambda + \mu \\ y &= \lambda \\ z &= \mu \end{aligned}\right\} \rightarrow \pi_1: \left.\begin{aligned} x &= 1 + 2\lambda + \mu \\ y &= 1 + \lambda \\ z &= 1 + \mu \end{aligned}\right\}$$

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi_1: x - 2y - z + 2 = 0$$

b) $Q(1, 0, 0) \in r$ $\qquad \overrightarrow{PQ} = (0, -1, -1)$ $\qquad \vec{v}_r = (1, 2, 3)$

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi_2: x + y - z - 1 = 0$$

c) $$s: \left.\begin{aligned} x - 2y - z + 2 &= 0 \\ x + y - z - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{aligned} x - 2y - z + 2 &= 0 \\ 3y - 3 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= 1 \\ z &= t \end{aligned}\right\}$$

098 Dados el punto $A(3, 5, -1)$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = y + 2 = \dfrac{z+1}{4}$ hállese el punto B perteneciente a r tal que el vector de extremos A y B es paralelo al plano π de ecuación $3x - 2y + z + 5 = 0$.

(Castilla y León. Junio 2005. Opción B. Cuestión 2)

El punto B es de la forma $(1 + 2t, -2 + t, -1 + 4t)$.

$\overrightarrow{AB} = (-2 + 2t, -7 + t, 4t)$

$$\pi: 3x - 2y + z + 5 = 0 \rightarrow \pi: \left.\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \mu \\ z &= -5 - 3\lambda + 2\mu \end{aligned}\right\}$$

Si el vector de extremos A y B es paralelo a π entonces los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u} = (1, 0, -3)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$ son linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} -2+2t & -7+t & 4t \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 8t + 8 = 0 \rightarrow t = -1$$

Sustituyendo $t = -1$ en la expresión de B obtenemos $B(-1, -3, -5)$.

099 Estudia las posiciones relativas de las parejas de rectas siguientes.

a) $r: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+2}{3} = z-3$ $s: x-2 = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$

b) $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = z+4$ $s: \dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$

c) $r: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ $s: \left.\begin{matrix} 3x+z=10 \\ 5x-y-z=16 \end{matrix}\right\}$

d) $r: \left.\begin{matrix} 2x+z=4 \\ x+3y+z=4 \end{matrix}\right\}$ $s: \left.\begin{matrix} x+y-z=8 \\ 3x-y+3z=18 \end{matrix}\right\}$

e) $r: \left.\begin{matrix} 2x+y-z=1 \\ x+2y+2z=0 \end{matrix}\right\}$ $s: \left.\begin{matrix} -x+y+2z=-2 \\ 3x-y+3z=11 \end{matrix}\right\}$

f) $r: \left.\begin{matrix} 2x+4y-z=7 \\ -x+y+2z=-2 \end{matrix}\right\}$ $s: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$

a) $r: \begin{cases} P(2,-2,3) \\ \vec{u} = (-1,3,1) \end{cases}$ $s: \begin{cases} Q(2,-4,4) \\ \vec{v} = (1,-1,-2) \end{cases}$ $\vec{PQ} = (0,-2,1)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son secantes.

b) $r: \begin{cases} P(3,2,-4) \\ \vec{u} = (2,-1,1) \end{cases}$ $s: \begin{cases} Q(-1,5,-1) \\ \vec{v} = (-4,2,-2) \end{cases}$ $\vec{PQ} = (-4,3,3)$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son paralelas.

c) $r: \begin{cases} P(3,-2,1) \\ \vec{u} = (-1,2,3) \end{cases}$ $s: \left.\begin{matrix} 3x+z=10 \\ 5x-y-z=16 \end{matrix}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{matrix} x=t \\ y=-26+8t \\ z=10-3t \end{matrix}\right\}$

$s: \begin{cases} Q(0,-26,10) \\ \vec{v} = (1,8,-3) \end{cases}$ $\vec{PQ} = (-3,-24,9)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \\ -3 & -24 & 9 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \\ -3 & -24 & 9 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son secantes.

d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 3 & 18 \end{vmatrix} = -180 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 3 & 18 \end{pmatrix} = 4$$

Las rectas se cruzan.

e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 11 \end{pmatrix} = 3$$

Las rectas son secantes.

f) $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x + 4y - z = 7 \\ 6y + 3z = 3 \end{array}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{l} x = 4 - 3t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{array}\right\}$

$r\colon \begin{cases} P(4, 0, 1) \\ \vec{u} = (-3, 1, -2) \end{cases}$ $\qquad s\colon \begin{cases} Q(1, 1, -1) \\ \vec{v} = (3, -1, 2) \end{cases}$ $\qquad \overrightarrow{PQ} = (-3, 1, -2)$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

Las rectas son coincidentes.

100 **Decide si las dos rectas se cortan, y en caso de que sea así, calcula el plano que las contiene.**

$$r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \qquad s: \left.\begin{array}{r} x = 3-2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right\}$$

$$r: \begin{cases} P(-3, 1, -1) \\ \vec{u} = (2, 2, -1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(3, 1, 0) \\ \vec{v} = (-2, 1, -1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ} = (6, 0, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son secantes.

