1 Matrices

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Los jardines cifrados

De la pared del fondo partía un largo pasillo débilmente iluminado; lo recorrí y, al final, me encontré ante una puerta con apertura de combinación: junto a la puerta, bajo una pequeña pantalla cuadrada, había nueve botones numerados, dispuestos en tres filas de tres. Me acordé del cuadrado mágico. El enano me había dicho que el contenido de la cajita me abriría más de una puerta, y no tenía por qué referirse sólo a la música. Saqué el cuadrado de metal [una reproducción del cuadrado de números que aparece en el grabado de Durero titulado *Melancolía*] y lo examiné a la débil luz del pasillo. Las combinaciones de las puertas solían tener cuatro cifras, y los números más significativos de aquel cuadrado eran el 15 y el 14 del centro de la última fila: 1514 era el año en que Durero había realizado su *Melancolía*, y El Bosco había muerto por esas fechas, tal vez ese mismo año. Marqué el 1514 y las cifras fueron apareciendo en la pantallita cuadrada: las tres primeras en la fila superior y el 4 debajo del primer 1. Tras unos segundos, las cifras desaparecieron sin que ocurriera nada. Entonces pensé que tenía que llenar la pantalla y marcar, por tanto, nueve cifras. La probabilidad de acertar era remotísima. Marqué las nueve primeras cifras de mi cuadrado mágico, y luego las nueve últimas. Luego probé con los números del 1 al 9 en el orden en que aparecían en el cuadrado: 3, 2, 5, 8, 9, 6, 7, 4, 1. Probé varias combinaciones más, pero sin éxito.

Entonces, cuando estaba a punto de renunciar, se me ocurrió otra posibilidad: el cuadrado mágico que tenía en la mano podía ser simplemente un modelo, un referente. Puesto que tenía que llenar una pantalla de tres por tres y había nueve botones numerados del 1 al 9, tal vez tuviera que componer con ellos un cuadrado mágico de orden tres: disponer los nueve dígitos de forma que todas sus filas, columnas y diagonales sumaran lo mismo. […] Estaba cansado y aturdido, y mi primer impulso fue intentar resolver el cuadrado mágico por tanteo. Pero mi reducida pizarra manual no permitía muchos ensayos... De pronto me acordé del método de Holmes: descartar lo imposible. ¿Qué pasaría si el 1 estuviera en la primera casilla?, me pregunté. En ese caso, como todas las filas y las columnas tenían que sumar 15, habría que poner en la primera fila dos números que sumaran 14, y... [...]

Marqué los números en ese orden y el cuadrado mágico se formó en la pantalla. Con un suave zumbido, la puerta se abrió.

CARLO FRABETTI

Los jardines cifrados
Carlo Frabetti

El narrador de esta novela es un hombre de mediana edad que ha sido abandonado por su mujer Nora. Un día conoce a otra mujer, Elena, de la que se enamora a pesar de que un amigo, que es profesor de matemáticas, le dice que esa mujer no le conviene porque también va a dejarlo. Él contesta:

–Al menos quisiera tener la oportunidad de comprobarlo. No hay muchas mujeres así; ni una en un millón…

–¡Alto ahí! –exclamó el amigo levantando las manos con gesto alarmado–. Si empiezas a tergiversar los aspectos matemáticos de la cuestión, estás perdido.

–¿Qué tienen que ver las matemáticas con esto?

–Mucho. Estás cayendo en la falacia en la que caen todos los tontos enamorados, valga el pleonasmo, la absurda falacia de pensar que el objeto de su amor es único e irrepetible, o cuando menos un bien escasísimo.

–En toda mi vida sólo he conocido a dos mujeres como ellas.

–Supongamos, y es mucho suponer, que eso sea cierto. ¿A cuántas mujeres has conocido?

–Depende de lo que se entienda por conocer.

–¿Qué entiendes tú cuando dices que en toda tu vida sólo has conocido a dos como ellas?

–Bueno, he conocido a muchas mujeres lo suficiente como para darme cuenta de si, en principio, me interesaban o no.

–¿A cuántas?

–No las he contado, pero muchas… Varios cientos…

–Seamos generosos y consideremos que has conocido a mil mujeres lo suficiente como para darte cuenta de su posible adecuación como objeto amoroso. Bien, eso significa que la frecuencia estadística del tipo Nora-Elena es del dos por mil. Así que, para empezar, lo de «una en un millón» es pura hipérbole.

–Pero…

–Déjame seguir. Hay unos tres mil millones de mujeres en el mundo, de las cuales aproximadamente un tercio tendrán entre veinte y cincuenta años (por tu bien y el de ellas. espero que no te interesen las niñas ni las ancianas). Es decir, hay unos mil millones de mujeres con las que, en principio, podrías relacionarte. Si la incidencia del tipo Nora-Elena es del dos por mil, eso significa que hay unos dos millones de candidatas que se ajustan a tu concepto de mujer ideal. Como verás, es matemáticamente absurdo que te obsesiones con una de tan dudosa moralidad y oscuras intenciones como Elena, habiendo otros dos millones esperándote. […]

Construye el cuadrado mágico que le permitió al protagonista de esta novela abrir la puerta. Un cuadrado o un rectángulo de números como el anterior (aunque no cumpla ninguna propiedad especial) se llama matriz. Hay situaciones que se pueden representar mediante una matriz. Descubre alguna.

Si el 1 estuviera en la primera casilla haría falta encontrar tres parejas de números cuya suma fuera 14, y esto es imposible. Solo hay dos parejas que suman 14 : $9 + 5 = 8 + 6 = 14$.

Siguiendo el razonamiento si el 1 estuviera en la segunda casilla el cuadrado que formaría es:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x+y+3z=0 \\ 2x-2y-z=4 \\ x-3y+2z=4 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} -2y+z=-1 \\ 2x+y-3z=0 \\ x-5y\quad=7 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x+y+3z=0 \\ 2x-2y-z=4 \\ x-3y+2z=4 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=-y-3z} \left.\begin{array}{r} 2(-y-3z)-2y-z=4 \\ -y-3z-3y+2z=4 \end{array}\right\} \to - \begin{array}{r} -4y-7z=4 \\ -4y-\ z=4 \\ \hline -6z=0 \end{array} \to z=0$

$-4y-z=4 \xrightarrow{z=0} y=-1$

$x+y+3z=0 \xrightarrow{y=-1,\,z=0} x=1$

La solución del sistema es $x=1$, $y=-1$ y $z=0$.

b) $\left.\begin{array}{r} -2y+z=-1 \\ 2x+y-3z=0 \\ x-5y\quad=7 \end{array}\right\} \xrightarrow{z=2y-1} \left.\begin{array}{r} 2x+y-3(2y-1)=0 \\ x-5y=7 \end{array}\right\} \to - \begin{array}{r} 2x-5y=-3 \\ x-5y=7 \\ \hline x\qquad=-10 \end{array}$

$x-5y=7 \xrightarrow{x=-10} y=-\frac{17}{5}$

$z=2y-1 \xrightarrow{y=-\frac{17}{5}} z=-\frac{34}{5}-1=-\frac{39}{5}$

La solución del sistema es $x=-10$, $y=-\frac{17}{5}$ y $z=-\frac{39}{5}$.

002 Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} -x+2y=0 \\ 2x+y=5 \\ 2x-3y=1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ 2x+y=3 \\ 3x-4y=-1 \\ -x-2y=-3 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -x+2y=0 \\ 2x+y=5 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x=2y \\ 2x+y=5 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=2y} 4y+y=5 \to y=1$

$y=1 \xrightarrow{y=2y} x=2$

$2x-3y=1 \xrightarrow{x=2,\,y=1} 4-3=1$. En este caso, la solución del sistema es válida.

b) $+\begin{array}{r} x-y=0 \\ 2x+y=3 \\ \hline 3x\quad=3 \end{array} \to x=1 \to y=1$

$3x-4y=-1 \xrightarrow{x=1,\,y=1} 3-4=-1$

$-x-2y=-3 \xrightarrow{x=1,\,y=1} -1-2=-3$

En este caso, la solución del sistema es válida.

ACTIVIDADES

001 **Escribe una matriz que cumpla las siguientes condiciones.**

- **Su dimensión sea 3 × 2.**
- $a_{32} = -a_{21} = a_{11} = 1$
- $a_{22} = a_{12} = -a_{31} = -2$

La matriz es: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

002 **Se venden listones con dos calidades y de dos longitudes. Los listones grandes de baja calidad cuestan 0,75 € y 1 € los de alta, mientras que los listones pequeños de baja calidad cuestan 0,45 € y 0,60 € los de alta. Anota estos datos en forma de matriz.**

La matriz será de dimensión 2 × 2. Las filas indican la calidad; las columnas, el tamaño y los elementos de la matriz, el precio:

$$\begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}75 \\ 0{,}60 & 1 \end{pmatrix}$$

003 **Halla el valor de cada incógnita para que las dos matrices sean iguales.**

$$\begin{pmatrix} x+1 & 3 & 0 \\ z+1 & x+2 & z-1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & y+1 & 0 \\ y+2 & 3 & y \end{pmatrix}$$

Para que las matrices sean iguales deben tener la misma dimensión y ser iguales todos sus elementos.

Las dos matrices son de dimensión 2 × 3.

$x + 1 = 2 \rightarrow x = 1$ $\qquad z + 1 = y + 2 \rightarrow z = y + 1 \rightarrow z = 3$

$3 = y + 1 \rightarrow y = 2$ $\qquad x + 2 = 3 \rightarrow x = 1$

$0 = 0$ $\qquad z - 1 = y \rightarrow z = 1 + 2 = 3$

Es decir, la solución es $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$.