El plano que las contiene es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z+1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x+4y+6z-1=0 \to \pi: x-4y-6z+1=0$$

101 **Di si las dos rectas son o no paralelas.**

$$r: \left.\begin{array}{r} x+2y-z=13 \\ 2x-y-7z=16 \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{r} x = 1-3\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right\}$$

En caso afirmativo, determina la ecuación del plano que las contiene.

$$r: \left.\begin{array}{r} x+2y-z=13 \\ y+z=2 \end{array}\right\} \to r: \left.\begin{array}{l} x = 9+3t \\ y = 2-t \\ z = t \end{array}\right\}$$

$$r: \begin{cases} P(9, 2, 0) \\ \vec{u} = (3, -1, 1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(1, 2, 0) \\ \vec{v} = (-3, 1, -1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ} = (-8, 0, 0)$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son paralelas.

El plano que las contiene es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 3 & -1 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8y-8z+16=0 \to \pi: y+z-2=0$$

102 Decide si estas dos rectas se cortan y, en caso afirmativo, determina el punto de corte.

$$r: \left.\begin{aligned} x &= -4+7\lambda \\ y &= 2\lambda \\ z &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad s: \left.\begin{aligned} x &= 1-\lambda \\ y &= 10+4\lambda \\ z &= 3+2\lambda \end{aligned}\right\}$$

$$r: \begin{cases} P(-4, 0, -1) \\ \vec{u} = (7, 2, 0) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(1, 10, 3) \\ \vec{v} = (-1, 4, 2) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ} = (5, 10, 4)$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son secantes.

$$\left.\begin{aligned} -4+7\lambda &= 1-t \\ 2\lambda &= 10+4t \\ -1 &= 3+2t \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ t = -2 \end{cases} \rightarrow P(3, 2, -1) \text{ es el punto de corte.}$$

103 Decide las posiciones relativas de las siguientes parejas formadas por un plano y una recta.

a) $r: \left.\begin{aligned} x &= 3-\lambda \\ y &= 2 \\ z &= -1+3\lambda \end{aligned}\right\} \qquad \pi: 2x-3y+z-2=0$

b) $r: \left.\begin{aligned} 2x+y-3z+3=0 \\ 5x+5y-7z+1=0 \end{aligned}\right\} \qquad \pi: x+3y-z-5=0$

c) $r: \left.\begin{aligned} -4x+y-2z+3=0 \\ 2x+4y+z+4=0 \end{aligned}\right\} \qquad \pi: \left.\begin{aligned} x &= -1-\lambda+\mu \\ y &= 2+2\lambda-\mu \\ z &= 3-\mu \end{aligned}\right\}$

a) $r: \left.\begin{aligned} \frac{x-3}{-1} &= \frac{z+1}{3} \\ y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{aligned} 3x-9 &= -z-1 \\ y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{aligned} 3x+z-8 &= 0 \\ y-2 &= 0 \end{aligned}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

La recta y el plano se cortan en un punto.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 3 \\ 5 & 5 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} = 2$$

La recta está contenida en el plano.

c) $\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2x - y - z + 3 = 0 \rightarrow \pi: 2x + y + z - 3 = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 60 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 3$$

La recta y el plano son paralelos.

104 **Estudia las posiciones relativas de las parejas de planos.**

a) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 + 2\lambda - 3\mu \\ z = 1 + 5\mu \end{array}\right\}$ $\qquad \pi': -5x + 5y + 4z - 12 = 0$

b) $\pi: x - 2y + 4z - 1 = 0$ $\qquad \pi': 2x + 5y - 3z + 2 = 0$

c) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = -\lambda - \mu \\ y = 3 + 2\lambda + 3\mu \\ z = 1 + 3\lambda + 4\mu \end{array}\right\}$ $\qquad \pi': x - y + z + 2 = 0$

a) $\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 10x - 10y - 8z - 22 = 0 \rightarrow \pi: 5x - 5y - 4z - 11 = 0$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -11 \\ -5 & -12 \end{vmatrix} = -115 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 & -11 \\ -5 & 5 & 4 & -12 \end{pmatrix} = 2$$

Los planos son paralelos.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = 2$

$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 2$

Los planos son secantes.

c) $\pi: \begin{vmatrix} x & y-3 & z-1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -x + y - z = 0 \rightarrow \pi: x - y + z + 2 = 0$

Las ecuaciones de π y π' son iguales, es decir, los planos son coincidentes.

Haciéndolo por rangos:

$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$

Los planos son coincidentes.