004 **Escribe un ejemplo de las siguientes matrices.**

a) Una matriz fila con cuatro columnas.
b) Una matriz columna con cuatro filas.
c) Una matriz cuadrada de orden 4.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $A = (1 \quad 3 \quad -1 \quad 0)$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

005 Escribe matrices que cumplan las siguientes condiciones.

a) Matriz diagonal de orden 4 que cumple que $a_{ii} = 7$.

b) Matriz identidad con tres filas.

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

006 Escribe matrices que cumplan estas condiciones.

a) Diagonal de orden 3.

b) Triangular superior con tres columnas, de forma que los elementos distintos de 0 cumplan que $a_{ij} = i + j$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

007 Realiza la siguiente operación con matrices:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

008 Averigua los elementos que faltan si $A + B = C$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & a & b \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & c & d \\ e & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & c & d \\ e & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4+c & 5+d \\ 5+e & a+3 & b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$f = 5$ $\quad$ $4 + c = 7 \rightarrow c = 3$ $\quad$ $5 + d = 6 \rightarrow d = 1$

$5 + e = 1 \rightarrow e = -4$ $\quad$ $a + 3 = -1 \rightarrow a = -4$ $\quad$ $b - 1 = 0 \rightarrow b = 1$

009 Haz la siguiente operación con matrices:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -12 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & 15 & -13 \end{pmatrix}$$

010 Realiza las operaciones indicadas con estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) $2(A - B) + 3C$

b) $(-2)(A - C) - 3(B + 2C)$

a) $2(A - B) + 3C = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 15 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(-2)(A - C) - 3(B + 2C) = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

011 Calcula la siguiente operación con matrices:

$$2 \cdot (3 \quad 1 \quad 4) \cdot 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot (3 \quad 1 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2 \cdot (3 \quad 1 \quad 4) \cdot 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot (3 \quad 1 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (6 \quad 2 \quad 8) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} - (9 \quad 3 \quad 12) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= 6 \cdot 0 + 2 \cdot 5 - 8 \cdot 10 - 9 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - 12 \cdot 0 = 10 - 80 - 45 + 3 = -112$

012 Halla el valor de x en esta igualdad de matrices.

$$(1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} - (1 \quad x \quad 9) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$(1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} - (1 \quad x \quad 9) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x - 1 - (3 - x) = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$

013 Realiza los productos que sean posibles entre las matrices A, B y C.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -13 & 11 \end{pmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -5 & 2 & -8 \\ 8 & -3 & 13 \end{pmatrix}$

$B \cdot C = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 7 & 0 \\ -11 & 2 \end{pmatrix} \qquad C \cdot A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -14 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$A \cdot C$ no se puede multiplicar, ya que la dimensión de A es 2×3 y la de C es 2×2.

$C \cdot B$ no se puede multiplicar, pues la dimensión de C es 2×2 y la de B es 3×2.

014 **Determina la dimensión de la matriz resultante de esta operación y, después, compruébalo efectuando las operaciones.**

$$2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

La dimensión de la matriz resultante es 2×3.

$$2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 6 & 0 & 2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}6 & 9 & -1\\ 12 & 15 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}22 & 25 & -3\\ 42 & 45 & 11\end{pmatrix}$$

015 **Comprueba si se cumple que $A\cdot(B+C)=B\cdot A+C\cdot A$, siendo las matrices:**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Si no es cierto, aplica correctamente la propiedad.

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

La igualdad correcta es: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 12 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ -9 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

016 **Realiza la operación $B\cdot A+C\cdot A$, sacando previamente factor común a la matriz A.**

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ -1 & 3 & -5\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

¿Qué propiedad has aplicado al sacar factor común?

Para sacar factor común aplicamos la propiedad distributiva por la derecha.

$B\cdot A+C\cdot A=(B+C)\cdot A$

$$(B+C)\cdot A=\left[\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ -1 & 3 & -5\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & -25\\ 8 & 12\end{pmatrix}$$

017 **Calcula $(A\cdot B)^t$, siendo A y B las siguientes matrices.**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & 8\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & 8\end{pmatrix}\right]^t=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & 8\end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ 1 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 7 & 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31 & 15 & -40\\ 57 & 24 & -27\end{pmatrix}$$

018 **Realiza esta operación con matrices:**

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}^t \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t\right]$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}^t \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t\right] = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 60 \\ 27 & 33 \end{pmatrix}$$

019 **Completa la siguiente matriz para que sea antisimétrica.**

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ c & 0 & -3 \\ 2 & d & e \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ c & 0 & -3 \\ 2 & d & e \end{pmatrix}$ es antisimétrica si: $a = 0$, $b = -2$, $c = -1$, $d = 3$, $e = 0$.

020 **Estudia si la matriz $A + B$ es simétrica.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ no es simétrica.

021 **Completa los elementos que faltan en la matriz para que sus filas sean linealmente dependientes.**

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & b & 2 \\ -9 & a & 0 & c \end{pmatrix}$$

Para que sus dos filas sean dependientes tienen que ser proporcionales, $F_2 = \lambda F_1$.

$$\left.\begin{array}{r} -9 = 3\lambda \\ a = -\lambda \\ 0 = b\lambda \\ c = 2\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda = -3 \\ a = 3 \\ 0 = b \\ c = -6 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & b & 2 \\ -9 & a & 0 & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

022 **Determina el rango de las siguientes matrices.**

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

a) Ninguna de las tres filas es proporcional a otra.

Comprobamos si alguna fila es combinación lineal de las otras dos:

$$F_1 = \lambda F_2 + \mu F_3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 1 = 2\lambda \\ -1 = \lambda + \mu \\ 3 = -\lambda + \mu \\ 0 = \lambda - \mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ -1 = \dfrac{1}{2} + \mu \\ 3 = -\dfrac{1}{2} + \mu \\ 0 = \dfrac{1}{2} - \mu \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ \mu = -\dfrac{3}{2} \\ \mu = \dfrac{7}{2} \\ \mu = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Como los valores de μ son diferentes, el sistema no tiene solución. Ninguna fila es combinación lineal de las otras dos, entonces las tres filas son linealmente independientes y, por tanto, el rango de la matriz es 3.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

b) Como $F_2 = 2F_1$ y $F_3 = 3F_1$, todas las filas son proporcionales. Luego el número de filas linealmente independientes es 1 y, por tanto, el rango de la matriz es 1.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} = 1$$

023 **Calcula el rango utilizando el método de Gauss:** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + \frac{5}{3}F_1]{} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & \dfrac{19}{3} & \dfrac{35}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + \frac{19}{3}F_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \dfrac{73}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

024 **Halla el rango mediante el método de Gauss:** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - 8F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 21 & -42 & -42 \\ 0 & 7 & -14 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - \frac{1}{3}F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 21 & -42 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

025 **Calcula, si es posible, la inversa de estas matrices utilizando la definición.**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 2a+4c=0 \\ 2b+4d=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 2(a+2c)=0 \\ 2(b+2d)=1 \end{array}\right\}$

El sistema no tiene solución, luego no existe matriz inversa.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 3a-5c=1 \\ 3b-5d=0 \\ -a+2c=0 \\ -b+2d=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3a-5c=1 \\ 3b-5d=0 \\ a=2c \\ b=2d-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 6c-5c=1 \\ 6d-3-5d=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=5 \\ c=1 \\ d=3 \end{array}\right.$$

Comprobamos que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa:

$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

026 **Halla, si es posible, la inversa de esta matriz:** $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a-3d+g=1 \\ 2b-3e+h=0 \\ 2c-3f+i=0 \\ 3a+d+g=0 \\ 3b+e+h=1 \\ 3c+f+i=0 \\ d=0 \\ e=0 \\ f=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a+g=1 \\ 2b+h=0 \\ 2c+i=3 \\ 3a+g=0 \\ 3b+h=1 \\ 3c+i=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a+g=1 \\ 3a+g=0 \\ 2b+h=0 \\ 3b+h=1 \\ 2c+i=3 \\ 3c+i=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ b=1 \\ c=-4 \\ g=3 \\ h=-2 \\ i=11 \end{array}\right.$$

Comprobamos que $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

027 Calcula, por el método de Gauss-Jordan, la inversa de estas matrices.

a) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=F_1-2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_1=\frac{1}{6}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+\frac{2}{3}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_1=F_1+21F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 15 & 21 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=-\frac{1}{3}F_1 \\ F_2=-3F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$

028 Halla, por el método de Gauss-Jordan, la inversa de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-\frac{2}{3}F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_3=F_3-\frac{1}{3}F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_1=F_1+\frac{9}{4}F_3 \\ F_2=F_2-\frac{15}{4}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & -\frac{15}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_1=\frac{1}{3}F_1 \\ F_2=\frac{1}{3}F_2 \\ F_3=\frac{9}{4}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{array}\right)$

029 **Clasifica las matrices y determina su dimensión.**

$$A = (1 \quad 2 \quad 2) \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$A = (1 \quad 2 \quad 2) \rightarrow$ Matriz fila de dimensión 1×3

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz columna de dimensión 3×1

$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz cuadrada de orden 3

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz diagonal de orden 2

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz unidad de orden 2

$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz triangular inferior de orden 3

$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz rectangular de dimensión 2×3

$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz triangular superior de orden 3

$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz triangular inferior de orden 2

030 **Una empresa de autobuses tiene tres líneas: *A*, *B* y *C*.**
El lunes salieron 5 autobuses en la línea *A*, 3 en la *B* y 4 en la *C*. El martes salieron 2 autobuses en la línea *A*, 1 en la *B* y 4 en la *C*. El miércoles salió 1 autobús en la línea *A*, 3 en la *B* y 5 en la *C*. Represéntalo en forma de matriz.