105 **Estudia las posiciones relativas de los tríos de planos siguientes.**

a) $\pi: 4x + y + 3z + 2 = 0$
$\pi': -3x + 5y + 4z - 7 = 0$
$\pi'': y + 3z - 6 = 0$

b) $\pi: x - 2y + 3z - 1 = 0$
$\pi': 2x + y - z + 5 = 0$
$\pi'': 7x - 4y + 7z + 7 = 0$

c) $\pi: 6x - 3y + 9z - 1 = 0$
$\pi': -x + 2y - z + 1 = 0$
$\pi'': 4x - 2y + 6z + 5 = 0$

d) $\pi: 2x - 3y + z = 0$
$\pi': 2x - y + 4z + 5 = 0$
$\pi'': 6x - 5y + 9z - 1 = 0$

a) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 44 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3$

$\text{Rango}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = 3$

Los planos se cortan en un punto.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 7 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & -4 & 7 & 7 \end{pmatrix} = 2$$

Como no hay dos planos coincidentes, los tres planos se cortan en una recta.

c) $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 9 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 51 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 3$$

Como π y π'' son paralelos:

$$\frac{6}{4} = \frac{-3}{-2} = \frac{9}{6} \neq \frac{-1}{7}$$

Tenemos dos planos paralelos que cortan al tercero.

d) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 6 & -5 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 6 & -5 & 9 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -44 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & -5 & 9 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

Como no hay planos paralelos, los planos se cortan dos a dos.

106 Determina la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r_1: \left.\begin{array}{r} 7x+5y-7z-12=0 \\ 2x+3z+11=0 \end{array}\right\} \qquad r_2: \left.\begin{array}{r} 5x-5y-z-16=0 \\ 3x-2y-7=0 \end{array}\right\}$$

(Aragón. Junio 2007. Opción B. Cuestión 4)

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & -7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 260 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 7 & 5 & -7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & -5 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & -7 & -12 \\ 2 & 0 & 3 & 11 \\ 5 & -5 & -1 & -16 \\ 3 & -2 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -552 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 7 & 5 & -7 & -12 \\ 2 & 0 & 3 & 11 \\ 5 & -5 & -1 & -16 \\ 3 & -2 & 0 & -7 \end{pmatrix} = 4$$

Las rectas se cruzan.

107 Determínese si el plano $\pi: 2x+3y-4=0$ corta o no al segmento de extremos $A(2,1,3)$ y $B(3,2,1)$.

(Castilla y León. Junio 2004. Prueba A. Cuestión 4)

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y por B.

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -2)$

$$r: \left.\begin{array}{r} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = 3-2t \end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-2}$$

$$\rightarrow r: \left.\begin{array}{r} x-2 = y-1 \\ -2x+4 = z-3 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{r} x-y-1=0 \\ 2x+z-7=0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 3$$

La recta y el plano se cortan en un punto. Calculamos su intersección.

$$2(2+t)+3(1+t)-4=0 \rightarrow t = -\frac{3}{5} \rightarrow P\left(\frac{7}{5}, \frac{2}{5}, \frac{21}{5}\right)$$

Este punto no está situado entre A y B, por tanto, el plano no corta al segmento.

108 Sea r la recta de ecuación $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{4}$ y la recta s dada por $\left.\begin{array}{r}3x-2y+z=2\\-x+2y-3z=2\end{array}\right\}$.

a) Determina la posición relativa de ambas rectas.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 4)

a) s: $\left.\begin{array}{r}3x-2y+z=2\\y-2z=2\end{array}\right\}\rightarrow s\colon \left.\begin{array}{l}x=2+t\\y=2+2t\\z=t\end{array}\right\}$ $\qquad s\colon\begin{cases}Q(2,2,0)\\\vec{v}=(1,2,1)\end{cases}$

$r\colon\begin{cases}P(5,-2,0)\\\vec{u}=(2,-1,4)\end{cases}$ $\qquad \overrightarrow{PQ}=(-3,4,0)$

$$\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=5\neq 0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}2&-1&4\\1&2&1\end{pmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix}2&-1&4\\1&2&1\\-3&4&0\end{vmatrix}=35\neq 0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}2&-1&4\\1&2&1\\-3&4&0\end{pmatrix}=3$$

Las rectas se cruzan.

b) $\pi\colon\begin{vmatrix}x-5&y+2&z\\2&-1&4\\1&2&1\end{vmatrix}=0\rightarrow \pi\colon 9x-2y-5z-49=0$

109 Sean r y s las rectas dadas por:

$r\colon\left.\begin{array}{r}2x-y=m\\z+2y=3\end{array}\right\}$ $\qquad s\colon\left.\begin{array}{r}x+y=2\\x+2z=3\end{array}\right\}$

a) Halla m para que ambas rectas se corten.
b) Para $m=1$, halla la ecuación del plano que contiene a r y a s.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba A. Problema 1)

a) El rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada tiene que ser 3.

$$\begin{vmatrix}2&-1&0\\0&2&1\\1&1&0\end{vmatrix}=-3\neq 0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&1\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}=3$$

$$\begin{vmatrix}2&-1&0&m\\0&2&1&3\\1&1&0&2\\1&0&2&3\end{vmatrix}=5m-5\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}2&-1&0&m\\0&2&1&3\\1&1&0&2\\1&0&2&3\end{pmatrix}=3\rightarrow m=1$$

b) $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ z + 2y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 5 - 4t \end{array}\right\}$

$s\colon \left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{array}\right\} \rightarrow s\colon \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{array}\right\}$

El plano que buscamos pasa por el punto $A(0, -1, 5) \in r$ y tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas r y s.

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x & y+1 & z-5 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi\colon 10x + 7y + 6z - 23 = 0$$

110 **Estudia, según los valores del parámetro *k*, la posición relativa de las rectas siguientes:**

$$x - k = \frac{y+1}{2k-1} = \frac{z}{2} \qquad\qquad \frac{x}{k+1} = \frac{y-2}{-1} = z + 2$$

(Baleares. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 2)

$r\colon \begin{cases} P(k, -1, 0) \\ \vec{u} = (1, 2k-1, 2) \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} Q(0, 2, -2) \\ \vec{v} = (k+1, -1, 1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ} = (-k, 3, -2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2k-1 \\ k+1 & -1 \end{vmatrix} = -k(2k+1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k+1 & 1 \end{vmatrix} = -2k - 1$$

$$\begin{vmatrix} 2k-1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2k + 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2k-1 & 2 \\ k+1 & -1 & 1 \\ -k & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2k^2 + 7k + 3 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$2k^2 + 7k + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Si $k \in \mathbb{R} - \left\{-3, -\dfrac{1}{2}\right\}$: el rango de la matriz formada por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ es 3 y el de la matriz determinada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es 2, por tanto, las rectas se cruzan.
- Si $k = -3$: los rangos de ambas matrices valen 2, luego las rectas son secantes.
- Si $k = -\dfrac{1}{2}$: el rango de la matriz formadapor $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ es 2 y el de la matriz determinada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es 1, por lo que las rectas son paralelas.

111 Dadas las rectas: $r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{-3}$ $\qquad s: \left.\begin{array}{r} x = 1+\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{array}\right\}$

a) Estudia su posición relativa.

b) Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

(Galicia. Septiembre 2007. Bloque 2. Opción 2)

a) $r: \begin{cases} P(0, 1, 2) \\ \vec{u} = (1, -1, -3) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(1, 3, 1) \\ \vec{v} = (1, 2, 1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ} = (1, 2, -1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

Las rectas se cruzan.

b) $$\pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 5x - 4y + 3z - 2 = 0$$

112 Dadas las siguientes rectas: $\dfrac{x-a}{-2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ $\qquad \left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 2x + z = 1 \end{array}\right\}$

calcula el valor de a de tal manera que ambas rectas se corten. Determina el punto de corte.

(Baleares. Septiembre 2004. Opción A. Cuestión 4)

$$s: \left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 2x + z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 - 2t \end{array}\right\} \qquad s: \begin{cases} Q(0, 1, 1) \\ \vec{v} = (1, -3, -2) \end{cases}$$

$r: \begin{cases} P(a, -1, -1) \\ \vec{u} = (-2, -1, 2) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ} = (-a, 2, 2)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas se cortan si la matriz formada por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ tiene rango 2.

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -a & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 10 - 8a = 0 \rightarrow a = \frac{5}{4}$$

$$\left.\begin{array}{r} \frac{5}{4} - 2\lambda = t \\ -1 - \lambda = 1 - 3t \\ -1 + 2\lambda = 1 - 2t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4} \\ t = \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow P\left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\right) \text{ es el punto de corte.}$$

113 Sean r_1 y r_2 las rectas de ecuaciones: $r_1\!:\left.\begin{array}{r} x-2z-1=0\\ y-z-2=0\end{array}\right\}$ $\quad r_2\!:\left.\begin{array}{r} x+y+z-1=0\\ -2y+2z-a=0\end{array}\right\}$

Determina el valor de a para que r_1 y r_2 sean coplanarias.

(La Rioja. Junio 2005. Propuesta A. Ejercicio 5)

Las rectas son coplanarias si no se cruzan. Así, la matriz formada por las dos rectas no puede tener rango 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & -a\end{vmatrix} = -4a-16=0 \rightarrow a=-4$$

114 Se consideran la recta $r\!:\left.\begin{array}{l} x=2+t\\ y=2+2t\\ z=3+3t\end{array}\right\}$, el plano $\pi\!: 2x-4y-2z=0$

y el punto $P(1, 1, 1)$. Se pide:

a) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo al plano π.

b) Determinar la ecuación general del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P.

(Canarias. Junio 2008. Bloque 4. Opción B)

a) $\pi\!:\left.\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=\mu\\ z=\lambda-2\mu\end{array}\right\}$ $\quad \pi_1\!:\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=0 \rightarrow \pi_1\!: x-2y-z+2=0$

b) $r\!:\begin{cases} Q(2, 2, 3)\\ \vec{u}=(1, 2, 3)\end{cases}$ $\quad \overrightarrow{PQ}=(1, 1, 2)$

$$\pi_2\!:\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0 \rightarrow \pi_2\!: x+y-z-1=0$$

115 Calcula a para que la recta: $r\!:\left.\begin{array}{r} 5x-y+z=0\\ x-y-z=-4\end{array}\right\}$ sea paralela al plano $\pi\!: ax-6y+4z=5$.

(La Rioja. Junio 2002. Propuesta A. Ejercicio 2)

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -4\\ -6 & 4 & 5\end{vmatrix}=18\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & -4\\ a & -6 & 4 & 5\end{pmatrix}=3$$

La recta es paralela al plano si la matriz de coeficientes tiene rango 2.