Lo representamos en una matriz de dimensión 3×3. Las filas representan los días de la semana: lunes, martes y miércoles. Las columnas corresponden a las líneas *A*, *B* y *C*, respectivamente. Cada elemento de la matriz es el número de autobuses.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

031 **Una fábrica elabora dos tipos de productos, *X* e *Y*, que vende a tres empresas *A*, *B* y *C*. Inicialmente distribuía 1.000 unidades de cada producto a cada una, pero en este mes la empresa *A* recibió 600 unidades de *X* y 300 de *Y*; la empresa *B* recibió 400 unidades de *X* y 800 de *Y*, y la empresa *C* recibió 900 unidades de *X* y 700 de *Y*. Representa mediante una matriz las disminuciones porcentuales que se han producido en la distribución de los productos a estas empresas.**

Las filas corresponden a cada tipo de empresa, *A*, *B* y *C*, y las columnas corresponden al tipo de producto, *X* e *Y*. Cada elemento de la matriz es la disminución porcentual de la producción.

$$100 - 100 \cdot \frac{600}{1.000} = 40 \qquad 100 - 100 \cdot \frac{300}{1.000} = 70$$

$$100 - 100 \cdot \frac{400}{1.000} = 60 \qquad 100 - 100 \cdot \frac{800}{1.000} = 20 \qquad \begin{pmatrix} 40 & 70 \\ 60 & 20 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

$$100 - 100 \cdot \frac{900}{1.000} = 10 \qquad 100 - 100 \cdot \frac{700}{1.000} = 30$$

032 **¿Son triangulares las siguientes matrices? ¿Por qué?**

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ No, porque ni todos los elementos situados por encima de la diagonal principal, ni todos los situados por debajo, son cero.

$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ No, porque no es cuadrada.

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Sí, porque todos los elementos situados por encima de la diagonal son cero.

033 **Pon dos ejemplos de estas matrices:**

a) Matriz columna
b) Matriz fila
c) Matriz diagonal
d) Matriz cuadrada
e) Matriz triangular superior
f) Matriz triangular inferior

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $(3 \quad -2 \quad 9)$ d) $\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

034 Halla los valores de a y b para que las matrices sean iguales.

$$A=\begin{pmatrix}1 & b & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 9 & 4 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 1-a & 1 & 0\\ 9 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & b & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 9 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 1-a & 1 & 0\\ 9 & 4 & 1\end{pmatrix}\rightarrow b=5,\ a=-2$$

035 Considera las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 6\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}9 & 1 & 6\\ 1 & 8 & -9\end{pmatrix}$$

Comprueba con esas matrices la propiedad conmutativa de la suma.

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 6\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 1 & 6\\ 1 & 8 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 2 & 12\\ 0 & 12 & -6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}9 & 1 & 6\\ 1 & 8 & -9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 6\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 2 & 12\\ 0 & 12 & -6\end{pmatrix}$$

036 Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 5\\ -4 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 4 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

¿Qué relación hay entre $A-B$ y $B-A$?

$$A-B=\begin{pmatrix}0 & 5\\ -4 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 5\\ 4 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ -8 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$B-A=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 4 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 5\\ -4 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 8 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$A-B$ y $B-A$ son matrices opuestas.

037 Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$

Calcula.

a) $A+B-C$
b) $A-B+C$
c) $-A-B+C$
d) $-A+B+C$
e) $A-(B-C)$
f) $C-(A+B)$

a) $A+B-C=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix}$

b) $A-B+C=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 4\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$

c) $-A-B+C=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -4\\ 0 & 5 & -3\end{pmatrix}$

d) $-A+B+C=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 0\\ -2 & 5 & 3\end{pmatrix}$

e) $A-(B-C)=A-B+C=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 4\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$

f) $C-(A+B)=-A-B+C=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -4\\ 0 & 5 & -3\end{pmatrix}$

038 Determina una matriz X que verifique: $A+X=B$, siendo $A=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$
y $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 9 & 3\end{pmatrix}$.

$$A+X=B \rightarrow X=B-A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 9 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 2 & 9 & -1\end{pmatrix}$$

039 Considera las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & -8\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 0 & 5 & -3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Realiza, si es posible, los siguientes productos.

a) AB b) BA c) AC d) BC

a) $AB=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & -8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 3 & 3\\ 0 & 4 & -20\end{pmatrix}$

b) No se pueden multiplicar B y A, ya que la dimensión de B es 2×3 y la de A es 2×2.

c) No se pueden multiplicar A y C, ya que la dimensión de A es 2×2 y la de C es 3×3.

d) $B\cdot C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 3 & 3\\ -1 & -1 & 8\end{pmatrix}$

040 Comprueba que, en general, el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa multiplicando estas matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 5 & -3\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 5 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\ 26 & 7 & -20\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix} \qquad BA=\begin{pmatrix}6 & 10 & -6\\ 5 & 5 & -19\\ 4 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

041 Comprueba que se cumple la propiedad distributiva del producto de matrices con respecto de la suma utilizando estas matrices.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & -8\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & -8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 12 & -8\end{pmatrix}$$

$$AB+AC=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & -8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & -8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}9 & 3\\ 12 & -12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 12 & -8\end{pmatrix}$$

042 Expresa la condición que tienen que cumplir dos matrices M y N para que pueda realizarse su suma. Y, si lo que pretendemos es multiplicarlas, ¿qué condición deben cumplir las matrices?

(Galicia. Septiembre 2004. Bloque 1. Pregunta 2)

- Para que se puedan sumar dos matrices estas deben tener la misma dimensión.
- Para que se puedan multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda.

043 Con las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) $2A - 3B$ b) $2A \cdot 3B$ c) $A(B + C)$ d) $A - 3B$

a) $2A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}$

c) $A(B + C) = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}$

b) $2A \cdot 3B = \begin{pmatrix} 6 & -24 \\ 24 & -48 \end{pmatrix}$

d) $A - 3B = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}$

044 Con las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) ABC b) $2AB$ c) $A(B - C)$ d) $B \cdot 3C$

a) $ABC = (AB)C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -17 \\ 28 & 75 \end{pmatrix}$

b) $2AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 18 & 28 \end{pmatrix}$

c) No se puede realizar esta operación ya que B y C no se pueden restar por no tener la misma dimensión.

d) $B \cdot 3C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 39 \\ 30 & 90 \\ 48 & 135 \end{pmatrix}$

045 Calcula AB y BA, siendo las matrices: $A = (1 \quad -3 \quad -1 \quad 2)$ $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

(La Rioja. Septiembre 2000. Propuesta A. Ejercicio 2)

$$AB = (1 \quad -3 \quad -1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -4$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad -3 \quad -1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 3 & -9 & -3 & 6 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

046 Sea A una matriz $m \times n$.

a) ¿Existe una matriz B tal que BA sea una matriz fila? Si existe, ¿qué dimensión tiene?

b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que AB sea una matriz fila? Si existe, ¿qué dimensión tiene?

c) Busca una matriz B tal que $BA = (0 \quad 0)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Asturias. Junio 2001. Bloque 2)

a) Para que BA sea una matriz fila, la matriz B tiene que ser una matriz de dimensión $1 \times m$, y la dimensión del producto es $1 \times n$.

b) El número de filas de la matriz AB no depende de la matriz B, sino que es igual al número de filas de la matriz A, que es m. Solo es posible obtener una matriz fila si A es también una matriz fila.

c) La dimensión de la matriz B es $1 \times 3 \rightarrow B = (a \quad b \quad c)$.

$$BA = (a \quad b \quad c) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (a \quad a+b)$$

$$(a \quad a+b) = (0 \quad 0) \rightarrow a = 0, b = 0$$

$B = (a \quad b \quad c) = (0 \quad 0 \quad c)$ con $c \in \mathbb{R}$.

047 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$:

a) Calcule AB y BA.

b) Compruebe que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

(Cataluña. Junio 2006. Cuestión 3)

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

Como en este caso, $AB = -BA$, entonces se cumple $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

048 Con las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

calcula $(A+B)^2$ y $A^2 + 2AB + B^2$. ¿Por qué no coinciden los resultados? ¿Cuál sería la fórmula correcta para el cuadrado de una suma de matrices?

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 22 & 31 & -34 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 40 & 10 & -26 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 47 & 32 & -36 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Como el producto de matrices no es conmutativo, el cálculo correcto sería: $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

Lo comprobamos calculando de nuevo el segundo miembro:

$$A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 20 & 5 & -13 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -5 & 4 & -11 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 22 & 31 & -34 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

049 Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide:

a) Hallar $(A - I)^2$.

b) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior.

(Madrid. Año 2006. Modelo. Opción B. Ejercicio 4)

a) $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(A-I)^2 = A^2 - 2A + I^2 = 0 \rightarrow A^2 = 2A - I \rightarrow A^4 = (2A - I)^2$

$$A^4 = (2A-I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -4 & -7 & 4 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

050 Sean $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $N = M + I$, donde I denota la matriz identidad de orden n.

Calcula N^2 y M^3.

(Galicia. Junio 2001. Bloque 1. Pregunta 1)

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

051 Sean A una matriz de dimensión 5×3, B una matriz de dimensión $m \times n$ y C una matriz de dimensión 4×7. Si sabemos que se puede obtener la matriz ABC, ¿cuáles son las dimensiones de B y de ABC?

Para poder obtener el producto, B tiene que tener tantas filas como columnas tenga A y tantas columnas como filas tenga C. Es decir, la dimensión de B es 3×4 y la dimensión del producto ABC es 5×7.

052 Dadas tres matrices A, B y C, se sabe que ABC es una matriz de dimensión 2×3 y que BC es una matriz de dimensión 4×3. ¿Cuál es el orden de A?

(Galicia. Junio 2002. Bloque 1. Pregunta 1)

La dimensión de ABC es $2 \times 3 \rightarrow$ El número de filas de A es 2 y el número de columnas de C es 3.

La dimensión de BC es $4 \times 3 \rightarrow$ El número de filas de B es 4 y el número de columnas de C es 3.

Las matrices se pueden multiplicar si el número de columnas de A es igual al número de filas de $B \rightarrow$ La dimensión de A es 2×4.