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ a & -6 & 4\end{vmatrix}=2a-52=0 \rightarrow a=26$$

116 Sea π el plano de ecuación $2x + 3y + 4z = a$ y r la recta que contiene al punto $P(1, 1, -1)$ y tiene como vector de dirección a $\vec{v} = (1, 2, -2)$.
¿Existe algún valor de a para el cual la recta esté contenida en el plano? Razonar la contestación en caso negativo. En caso afirmativo encontrar el valor de a.

(País Vasco. Julio 2006. Bloque B. Cuestión B)

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2} \rightarrow r: \left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ 2x + z = 1 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

La recta está contenida en el plano si la matriz ampliada tiene rango 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = 2a - 2 = 0 \rightarrow a = 1$$

117 ¿Para qué valores del parámetro m la recta: $x = y + 1 = \dfrac{11 - mz}{3}$ es paralela al plano $2x + y + z = 9$? Determinar el punto de intersección de la recta y el plano para $m = 2$.

(Aragón. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 4)

$$r: \left.\begin{array}{r} x = y + 1 \\ 3x = 11 - mz \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ 3x + mz = 11 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 11 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & m & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} = 3$$

La recta es paralela al plano si la matriz de coeficientes tiene rango 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & m \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 3m = 0 \rightarrow m = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & m \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Calculamos la intersección para $m = 2$.

$$\text{Si } m = 2 \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -1 + t \\ z = \dfrac{11}{2} - \dfrac{3}{2}t \end{array}\right\} \text{ Sustituyendo en el plano:}$$

$$2t - 1 + t + \frac{11}{2} - \frac{3}{2}t = 9 \rightarrow t = 3 \rightarrow P(3, 2, 1) \text{ es el punto de intersección.}$$

118 **Estudiar la posición relativa del plano π: $5x + \lambda y - 2z + 1 = 0$ y la recta r: $\left.\begin{matrix} 2x - y = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{matrix}\right\}$ según los valores del parámetro λ.**

(Canarias. Septiembre 2005. Opción B. Cuestión 4)

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} 5 & \lambda & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & \lambda & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\lambda - 8$$

- Si $\lambda \neq -2$

  El rango de la matriz de coeficientes es 3 y coincide con el de la matriz ampliada, por tanto, la recta y el plano se cortan.
- Si $\lambda = -2$

  El rango de la matriz de coeficientes es 2, distinto al de la matriz ampliada, así la recta y el plano son paralelos.

119 **Sean los planos:**

$$\pi_1: 2x + 3y + z = 2$$
$$\pi_2: x + y - z = 1$$

a) Determina la posición relativa de los mismos.

b) Calcula una recta que esté contenida en el plano $\pi_2: x + y - z = 1$, sea paralela a la intersección de esos dos planos y que pase por el punto $(5, -3, 1)$.

(Asturias. Junio 2003. Bloque 5)

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Los planos son secantes.

b) $r: \left.\begin{matrix} 2x + 3y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{matrix}\right\} \to r: \left.\begin{matrix} 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 4y = 3 \end{matrix}\right\} \to r: \left.\begin{matrix} x = 1 - 4t \\ y = 3t \\ z = -t \end{matrix}\right\}$

El punto $(5, -3, 1)$ pertenece a esta recta ($t = -1$), por tanto, dicha recta es la que cumple las condiciones del ejercicio.

120 Consideramos las rectas:

$$r_1: \left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ y+z=2 \end{array}\right\} \qquad r_2: \left.\begin{array}{r} y=1 \\ x+y+z=6 \end{array}\right\} \qquad r_3: \left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ y-z=3 \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) Demuestra que las rectas r_1 y r_2 se cortan en un único punto.

b) Halla las ecuaciones en forma continua de la recta que pasa por el punto de intersección de r_1 y r_2 y es paralela a r_3.

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 4. Pregunta A)

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = 3$$

Las rectas r_1 y r_2 se cortan en un punto.

b) $$\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ y+z=2 \\ y=1 \\ x+y+z=6 \end{array}\right\} \to P(4,\ 1,\ 1) \text{ es el punto de intersección de } r_1 \text{ y } r_2.$$

$$r_3: \left.\begin{array}{l} x=4+t \\ y=3+t \\ z=t \end{array}\right\} \quad \text{La recta es } s: \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$$

121 Estudie si existe algún punto que pertenezca a la vez a los tres planos siguientes. Calcule los puntos en común (si existen).

$$\pi_1: x-y+z=0 \qquad \pi_2: z=2y \qquad \pi_3: \left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda+\mu \\ z=1+2\lambda-\mu \end{array}\right\}$$

(Murcia. Septiembre 2007. Bloque 2. Cuestión B)

$$\pi_3: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3x+y+z+1=0 \to \pi_3: 3x-y-z-1=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Los tres planos se cortan en un punto.