053 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular A^{10}.

(Madrid. Año 2008. Modelo. Opción B. Ejercicio 3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

054 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y sea n un número natural cualquiera.

Encuentra el valor de A^n para cada n y halla $A^{350} - A^{250}$.

(País Vasco. Junio 2003. Bloque A. Cuestión A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{350} - A^{250} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.050 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 750 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$

055 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Encuentra la regla del cálculo de las potencias sucesivas de A, es decir, de A^n para cualquier número natural n.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \qquad A^4 = IA = A$$

Así, si dividimos n entre 3 tenemos $n = 3p + q$, donde q, el resto al dividir n entre 3, es un número natural menor que 3.

$$A^n = A^{3p+q} = A^{3p}A^q = IA^q = A^q \quad \text{y} \quad A^q = \begin{cases} A & \text{si } q = 1 \\ A^2 & \text{si } q = 2 \\ I & \text{si } q = 0 \end{cases}$$

056 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla A^3, A^5 y A^n.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

057 Calcula $A^{2.000}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En general:

- Si n es un número par resulta: $A^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Si n es un número impar resulta: $A^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Así, tenemos que: $A^n = 2^{2.000} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

058 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Comprobar que $A^3 - 2A^2 = 0$. b) Hallar A^n.

(Madrid. Año 2005. Modelo. Opción B. Ejercicio 2)

a) $A^3 - 2A^2 = 0 \rightarrow A^2(A - 2I) = 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^2(A - 2I) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A^3 = 2A^2$

$A^4 = AA^3 = A2A^2 = 2A^3 = 2 \cdot 2A^2 = 2^2A^2$

$A^5 = 2^3A^2 \ \dots$

En general: $A^n = 2^{n-2}A^2 = 2^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

059 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula A^n.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\qquad A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

060 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Para cada número natural n, hallar A^n.

b) Calcular $A^{22} - 12A^2 + 2A$.

(País Vasco. Junio 2006. Bloque A. Cuestión A)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{22} - 12A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$

061 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar A^n para todo entero positivo n.

(Aragón. Junio 2001. Opción A. Cuestión 1)

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{cases} A & \text{si } n = 1 \\ A^2 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$

062 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Halla el valor o los valores de a para que se cumpla la identidad $A^2 + 2A + I = 0$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y 0 la matriz nula de orden 3.

(Aragón. Junio 2000. Opción A. Cuestión 1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2a & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2A + I = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2a & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + 2a + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \rightarrow a = -1$$

063 Sean A, I y B las matrices dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que la igualdad $(A - \lambda I)^2 = B$ sea cierta?

En caso afirmativo, hallar dicho valor de λ.

(País Vasco. Julio 2007. Bloque A. Cuestión A)

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 2 & -2\lambda + 1 & -2\lambda \\ -2\lambda + 1 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^2 = B \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda^2 + 2 & -2\lambda + 1 & -2\lambda \\ -2\lambda + 1 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualando el elemento a_{13} de las dos matrices: $-2\lambda = -4 \rightarrow \lambda = 2$

Comprobamos el resultado para los demás elementos.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 + 2 & -2\lambda + 1 & -2\lambda \\ -2\lambda + 1 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda = 2} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

064 Demuestra que la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ verifica una ecuación del tipo $A^2+\alpha A+\beta I=0$, determinando α y β (I denota la matriz identidad).

(Galicia. Septiembre 2003. Bloque 1. Pregunta 1)

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \qquad A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

$$A^2+\alpha A+\beta I=0 \rightarrow \begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}5+2\alpha+\beta & 4+\alpha\\ 4+\alpha & 5+2\alpha+\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r}5+2\alpha+\beta=0\\ 4+\alpha=0\end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases}\alpha=-4\\ \beta=3\end{cases}$$

065 Sean I y A las matrices cuadradas:

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}$$

Calcular, escribiendo las operaciones necesarias:

a) Las matrices A^2 y A^5.

b) Los números reales α y β para los que se verifica $(I+A)^3=\alpha I+\beta A$.

(C. Valenciana. Junio 2008. Bloque 1. Problema 2)

a) $$A^2=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I$$

$$A^5=A^2A^2A=(-I)\cdot(-I)\cdot A=A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}$$

b) $$(I+A)^3=(I+A)\cdot(I+A)\cdot(I+A)=(I+A)\cdot(I+2A+A^2)=I+3A+3A^2+A^3=$$

$$=I+3A+3A^2-A=I+2A-3I=2A-2I$$

$(I+A)^3=\alpha I+\beta A$, siendo $\alpha=2$ y $\beta=-2$

066 Calcula la matriz traspuesta de cada una de estas matrices:

$$A=(1\ \ 7\ \ 2) \qquad B=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 7\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}5 & -4 & 3\\ -4 & 3 & 1\\ 2 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 7\\ -1 & 9 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1\\ 7\\ 2\end{pmatrix} \qquad B^t=(0\ \ 1\ \ 7) \qquad C^t=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ -4 & 3 & 8\\ 3 & 1 & 9\end{pmatrix}$$

$$D^t=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \qquad E^t=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 9\\ 7 & 3\end{pmatrix}$$

067 Con las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades.

a) $(A^t)^t = A$

b) $(A+B)^t = A^t + B^t$

c) $(AB)^t = B^tA^t$

a) $(A^t)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = A$

b) $(A+B)^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

c) $(AB)^t = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$B^tA^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

068 Determina qué matrices son simétricas o antisimétricas, y realiza los cálculos que se indican, si es posible.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) A^tC c) $(B+E)^t$ e) A^tC^t

b) CD^t d) DD^t f) $(3E)^t$

Son simétricas las matrices A y B, y es antisimétrica la matriz C.

a) $A^tC = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -7 \\ 1 & 10 & -17 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

b) No se puede multiplicar CD^t ya que la dimensión de C es 3×3 y la de D^t es 2×3.

c) $(B+E)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $DD^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A^tC^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ -1 & -10 & 17 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

f) $(3E)^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

069 Responde a estas preguntas.

a) ¿Existe siempre el producto $A^t \cdot A$, siendo A una matriz cualquiera? ¿Por qué?

b) ¿El producto de dos matrices simétricas de la misma dimensión es también una matriz simétrica? ¿Por qué?

a) Sí, porque si la dimensión de A es $m \times n$ entonces la de A^t será $n \times m$, y por tanto, la dimensión de la matriz producto A^tA será $n \times n$.

b) En general, no, porque $(AB)^t = B^t A^t = BA$.

070 Sean A, B y C tres matrices tales que su producto ABC es una matriz de dimensión 3×2 y su producto AC^t es una matriz cuadrada, siendo C^t la traspuesta de C. Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de A, B y C.

(Galicia. Septiembre 2006. Bloque 1. Opción 1)

dimensión $(A) = m \times n$ dimensión $(B) = p \times q$ dimensión $(C) = r \times s$

dimensión $(ABC) = 3 \times 2 \rightarrow m = 3$ y $s = 2$, $n = p$ y $q = r$

La matriz AC^t es una matriz cuadrada $\rightarrow n = s$ y $m = r$.

dimensión $(A) = 3 \times 2$ dimensión $(B) = 2 \times 3$ dimensión $(C) = 3 \times 2$

071 En cada una de las matrices, determina mentalmente cuál es el mayor número de filas y de columnas linealmente independientes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 fila y 1 columna

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 fila y 1 columna

$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow$ 2 columnas (1.ª y 2.ª) y 2 filas

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ 2 columnas y 2 filas

$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 fila y 1 columna

$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 columna y 1 fila

072 **Calcula el rango de las siguientes matrices.**

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\\ 3 & 6\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 porque la segunda columna es proporcional a la primera.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2=C_2-4C_1]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 7 & 2\\ 2 & -6 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3=C_3-\frac{2}{7}C_2]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 7 & 0\\ 2 & -6 & \frac{12}{7}\end{pmatrix}$$

Como esta matriz es escalonada por columnas, Rango $(B)=3$.

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2\leftrightarrow C_1]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & -3\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3-3F_1]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3+2F_2]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$, luego Rango $(C)=2$.

$$D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2\leftrightarrow C_1]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3-4F_1]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3+5F_2]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}\rightarrow \text{Rango }(D)=3.$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -4 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Como esta matriz es escalonada, Rango $(E)=3$.

073 **¿Cuál es el mayor número de columnas linealmente independientes de la matriz** $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$**?**

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3=C_3-2C_1-C_2]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Como el rango por columnas es 2, solo hay dos columnas linealmente independientes.

074 **Sabiendo que el rango de la siguiente matriz es 2, determina el valor de *a*.**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 7 & 2 & -1\\ -11 & -4 & a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 7 & 2 & -1\\ -11 & -4 & a\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3=C_3-C_1]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 7 & 2 & -8\\ -11 & -4 & a+11\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3=C_3+4C_2]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 7 & 2 & 0\\ -11 & -4 & a-5\end{pmatrix}$$

Para que el rango sea 2, como esta matriz es escalonada por columnas, el término $a-5$ debe ser cero; luego $a=5$.

075 **Obtener el valor de *a* para que el rango de la matriz *A* sea igual a 2.**

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 6 & a\end{pmatrix}$$

(La Rioja. Junio 2003. Propuesta A. Ejercicio 1)

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 6 & a\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2=F_2-2F_1\\ F_3=F_3-4F_1}]{}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 7 & -6 & -1\\ 0 & 7 & -6 & a\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3-F_2]{}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 7 & -6 & -1\\ 0 & 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}$$

Para que el rango sea 2, el término $a+1$ tiene que ser cero, luego $a=-1$.