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2y-z=0 \\ 3x-y-z=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2y-z=0 \\ 2y-4z=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2y-z=0 \\ 3z=-1 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{6} \\ y=-\dfrac{1}{6} \\ z=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

El punto de intersección es: $P\left(\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{3}\right)$

122 **Discute, según los valores de a, la posición relativa de los siguientes planos indicando las figuras que determinan (no es necesario resolverlo).**

$\pi_1: (a+1)x+y+z=3 \qquad \pi_2: x+2y+az=4 \qquad \pi_3: x+ay+2z=2a$

(La Rioja. Septiembre 2003. Propuesta A. Ejercicio 5)

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = -a^3-a^2+6a$$

$$-a^3-a^2+6a=0 \to -a(a^2+a-6)=0 \to \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \\ a=-3 \end{array}\right.$$

- Si $a \in \mathbb{R}-\{-3, 0, 2\}$: el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos es compatible determinado, es decir, los planos se cortan en un punto.

- Si $a=-3$: $\left.\begin{array}{r} -2x+y+z=3 \\ x+2y-3z=4 \\ x-3y+2z=-6 \end{array}\right\}$

  $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \to$ El rango de la matriz de coeficientes es 2.

  $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \to$ El rango de la matriz ampliada es 3.

  Como no hay planos paralelos, los planos se cortan dos a dos.

- Si $a=0$: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x+2y=4 \\ x+2z=0 \end{array}\right\}$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to$ El rango de la matriz de coeficientes es 2.

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to$ El rango de la matriz ampliada es 3.

  Como no hay planos paralelos, los planos se cortan dos a dos.

- Si $a = 2$: $\left.\begin{aligned} 3x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 4 \\ x + 2y + 2z &= 4 \end{aligned}\right\}$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow$ El rango de las dos matrices es 2.

Dos planos coinciden y cortan al primero en una recta.

123 Determina a y b para que los planos:

$$x + y + z = 2 \qquad 2x + 3y + z = 3 \qquad ax + 10y + 4z = b$$

se corten en una recta r. Da algún tipo de ecuaciones para r (las que quieras).

(La Rioja. Septiembre 2007. Propuesta B. Ejercicio 5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Los planos se cortan en una recta si el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada es 2. Entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 10 & 4 \end{vmatrix} = 14 - 2a = 0 \rightarrow a = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 10 & b \end{vmatrix} = b - 11 = 0 \rightarrow b = 11$$

$$r\!: \left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x + 3y + z &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow r\!: \left.\begin{aligned} x &= 1 - 2t \\ y &= t \\ z &= 1 + t \end{aligned}\right\} \rightarrow r\!: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$$

124 En el espacio se consideran los tres planos de ecuaciones:

$$\pi_1 : x + 2y + z = 1 \qquad \pi_2 : px + y + pz = 1 \qquad \pi_3 : px + y + 2z = 1$$

donde p es un parámetro real.

a) Averigüe para qué valores de p los tres planos se cortan en un único punto. Halle este punto cuando $p = 1$.

b) ¿Hay algún valor de p que hace que la intersección común sea una recta? Si es así, escriba la ecuación vectorial de esta recta.

c) Encuentre cuál es la posición relativa de los tres planos cuando $p = \frac{1}{2}$.

(Cataluña. Junio 2007. Problema 6)

a) Los planos se cortan en un punto si el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada es 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 1 & p \\ p & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2p^2 - 5p + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{2} \\ p = 2 \end{cases}$$

- Si $p \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$: el sistema es compatible determinado, es decir, los tres planos se cortan en un único punto.
- Si $p = 1$:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ y=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$$

El punto de intersección es $P(1, 0, 0)$.

b) Si $p = 2$:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=1 \\ 2x+y+2z=1 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Como la segunda y la tercera ecuación son iguales, el rango de ambas matrices es 2.

Un plano corta a dos planos coincidentes en una recta.

$$r: \left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3}-t \\ y=\frac{1}{3} \\ z=t \end{array}\right\} \rightarrow r: (x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + t(-1, 0, 1)$$

c) Si $p = \frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ \frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}z=1 \\ \frac{1}{2}x+y+2z=1 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz de coeficientes es 2.}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz ampliada es 3.}$$

Como los dos primeros planos son paralelos, el tercero los corta en dos rectas paralelas.

125 Halla la ecuación del plano π que pasa por el punto $P(3, -1, 4)$ y es paralelo a las rectas:

$$r_1: \left.\begin{array}{r} 5x - y + 3z - 4 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \qquad r_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-3}$$

(Navarra. Junio 2008. Grupo 1. Opción A)

$$r_1: \left.\begin{array}{r} 5x - y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2z - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r_1: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{array}\right\}$$

El plano que buscamos pasa por $(3, -1, 4)$ y tiene como vectores directores los vectores directores de r_1 y r_2.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -3x - 3y - 3z + 18 = 0 \rightarrow \pi: x + y + z - 6 = 0$$

126 Halla las ecuaciones paramétricas de una recta sabiendo que corta a la recta r de ecuaciones $x = y = z$, es paralela al plano π de ecuación $3x + 2y - z = 4$ y pasa por el punto $A(1, 2, -1)$.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 6. Opción B. Ejercicio 4)

Determinamos los vectores directores de π.

$$\pi: 3x + 2y - z = 4 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -4 + 3\lambda + 2\mu \end{array}\right\}$$

Calculamos la ecuación del plano paralelo a π que pasa por A.

$$\pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi': 3x + 2y - z - 8 = 0$$

Hallamos el punto de intersección de la recta r con este plano.