076 **Halla el valor de *k*, si existe, para que el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 6\\ 5 & k & -10\\ 1 & 1/3 & -2\end{pmatrix}$ sea 1.**

La tercera columna es proporcional a la primera, luego el rango es, a lo más, 2.
Para que sea 1, la segunda debe ser proporcional a la primera, pero esto es imposible porque: $\frac{1}{-3}\neq\frac{1/3}{1}$.
Luego no hay ningún valor de k para el cual el rango sea 1.

077 **Discútase, según el valor de *a*, el rango de la matriz:**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}$$

(Castilla y León. Septiembre 2005. Prueba A. Cuestión 2)

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2=F_2-2F_1]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3+\frac{1}{3}F_2]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & a+\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

- Si $a=-\frac{1}{3}\rightarrow$ Rango de la matriz A es 2.
- Si $a\neq-\frac{1}{3}\rightarrow$ Rango de la matriz A es 3.

078 Calcula el rango de A, según los valores del parámetro a.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

(Extremadura. Junio 2007. Opción A. Ejercicio 3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 3F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 8-2a \\ 0 & 0 & 0 & 12-3a \end{pmatrix}$$

- Si $a = 4 \rightarrow$ Rango de la matriz A es 1.
- Si $a \neq 4 \rightarrow$ Rango de la matriz A es 2. El rango no puede ser 3, pues las dos últimas filas de la matriz son proporcionales.

079 Calcule el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro k.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Murcia. Septiembre 2006. Bloque 1. Cuestión A)

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 + 2F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_2 \leftrightarrow C_4]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & k+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

- Si $k = 1 \rightarrow$ Rango de la matriz A es 2.
- Si $k \neq 1 \rightarrow$ Rango de la matriz A es 3.

080 Discute el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ según los valores de k.

(Baleares. Junio 2006. Opción B. Cuestión 4)

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 + kF_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & k \\ 0 & 1+3k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 = F_3 - \frac{1+3k}{5}F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & k \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5}k^2 - \frac{1}{5}k + 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{3}{5}k^2 - \frac{1}{5}k + 1 = 0 \rightarrow 3k^2 + k - 5 = 0 \rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{6}$$

- Si $k = \dfrac{-1+\sqrt{61}}{6}$ o $k = \dfrac{-1-\sqrt{61}}{6} \rightarrow$ Rango de la matriz A es 2.
- Si $k \neq \dfrac{-1+\sqrt{61}}{6}$ y $k \neq \dfrac{-1-\sqrt{61}}{6} \rightarrow$ Rango de la matriz A es 3.

081 Calcula el rango de A según los distintos valores del parámetro real a.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

(Madrid. Junio 2002. Opción A. Ejercicio 2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 \leftrightarrow C_4]{} \begin{pmatrix} 2 & 2 & a & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -4 & a+4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & a & 0 \\ 5 & 3 & -4 & a+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 + 2F_1 \\ F_3 = F_3 + 5F_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & a-2 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & a+4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 = F_3 - \frac{9}{4}F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{9}{4}(a-6) & a+4 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es siempre 3. El parámetro a no puede ser al mismo tiempo igual a 6 e igual a 4, entonces los elementos de la última fila nunca serán todos cero.

082 Discutir, en función del número real m, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(Castilla y León. Septiembre 2007. Prueba B. Cuestión 1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ -2 & -1 & 2 \\ 1+m & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1 \leftrightarrow C_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1+m & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 0 & m+2 \\ 0 & m-3 & 3-2m \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & m-3 & 3-2m \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$$

- Si $m = -2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$, todos los elementos de la última fila son 0.
- Si $m = 3 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$, las filas 2.ª y 3.ª son proporcionales.
- Si $m \neq -2$ y $m \neq 3 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

083 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$. Determine los valores de m para que los Rango $(A) < 3$. ¿Puede ser Rango $(A) = 1$ para algún valor de m?

(Cataluña. Año 2006. Serie 3. Cuestión 4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - 4F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4-m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - mF_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4-m \\ 0 & 0 & m^2-4m+3 \end{pmatrix}$$

$$m^2 - 4m + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$$

- Si $m = 1$ o $m = 3 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$
- Si $m \neq 1$ y $m \neq 3 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

El rango de la matriz no puede ser 1, ya que sus tres filas no son proporcionales para ningún valor del parámetro m.

084 Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$. Halla los valores de m para los que el rango de A es menor que 3.

(Andalucía. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - mF_1]{F_2 = F_2 - mF_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m^2 - m & m^2 - m \\ 0 & 0 & m^2 - m \end{pmatrix}$$

$$m^2 - m = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

- Si $m = 0$ o $m = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 1$
- Si $m \neq 0$ o $m \neq 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

085 Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$.

a) Prueba que, para cualquier valor de a y b, Rango $(A) \geq 2$.

b) Determina un par de valores reales de a y b para que Rango $(A) = 3$, y otro par de valores a y b de forma que Rango $(A) = 4$.

(Cantabria. Junio 2001. Bloque 2. Opción A)

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - \frac{b+1}{a}F_1]{} \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & -\dfrac{b(b+1)}{a} & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 = F_3 - \frac{b+1}{a}F_2]{} \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & -\dfrac{b(b+1)}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_4} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b(b+1)}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4 = F_4 - \frac{b}{a}F_3]{} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b(b+1)}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a - \dfrac{b^2(b+1)^2}{a^3} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 = a^3F_4} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b(b+1)}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a^4 - b^2(b+1)^2 \end{pmatrix}$$

a) • Si $a \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) \geq 3$.

• Si $a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ b+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ para cualquier valor de b al menos hay 2 filas distintas de cero y que no son proporcionales $\rightarrow$ Rango $(A) \geq 2$.

b) • Si $a = \sqrt{2}$ y $b = 1$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b(b+1)}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a^4 - b^2(b+1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{a=\sqrt{2},\, b=1} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango $(A) = 3$, pues $a^4 - b^2(b+1)^2 = 0$.

• Si $a = 1$ y $b = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b(b+1)}{a} \\ 0 & 0 & a & \dfrac{b(b+1)^2}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a^4 - b^2(b+1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{a=1,\, b=0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En este caso el rango de la matriz es 4.

086 **Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.**

Vemos que ambas tienen rango máximo, o sea 2. Determinar los valores de c tales que la matriz $A + cB$ no tenga rango 2. ¿Cuál es el rango que tienen las respectivas matrices suma?

(Aragón. Septiembre 2003. Opción B. Cuestión 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4(1+c) & 2-c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4(1+c) & 2-c \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - 4F_1]{} \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 0 & 6-c \end{pmatrix}$$

• Si $c = -1$ o $c = 6$, el rango de la matriz no es 2.

– Si $c = -1 \rightarrow$ Rango de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es 1.

– Si $c = 6 \rightarrow$ Rango de la matriz $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 28 & -4 \end{pmatrix}$ es 1.

• Si $c \neq -1$ y $c \neq 6 \rightarrow$ Rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4(1+c) & 2-c \end{pmatrix}$ es 2.

087 Sean A y B las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar que ambas tienen el máximo rango, o sea 3. Pero ¿qué ocurre si las combinamos linealmente? En concreto, estudia el rango de la matriz $A + \lambda B$ según los valores del parámetro λ.

(Aragón. Septiembre 2002. Opción A. Cuestión 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1+\lambda \\ \lambda & 2+\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1+\lambda \\ \lambda & 2+\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-\lambda F_1 \\ F_3=F_3-F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1+\lambda \\ 0 & 2+\lambda-\lambda^2 & -\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_2=C_2+C_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1+2\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 2-2\lambda^2 & -\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+2\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 2-2\lambda^2 & -\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+2\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 2(1+\lambda)(1-\lambda) & -\lambda(1+\lambda) \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda = 1 \rightarrow$ Rango $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$
- Si $\lambda = -1 \rightarrow$ Rango $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$
- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1 \rightarrow$ Rango $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1+\lambda \\ \lambda & 2+\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix} = 3$

088 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, ¿es cierto que Rango $(AB) =$ Rango $(A) \cdot$ Rango (B)? Justifica tu respuesta.

(Canarias. Junio 2002. Opción A. Cuestión 3)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Rango $(AB) \leq 3$, Rango $(A) = 2$ y Rango $(B) = 2 \rightarrow$ Es imposible que se verifique la igualdad.

089 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Encuentra dos matrices, B y C, de tamaño 3×2 y de rango 2, tales que el rango de AB sea 2 y el rango de AC sea 1.

(Navarra. Septiembre 2007. Grupo 1. Opción B)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Respuesta abierta.

- Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}\,(AB) = 2$
- Si $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}\,(AC) = 1$

090 Una matriz cuadrada de orden 3 tiene rango 2.

a) ¿Cuál es el rango de la matriz que resulta al quitar una fila?

b) ¿Cuál es el rango de la matriz que resulta al eliminar una columna?

c) ¿Qué sucedería en los casos anteriores si el rango de la matriz inicial fuera 3?

a) El rango de la matriz es 2 si eliminamos una fila que depende linealmente de las otras y es 1 si las dos filas que dejamos son proporcionales.

b) El rango de la matriz es 2 si eliminamos una columna que depende linealmente de las otras y es 1 si las dos columnas que dejamos son proporcionales.

c) En este caso, el rango siempre sería 2, porque las dos líneas que dejamos son siempre linealmente independientes.

091 Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de reducción o de Gauss-Jordan:

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=\frac{1}{2}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2=\frac{1}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=F_1+2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right)$$

La inversa de la matriz A es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{F_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_3=-\frac{1}{3}F_3]{F_2=\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-2F_3]{F_1=F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/6 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$

La inversa de la matriz B es: $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -5/6 & 1/2 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

c) Como la matriz C es la unidad, su inversa es ella misma.