$r: x = y = z$

$\pi: 3x + 2y - z - 8 = 0 \rightarrow 3x + 2x - x - 8 = 0 \rightarrow x = 2$

El punto de intersección del plano con la recta $r: x = y = z$ es $P(2, 2, 2)$.

La recta que se pide pasa por A y por P.

$\overrightarrow{AP} = (1, 0, 3)$

$$r': \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 + 3t \end{array}\right\}$$

127 Estudia y resuelve, según los valores de λ, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2x - y = \lambda \\ y + 3z = \lambda \\ x - y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Si las dos primeras ecuaciones representan una recta r y las dos últimas otra recta s, interpreta geométricamente los resultados obtenidos.

(La Rioja. Junio 2004. Propuesta B. Ejercicio 5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 3 & \lambda \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 14\lambda - 14 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

- Si $\lambda \neq 1$: el sistema es incompatible y las rectas se cruzan.
- Si $\lambda = 1$: el sistema es compatible determinado, es decir, las rectas se cortan en un punto.

128 Estudia la posición relativa de los cuatro planos siguientes: $\left.\begin{array}{r} 7x + 8y - z = 0 \\ x - y = -4 \\ 2x + 3y - 5z = -1 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}$

(Baleares. Septiembre 2001. Opción B. Cuestión 4)

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 70 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

Los cuatro planos no tienen una intersección común. Estudiamos las posiciones relativas de los tres primeros planos.

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 70 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

Los tres primeros planos se cortan en un punto. Como el cuarto plano no es paralelo a ninguno de los otros tres, este plano corta en una recta a cada uno de los otros planos.

129 Considera las rectas:

$$r: x-3=y-4=\frac{z-5}{2} \qquad s: \frac{x-5}{-2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-m}{2}$$

donde $m \in \mathbb{R}$.

a) Estudia, según los valores del parámetro m, las posiciones relativas de las dos rectas. En caso de que se corten las rectas r y s, calcula el punto de corte.

b) Cuando sean coplanarias, determina la ecuación general del plano que las contiene.

c) Estudia la posición relativa del plano del apartado anterior con el plano que pasa por los tres puntos: $A(3, 4, 5)$, $B(5, 4, -3)$ y $C(1, 2, 1)$.

Indicación: No es necesario construir el plano que pasa por esos tres puntos.

(Cantabria. Septiembre 2006. Bloque 3. Opción B)

a) $r: \begin{cases} P(3, 4, 5) \\ \vec{u}=(1, 1, 2) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(5, 4, m) \\ \vec{v}=(-2, -1, 2) \end{cases}$

$\overrightarrow{PQ}=(2, 0, m-5)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & m-5 \end{vmatrix} = m+3$$

- Si $m+3 \neq 0 \rightarrow m \neq -3$:

  El rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la ampliada 3, las rectas se cruzan.

- Si $m+3=0 \rightarrow m=-3$:

  El rango de las dos matrices es 2, las rectas son secantes.

Calculamos en este caso la intersección entre las dos rectas. Para ello igualaremos las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{r} 3+\lambda=5-2t \\ 4+\lambda=4-t \\ 5+2\lambda=-3+2t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda=-2 \\ t=2 \end{cases} \rightarrow C(1, 2, 1) \text{ es el punto de corte.}$$

b) Las rectas son coplanarias si son secantes, es decir, si $m=-3$.

El plano que buscamos pasa por $P(3, 4, 5) \in r$ y tiene como vectores directores los vectores directores de r y s.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 4x-6y+z+7=0$$

c) $A(3, 4, 5) \in r$

$B(5, 4, -3) \in r$

$C(1, 2, 1) \qquad 1-3=2-4=1-5 \rightarrow C \in r$

Los puntos A, B y C pertenecen a las rectas r y s por lo que también están en el plano. El plano que pasa por estos tres puntos es coincidente con el anterior.

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Responde a estas cuestiones.

a) ¿Están alineados los puntos $A(1, 0, -1)$, $B(-1, 1, 2)$ y $C(3, 0, 1)$? Justificar la respuesta.

b) En caso afirmativo, determinar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo, determinar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos.

(Canarias. Junio 2004. Opción A. Cuestión 4)

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 3)$ $\qquad \overrightarrow{AC} = (2, 0, 2)$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ no son proporcionales, por tanto, los puntos A, B y C no están alineados.

b) $$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2x + 10y - 2z - 4 = 0 \rightarrow \pi: x + 5y - z - 2 = 0$$

2 Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta dada por $r: \left.\begin{array}{r} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{array}\right\}$.

¿Existe algún valor de s tal que el punto $(-3, s, s)$ pertenezca a la recta? Razona la respuesta tanto en caso afirmativo como negativo.

(País Vasco. Septiembre 2004. Bloque B. Cuestión B)

$$r: \left.\begin{array}{r} 3x + y + z = 0 \\ 4x + 3z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = -3t \\ y = 5t \\ z = 4t \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} -3 = -3t \\ s = 5t \\ s = 4t \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow t = -1 \\ \rightarrow s = -5 \\ \rightarrow -5 \neq -4 \rightarrow \text{No existe valor de } s \text{ tal que } (-3, s, s) \in r. \end{array}$$

3 Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi: x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s: \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta $r: \left.\begin{array}{r} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{array}\right\}$.