092 Halla la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(Navarra. Junio 2004. Grupo 1. Opción B)

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_3=F_3+3F_2]{F_1=F_1-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-F_3]{F_1=F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$

La matriz inversa de A es: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

093 Calcular, si es posible, la inversa de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(Murcia. Junio 2008. Bloque 1. Cuestión A)

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_3=F_3+\frac{2}{5}F_2]{F_1=F_1-\frac{2}{5}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4/5 & 3/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 2/5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-15F_3]{F_1=F_1-4F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 2/5 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_3=-5F_3]{F_2=\frac{1}{5}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1/5 & -2 & -2 & -5 \end{array}\right)$

La matriz inversa de A es: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

094 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, calcula $(A^{-1})^{-1}$ y $B^{-1}B$.

¿Por qué se obtiene este resultado?

Por la definición de matriz inversa: $(A^{-1})^{-1}A^{-1}=I$; multiplicando a la derecha por A los dos miembros, se obtiene $(A^{-1})^{-1}=A$.

Por definición de matriz inversa: $B^{-1}B=I$.

095 Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

b) Calcula $(B^2)^{-1}$, de la manera más rápida posible.

a) $(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 1/4 & 1/2\end{pmatrix}$ $\qquad B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1/4 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 1/4 & 1/2\end{pmatrix}$

b) $(B^2)^{-1}=(BB)^{-1}=B^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

096 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, calcula $(A^tA^{-1})^2A$.

(Andalucía. Junio 2000. Opción A. Ejercicio 4)

$$(A^tA^{-1})^2A=A^tA^{-1}A^tA^{-1}A=A^tA^{-1}A^t$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2=F_2-3F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1+F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2=-\frac{1}{2}F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2\end{array}\right)\to A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

$$A^tA^{-1}A^t=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2 & -1/2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2 & 11/2\\ 2 & 6\end{pmatrix}$$

097 Comprueba que la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ es la matriz $A^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3 & 5\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

(Baleares. Junio 2005. Opción B. Cuestión 4)

Para comprobar que una matriz es la inversa de otra, basta con multiplicar las matrices y ver que el resultado es la identidad.

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

098 Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $m \in \mathbb{R}$. Determina para qué valores de m la matriz A es regular (inversible).

(Cantabria. Septiembre 2007. Bloque 2. Opción B)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & m & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-mF_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2m & 1-m^2 & -m & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1=F_1+2F_2 \\ F_3=F_3-2mF_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & m & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & m & -2m & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=F_1-\frac{m}{1-m^2}F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/(1-m^2) & 2/(1-m^2) & -m/(1-m^2) \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & m & -2m & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2=-F_2 \\ F_3=\frac{1}{1-m^2}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/(1-m^2) & 2/(1-m^2) & -m/(1-m^2) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m/(1-m^2) & -2m/(1-m^2) & 1/(1-m^2) \end{array}\right)$$

La inversa, si existe, de la matriz A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/(1-m^2) & 2/(1-m^2) & -m/(1-m^2) \\ 1 & -1 & 0 \\ m/(1-m^2) & -2m/(1-m^2) & 1/(1-m^2) \end{pmatrix}$$

Para poder calcular la inversa tenemos que dividir entre $(1-m^2)$, luego esta expresión no puede ser cero. Es decir, la matriz A es invertible cuando $(1-m^2) \neq 0 \rightarrow m \neq 1$ y $m \neq -1$.

099 Estudia para qué valores de m la matriz siguiente tiene inversa:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$$

En caso de ser posible, halla su inversa para $m = -1$.

(Castilla-La Mancha. Año 2005. Supuesto 4. Bloque 3. Pregunta B)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} m & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} m & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1=F_1-\frac{1}{m-1}F_3 \\ F_2=F_2-\frac{1}{m-1}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} m & 0 & 0 & m/(m-1) & 0 & -1/(m-1) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(m-1) & 1 & -1/(m-1) \\ 0 & 0 & m-1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1=\frac{1}{m_1}F_1 \\ F_3=\frac{1}{m-1}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/(m-1) & 0 & -1/(m(m-1)) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(m-1) & 1 & -1/(m-1) \\ 0 & 0 & 1 & -1/(m-1) & 0 & 1/(m-1) \end{array}\right)$$

100 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Estudia, en función de los valores reales de k, si la matriz BA tiene inversa.

b) Haz lo mismo para la matriz AB.

(Asturias. Septiembre 2006. Bloque 1)

a) $BA = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \begin{pmatrix} 3 & k+2 \\ k & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - \frac{k}{3}F_1]{} \begin{pmatrix} 3 & k+2 \\ 0 & -\dfrac{k^2}{3} - \dfrac{2k}{3} - 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{k^2}{3} - \frac{2k}{3} - 1 = 0 \rightarrow k^2 + 2k + 3 = 0$$

$$\rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

Como BA es una matriz de orden 2 y su rango siempre es 2, tiene matriz inversa siempre.

b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3k & k & 2k-2 \\ k & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - 3kF_1 \\ F_3 = F_3 - kF_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2k & -4k-2 \\ 0 & -k & -2k-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 = F_3 - \frac{1}{2}F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2k & -4k-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como AB es una matriz de orden 3 y su rango es $2 < 3$, esta matriz no tiene inversa.

101 Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde m es un número real. Encuentra los valores de m para los que AB tiene inversa.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 3. Pregunta B)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $m = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa ya que su rango es 1.
- Si $m = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa ya que su rango es 1.
- Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$ el rango de la matriz es 2, y por tanto, la matriz tiene inversa.

102 En la matriz A determina a, b y c para que su traspuesta coincida con su inversa. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ a & b & c\end{pmatrix}$

$A^t = A^{-1} \to AA^t = AA^{-1} \to AA^t = I$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ a & b & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1/\sqrt{2} & b\\ 0 & 1/\sqrt{2} & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & \dfrac{b+c}{\sqrt{2}}\\ a & \dfrac{b+c}{\sqrt{2}} & a^2+b^2+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Multiplicando e igualando términos se obtiene este sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r}a=0\\ \dfrac{b+c}{\sqrt{2}}=0\\ a^2+b^2+c^2=1\end{array}\right\}\xrightarrow{a=0}\left.\begin{array}{r}b=-c\\ b^2+c^2=1\end{array}\right\}\xrightarrow{a=0,\,b=-c} c^2+c^2=1\to c=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hay dos soluciones: $c=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, b=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, a=0 \qquad c=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, a=0$

103 Comprueba y contesta.

a) Si A es una matriz no singular y $(B-C)A=0$, siendo 0 la matriz nula, comprueba que $B=C$.

b) Según el resultado del apartado anterior, cuando $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, la única matriz X que verifica la ecuación $XA=0$ es la matriz nula. ¿Es cierta esta afirmación? ¿Por qué?

Nota: Matriz singular es aquella que no tiene inversa.

(Asturias. Junio 2003. Bloque 2)

a) $(B-C)A=0\to BA-CA=0\to BA=CA\to BAA^{-1}=CAA^{-1}\to B=C$

b) La afirmación es falsa, pues el apartado a) requiere la condición de que la matriz A sea no singular, sin embargo, en este caso Rango $(A)=1$, con lo que la matriz es singular.

$$\begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2=F_2+\frac{1}{2}F_1]{}\begin{pmatrix}2 & -6\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

104 Despeja la matriz X de la ecuación $AX=B$ y calcúlala siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Se multiplican por la izquierda por la inversa de A los dos miembros de la ecuación, que existe por ser Rango $(A)=2$.

$A^{-1}AX=A^{-1}B\to X=A^{-1}B$

Por lo tanto: $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

105 Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hállese razonadamente la matriz B sabiendo que $BP = A$.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba B. Cuestión 1)

$$BP = A \rightarrow B = AP^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 = F_1 - F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 + F_3 \\ F_2 = F_2 - F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$B = AP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

106 Calcula la matriz A que haga que: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

(La Rioja. Septiembre 2006. Propuesta A. Ejercicio 3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 - \frac{5}{2}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - 2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = \frac{1}{2}F_1 \\ F_2 = 2F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

107 Calcula la matriz X tal que $A^2X = A$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(Extremadura. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 3)

$$A^2X = A \rightarrow AX = I \rightarrow X = A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 + 2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 = -F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

108 Hallar una matriz X tal que $A^{-1}XA = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(Madrid. Junio 2005. Opción B. Ejercicio 2)

$$A^{-1}XA = B \rightarrow XA = AB \rightarrow X = ABA^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 + \frac{2}{3}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 + 3F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 = F_1 + 3F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1 = \frac{1}{3}F_1 \\ F_2 = -3F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$X = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

109 Determina, si existe, una matriz A que verifique: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - \frac{1}{3}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1 = -F_1 \\ F_2 = \frac{1}{3}F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 + 2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - \frac{1}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 = \frac{1}{4}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & -2 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5/6 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

110 Encuentra una matriz X que verifique $AX + B = I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad.

$$AX + B = I \rightarrow AX = I - B \rightarrow X = A^{-1}(I - B)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = -F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$X = A^{-1}(I - B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

111 Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

Calcula la matriz X que verifica $AX+B=I$, donde I representa la matriz identidad.

(Baleares. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 1)

$$AX+B=I\rightarrow AX=I-B\rightarrow X=A^{-1}(I-B)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2=F_2-2F_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&3&0&-2&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=F_1+\frac{1}{3}F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1/3&1/3&0\\0&3&0&-2&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1-F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&1/3&-1\\0&3&0&-2&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2=\frac{1}{3}F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&1/3&-1\\0&1&0&-2/3&1/3&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$X=A^{-1}(I-B)=\begin{pmatrix}1/3&1/3&-1\\-2/3&1/3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}1/3&1/3&-1\\-2/3&1/3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/3&1&-2/3\\-2/3&0&1/3\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

112 Resuelve la ecuación matricial $XA+B=C$, donde $A=\begin{pmatrix}0&3&0\\2&0&1\\0&-3&2\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}4&-2&1\\5&1&-3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&0&5\\-1&4&-6\end{pmatrix}$.

$$XA+B=C\rightarrow XA=C-B\rightarrow X=(C-B)A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&3&0&1&0&0\\2&0&1&0&1&0\\0&-3&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&0&1&0\\0&3&0&1&0&0\\0&-3&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3=F_3+F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&0&1&0\\0&3&0&1&0&0\\0&0&2&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=F_1-\frac{1}{2}F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&-1/2&1&-1/2\\0&3&0&1&0&0\\0&0&2&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1=\frac{1}{2}F_1\\ F_2=\frac{1}{3}F_2\\ F_3=\frac{1}{2}F_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/4&1/2&-1/4\\0&1&0&1/3&0&0\\0&0&1&1/2&0&1/2\end{array}\right)$$

$$X=(C-B)A^{-1}=\left[\begin{pmatrix}1&0&5\\-1&4&-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-2&1\\5&1&-3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-1/4&1/2&-1/4\\1/3&0&0\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3&2&4\\-6&3&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/4&1/2&-1/4\\1/3&0&0\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41/12&-3/2&11/4\\1&-3&0\end{pmatrix}$$

113 Resuelve la ecuación matricial $AX+C=B$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

(Galicia. Septiembre 2005. Bloque 1. Pregunta 1)

$$AX+C=B \rightarrow AX=B-C \rightarrow X=A^{-1}(B-C)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}4 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 0 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[F_2=F_2+4F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=-F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 4\end{array}\right)$$

$$X=A^{-1}(B-C)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -3 & 0\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & -2\\ -3 & -1 & 4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -4 & 0\\ -11 & -1 & 14 & -2\end{pmatrix}$$

114 Razona si existe la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$ y, en caso afirmativo, calcúlala.

Resuelve la ecuación matricial $AX+2A=I$, donde X es una matriz de orden 3 e I es la matriz identidad de orden 3.

(Castilla-La Mancha. Año 2007. Supuesto 3. Bloque 3. Pregunta A)

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[C_1=C_1+2C_3]{}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\rightarrow \text{Rango }(A)=3\rightarrow \text{La matriz } A \text{ tiene inversa.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1=F_1-F_2\\ F_3=F_3+2F_2}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3=-F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$AX+2A=I\rightarrow AX=I-2A\rightarrow X=A^{-1}(I-2A)$$

$$X=A^{-1}(I-2A)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

115 Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\2\\-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $E=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$. Calcular $M=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ para que verifique la ecuación $(AB^t+C)M=E$.

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba B. Problema 1)

$$(AB^t+C)M=E$$

$$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot(7\quad 2\quad -2)+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\cdot M=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\rightarrow\left[\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&4&-4\\21&6&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\cdot M=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\rightarrow M=\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}7&2&-2&1&0&0\\14&5&-4&0&1&0\\21&6&-5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2=F_2-2F_1\\F_3=F_3-3F_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}7&2&-2&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=F_1-2F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}7&0&-2&5&-2&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1+2F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}7&0&0&-1&-2&2\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=\frac{1}{7}F_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/7&-2/7&2/7\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$M=\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/7&-2/7&2/7\\-2&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12/7\\1\\-3\end{pmatrix}$$

116 Sean X una matriz 2×2, I la matriz identidad 2×2 y $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$. Hallar X sabiendo que $BX+B=B^2+I$.

(Castilla y León. Septiembre 2007. Prueba A. Cuestión 1)

$$BX+B=B^2+I\rightarrow B(X+I)=B^2+I\rightarrow X+I=B^{-1}(B^2+I)\rightarrow X=B^{-1}(B^2+I)-I$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1-F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&-1\\0&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=\frac{1}{2}F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/2&-1/2\\0&1&0&1\end{array}\right)$$

$$X=B^{-1}(B^2+I)-I=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}4&3\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&3\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5/2&1/2\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2&1/2\\0&1\end{pmatrix}$$

117 Resolver la ecuación matricial $B(2A+I) = AXA + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Canarias. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 3)

$$B(2A+I) = AXA + B \rightarrow 2BA + B - B = AXA \rightarrow 2B = AX \rightarrow 2A^{-1}B = X$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 + F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$X = 2A^{-1}B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

118 Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $XA^2 + BA = A^2$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Madrid. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 1)

$$XA^2 + BA = A^2 \rightarrow XA^2 = A^2 - BA \rightarrow XA = A - B \rightarrow X = I - BA^{-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2A$$

$$X = I - BA^{-1} \rightarrow I - 2AA^{-1} = I - 2I = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

119 Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Halla x para que se cumpla $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$.

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1+2x & 2x \\ 4 & 1+2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2x+2 & 2x+2 \\ 6 & 2x+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+2 = 8 \\ 2x+6 = 12 \end{array}\right\} \rightarrow x = 3$$

120 Resolver los sistemas matriciales.

a) $\left.\begin{array}{r} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ 3Y - X = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

a)
$$\begin{aligned} &2X+Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\ +\ &X-Y=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$3X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -3\end{pmatrix}\to X=\begin{pmatrix}2/3 & 1\\ 4/3 & -1\end{pmatrix}$$

$$Y=\begin{pmatrix}2/3 & 1\\ 4/3 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3 & -2\\ -11/3 & 3\end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{aligned} &X+Y=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -4 & 2\end{pmatrix}\\ +\ &-X+3Y=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 12 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$4Y=\begin{pmatrix}0 & 12\\ -16 & 4\end{pmatrix}\to Y=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}0 & 12\\ -16 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -4 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -4 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 3\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

121 Resolver el siguiente sistema matricial:

$$\left.\begin{aligned}2A+3B&=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 7 & 11\end{pmatrix}\\ 5A-2B&=\begin{pmatrix}10 & 1\\ 8 & 18\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}$$

(Canarias. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 3)

$$\left.\begin{aligned}2A+3B&=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 7 & 11\end{pmatrix}\\ 5A-2B&=\begin{pmatrix}10 & 1\\ 8 & 18\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} &4A+6B=2\cdot\begin{pmatrix}4 & 8\\ 7 & 11\end{pmatrix}\\ +\ &15A-6B=3\cdot\begin{pmatrix}10 & 1\\ 8 & 18\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$19A=2\cdot\begin{pmatrix}4 & 8\\ 7 & 11\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}10 & 1\\ 8 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}38 & 19\\ 38 & 76\end{pmatrix}\to A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$2B=5A-\begin{pmatrix}10 & 1\\ 8 & 18\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & 1\\ 8 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & 2\end{pmatrix}\to B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

122 Razona si las soluciones de las siguientes ecuaciones matriciales son correctas. Consideramos 0 como la matriz nula.

a) $X^2=0 \longrightarrow$ Solución $X=0$

b) $XA=0 \longrightarrow$ Solución $X=0$

c) $X^2=AX \rightarrow$ Solución $X=A$

a) No es correcta porque hay matrices no nulas que multiplicadas por sí mismas dan la matriz cero; por ejemplo, las matrices de orden 2 del tipo $\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si la matriz A tiene inversa, la única solución es $X = 0$. Si no existe A^{-1} puede haber otras soluciones, tal como sucede en el caso anterior.

c) Escribiendo la ecuación en la forma:

$$X^2 - AX = 0 \rightarrow X(X - A) = 0$$

se ve que puede haber otras soluciones.

123 **Si una matriz cuadrada A verifica $A^2 + 7A = I$, siendo I la matriz unidad, calcula A^{-1} en función de A.**

$$A^2 + 7A = I \rightarrow A(A + 7I) = I \rightarrow A^{-1} = A + 7I$$

124 **Sean A una matriz cuadrada de orden n tal que $A^2 = A$, I la matriz unidad de orden n y $B = 2A - I$. Calcula B^2.**

$$B = 2A - I \rightarrow B^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4A - 4A + I = I$$

125 **Si A y B son dos matrices cuadradas de orden 3 y A es diagonal, ¿se verifica $AB = BA$ para cualquier matriz B? ¿Cómo debería ser A para que se cumpliera esta igualdad?**

No siempre se verifica $AB = BA$; por ejemplo:

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos cómo debe ser A para que se verifique siempre la igualdad:

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{12} & ab_{13} \\ bb_{21} & bb_{22} & bb_{23} \\ cb_{31} & cb_{32} & cb_{33} \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_{11} & bb_{12} & cb_{13} \\ ab_{21} & bb_{22} & cb_{23} \\ ab_{31} & bb_{32} & cb_{33} \end{pmatrix}$$

La igualdad de estas matrices implica $a = b = c$. Luego la matriz A debe ser de la forma $A = aI$.

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar A^{10}.

b) Calcular la matriz inversa de B.

c) En el caso particular $k = 0$, hallar B^{10}.

(Madrid. Septiembre 2005. Opción B. Ejercicio 4)

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ para $n \geq 3 \rightarrow A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - kF_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t-k^2 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 - (t-k^2)F_3 \\ F_2 = F_2 - kF_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -k & k^2-t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2-t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En general: $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 Sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para cada número natural n, hallar A^n.

Calcular $A^{22} - 12A^2 + 2A$.

(País Vasco. Junio 2006. Bloque A. Cuestión A)

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{22} - 12A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = -9I$$

3 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, hállense las matrices X que satisfacen $XC + A = C + A^2$.