(Andalucía. Junio 2002. Opción A. Ejercicio 4)

$$s: \left.\begin{array}{l} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{array}\right\}$$

Calculamos la intersección entre s y π.

$\pi: x + y - z + 6 = 0 \rightarrow 3t + 2 + t - (-1 + t) + 6 = 0 \rightarrow t = -3$

$P(-9, -1, -4)$ es el punto de intersección del plano π y de la recta s.

$$r: \left.\begin{array}{r} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 4 - 3t \\ z = 13 - 13t \end{array}\right\}$$

La recta que buscamos es: $r': \left.\begin{array}{l} x = -9 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = -4 - 13t \end{array}\right\}$

4 **Considera un plano $\pi: x + y + mz = 3$ y la recta $r:\ x = y - 1 = \dfrac{z-2}{2}$.**

a) Halla m para que r y π sean paralelos.

b) ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π?

(Andalucía. Septiembre 2005. Opción A. Ejercicio 4)

$$r: \left.\begin{array}{r} x = y - 1 \\ 2x = z - 2 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{r} x - y = -1 \\ 2x - z = -2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 2 + 2m \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

a) Si $2 + 2m = 0 \rightarrow m = -1$:
El rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3.
La recta r y el plano π son paralelos.

b) El rango de la matriz ampliada es 3 para cualquier valor de m, por lo que no hay ningún valor para el que la recta r esté contenida en el plano π.

5 **Estudia la posición relativa de los planos:**

$$\pi: x + y + 2z = 2 \quad \beta: 2x + my + 2mz = 2 + m \quad \alpha: mx + 2y + (2 + m)z = 0$$

según los valores de m.

(Cataluña. Septiembre 2007. Cuestión 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 4 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2+m \\ m & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 - m^2$$

- Si $m \neq 2$: el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada es 3, los planos se cortan en un único punto.
- Si $m = 2$: el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada es 1, los planos son coincidentes.

6 Dadas las rectas $r: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-k}{1}$ y $s: \left.\begin{array}{r} x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{array}\right\}$:

a) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

(Madrid. Septiembre 2003. Opción A. Ejercicio 2)

a) $r: \left.\begin{array}{l} x-1=-y-1 \\ x-1=-z+k \end{array}\right\} \to r: \left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x+z=k+1 \end{array}\right\}$

Las rectas son coplanarias si no se cruzan, es decir, si la matriz ampliada no tiene rango 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & k+1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \to k-4=0 \to k=4$$

Si $k=4$, las rectas están contenidas en el mismo plano.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Si $k=4$, las rectas se cortan en un punto.

Calculamos el punto de intersección entre r y s.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x+z=5 \\ x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-2 \\ z=7 \end{array}\right.$$

El punto de intersección entre r y s es $P(-2, 2, 7)$.

Determinamos un vector director de s.

$$s: \left.\begin{array}{r} x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{array}\right\} \to s: \left.\begin{array}{l} x=t \\ y=-2-2t \\ z=1-3t \end{array}\right\} \qquad \vec{v}=(1,-2,-3)$$

El plano que buscamos pasa por $P(-2, 2, 7) \in r \cap s$ y tiene como vectores directores los vectores directores de r y s.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -x-2y+z-5=0 \to \pi: x+2y-z+5=0$$

7 Sea r la recta definida por $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-k}{4}=\dfrac{z}{5}$ y s la recta definida por $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$.

a) Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.

b) Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

(Andalucía. Año 2007. Modelo 3. Opción A. Ejercicio 4)

a) $r: \begin{cases} P(2, k, 0) \\ \vec{u}=(3, 4, 5) \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} Q(-2, 1, 3) \\ \vec{u}=(-1, 2, 3) \end{cases}$ $\quad \overrightarrow{PQ}=(-4, 1-k, 3)$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=10\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=2$$

Las rectas se cortan si $\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1-k & 3 \end{pmatrix}=2.$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1-k & 3 \end{vmatrix}=8+14k=0 \rightarrow k=-\frac{4}{7}$$

b) El plano que buscamos pasa por $Q(-2, 1, 3)\in s$ y tiene como vectores directores los vectores directores de r y s.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=2x-14y+10z-12=0 \rightarrow \pi: x-7y+5z-6=0$$

8 Calcula el valor de a para que la recta $r: \left.\begin{aligned} 5x-y+z&=0 \\ x-y-z&=-4 \end{aligned}\right\}$ sea paralela al plano $\pi: ax-6y+4z=5$.

(La Rioja. Junio 2002. Propuesta B. Ejercicio 2)

Para que la recta y el plano sean paralelos, el rango de la matriz de coeficientes debe ser 2, y el de la matriz ampliada, 3.

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-4\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ a & -6 & 4 \end{vmatrix}=2a-52 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \\ -6 & 4 & 5 \end{vmatrix}=18\neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3 para cualquier valor de a. El rango de la matriz de coeficientes es 2 si se cumple:

$$2a-52=0 \rightarrow a=26$$