(Castilla y León. Junio 2005. Prueba B. Cuestión 1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

La matriz C tiene inversa por ser de rango 3.

$$XC + A = C + A^2 \rightarrow XC = C + A^2 - A \rightarrow X = (C + A^2 - A)C^{-1}$$

$$\rightarrow X = CC^{-1} = I \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Encuentra las matrices A y B, sabiendo que verifican las ecuaciones matriciales:

$$\left.\begin{aligned} 2A + 3B &= M \\ -A + B &= N \end{aligned}\right\}, \text{ siendo } M = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

(Castilla-La Mancha. Año 2005. Supuesto 3. Bloque 3. Cuestión B)

$$\left.\begin{aligned} 2A + 3B &= \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ -A + B &= \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$+\left.\begin{aligned} 2A + 3B &= \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ -2A + 2B &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$5B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 19 \\ 52 & 13 & -26 \\ 26 & 11 & 39 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 26/5 & 0 & 19/5 \\ 52/5 & 13/5 & -26/5 \\ 26/5 & 11/5 & 39/5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2A+3B=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ -3A+3B=3\cdot\begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} \end{array}\right\} -$$

$$5A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 10 & -11 \\ -33 & 8 & 24 \\ -19 & -9 & -26 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -19/5 & 10/5 & -11/5 \\ -33/5 & 8/5 & 24/5 \\ -19/5 & -9/5 & -26/5 \end{pmatrix}$$

5 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que verifica que $A^3 - I = 0$, con I matriz identidad y 0 matriz nula.

b) Calcula A^{13}.

c) Basándote en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2X + I = A$.

(Asturias. Septiembre 2007. Bloque 1)

a) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego se verifica que $A^3 - I = 0$.

b) $A^3 = I \rightarrow A^{12} = I \rightarrow A^{13} = A^{12}A = A$

c) $A^2X + I = A \rightarrow A^2X = A - I \rightarrow A^3X = A(A - I)$

$$X = A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 Sean A, B e I las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiar si existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el cual se satisfaga $(A - \lambda I)^2 = B$.

(Aragón. Junio 2008. Bloque 1. Opción A)

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & 1-2\lambda & -2\lambda \\ 1-2\lambda & 2-2\lambda+\lambda^2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualamos elemento a elemento y resolvemos las ecuaciones que resultan.

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2+2 &= 6 \\ 1-2\lambda &= -3 \\ -2\lambda &= -4 \\ 2-2\lambda+\lambda^2 &= 2 \\ \lambda^2+1 &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow \lambda = 2$$

7 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$:

a) Estudia, según los valores de m, el rango de A.

b) Para $m = -1$, calcula la matriz X que verifica $XA + A = 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 3.

(Galicia. Septiembre 2007. Bloque 1. Opción 1)

a) $\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & -1 & m+1 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$

Si $m = 0 \rightarrow$ Rango $A = 1$, solo hay una fila con elementos distintos de 0.

Si $m \neq 0 \rightarrow$ Rango $A = 3$.

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Existe A^{-1} por ser Rango $(A) = 3$.

$XA + A = 2I \rightarrow XA = 2I - A \rightarrow X = (2I - A)A^{-1}$

$$\rightarrow X = 2A^{-1} - I = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

2 Determinantes

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El tío Petros y la conjetura de Goldbach

En nuestra primera noche juntos, mientras cenábamos en el comedor de la universidad para conocernos mejor, le dije con naturalidad [a mi compañero de habitación]:

–Puesto que eres un genio de las matemáticas, Sammy, estoy seguro de que podrás probar con facilidad que todo número par mayor que 2 es la suma de dos primos.

Se echó a reír.

–Si pudiera probar eso, tío, no estaría aquí cenando contigo; ya sería catedrático, quizás incluso tendría la medalla Fields, el Nobel de las matemáticas.

Antes de que terminara de hablar, en un instante de revelación, adiviné la horrible verdad. Sammy la confirmó con sus siguientes palabras:

–La afirmación que acabas de hacer es la conjetura de Goldbach, ¡uno de los problemas irresueltos más difíciles de todos los campos de las matemáticas!

Mis reacciones pasaron por las fases denominadas (si no recuerdo mal lo que aprendí en Psicología Elemental en la universidad) «las cuatro etapas del duelo»: negación, ira, depresión y aceptación.

De ellas, la primera fue la que duró menos.

–No… ¡no es posible! […]

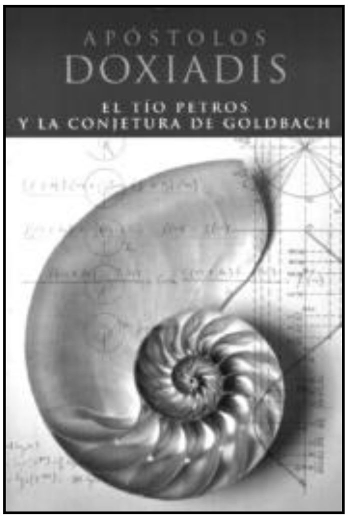
–¿Qué quieres decir con que no es posible? –preguntó–. ¡Lo es! La conjetura de Goldbach, que así se llama la hipótesis, pues nunca ha sido demostrada, es que todos los números pares son la suma de dos primos. Lo afirmó por primera vez un matemático llamado Goldbach en una carta dirigida a Euler. Aunque se ha demostrado que es verdad incluso en números primos altísimos, nadie ha conseguido formular una prueba general. […]

Mi nuevo compañero de cuarto, totalmente estupefacto ante el hecho de que una hipótesis de teoría de números pudiera provocar semejante arrebato de pasión mediterránea, me rogó que le contara qué me pasaba; pero yo no estaba en condiciones de dar explicaciones..

APÓSTOLOS DOXIADIS

El tío Petros y la conjetura de Goldbach

Apóstolos Doxiadis



Petros Papachristos vivía en una casa a las afueras de Atenas, retirado del mundo, sin mujer ni hijos, ocupado sólo en cuidar el jardín y jugar al ajedrez. Había sido un matemático notable, aunque para sus dos hermanos menores, que mantenían con su esfuerzo la empresa heredada del padre, era el «fiasco de la familia». En cambio, uno de sus sobrinos, el narrador de la historia contenida en esta novela, lo admiraba por su pasada reputación. Cuando acabó el penúltimo curso del bachillerato, un día le preguntó si también él podría llegar a ser un buen matemático. El tío Petros le contestó:

–No quiero verte haciendo unos estudios que te conducirán al fracaso y la desdicha. En consecuencia, te pido que me hagas la firme promesa de que no te convertirás en matemático a menos que descubras que tienes un talento extraordinario. ¿Aceptas?

El joven acepta el desafío que consiste en resolver a lo largo del verano sin consultar los libros el siguiente problema: demostrar que todo entero par mayor que 2 es igual a la suma de dos primos.

Después de llenar durante los meses estivales cientos de cuartillas que acabaron en la papelera, el joven no logró demostrar esa sencilla conjetura. Admitió su incapacidad y, cumpliendo su promesa, se matriculó en la licenciatura de Económicas, en una de las mejores universidades norteamericanas. En su tercer año, le tocó compartir habitación con Sammy Epstein, un muchacho famoso entre los estudiantes del primer ciclo porque era un prodigio de las matemáticas. Su primer encuentro con él es el que se describe en el texto extraído de la novela.

Cuando el joven descubre la «broma» que le ha gastado su tío, decide vengarse y ésa es la trama de la segunda parte de esta maravillosa novela, en la que se narra muy bien la lucha de una persona por construir matemáticas: sus tanteos, sus desánimos, sus éxitos y sus fracasos.

Halla los números primos que cumplen la conjetura de Goldbach para los números pares 4 y 8 y forma una matriz de orden 2 con ellos. A continuación, calcula el valor de la expresión $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ para esa matriz, para su traspuesta y para la que resulta de sumarle a la primera columna la segunda. ¿Qué observas? ¿Por qué crees que ocurre esto?

Respuesta abierta. Por ejemplo: $4 = 1 + 3 \qquad 8 = 1 + 7$

La matriz que forman estos números primos es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Así: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 7 - 3 = 4$

La matriz traspuesta es: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

Entonces: $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 7 - 3 = 4$

La matriz que resulta de sumarle a la primera columna la segunda es: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

Así: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 28 - 24 = 4$

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Comprueba si existen combinaciones lineales entre las filas de estas matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Para comprobarlo estudiamos si: $F_1 = k_1F_2 + k_2F_3$

Consideramos los elementos de las columnas 1 y 3 ya que los de la segunda son todos nulos, y por tanto, verifican cualquier combinación.

$$\left.\begin{array}{r} -1 = 5k_1 + 3k_2 \\ 2 = -2k_1 - 2k_2 \end{array}\right\} \to k_1 = 1 \quad k_2 = -2$$

Entonces: $F_1 = F_2 - 2F_3 \to$ existe una combinación lineal entre las filas de esta matriz.

b) Para comprobarlo estudiamos si: $F_1 = k_1F_2 + k_2F_3 + k_3F_4$

Tomamos los elementos de las tres primeras columnas:

$$\left.\begin{array}{r} -2 = -3k_1 - k_2 - 4k_3 \\ 0 = 2k_1 + 2k_2 \\ 1 = k_1 + 2k_3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -2 = -3k_1 - k_2 - 4k_3 \\ 0 = 2k_1 + 2k_2 \\ 0 = -k_1 - k_2 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} k_1 = -k_2 \\ k_3 = -\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Si $k_1 = 1 \to k_2 = -1 \to k_3 = 0 \to F_1 = F_2 - F_3$

Esta combinación lineal entre las filas también se verifica con los elementos de la última columna, por tanto, existe una combinación entre las filas de esta matriz.

002 **Calcula la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, y comprueba que se cumple que $AA^{-1} = I$ y que $A^{-1}A = I$.**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES

001 Calcula el valor de los determinantes de estas matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) $|A| = -24 - 7 = -31$

b) $|A| = 30 - 6 - 20 - 4 = 0$

002 Calcula x para que estos determinantes valgan cero.

a) $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 8 & x^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & x & 2 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix}$

a) $-2x^2 + 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

b) $3x^2 - 2 - 2x - 6 = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

003 Halla el determinante de la matriz traspuesta de estas matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) $|A^t| = |A| = -10 + 4 = -6$

b) $|A^t| = |A| = 8 + 24 - 4 = 16$

004 Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -1$, calcula:

a) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$

b) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -1$

c) $\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$

005 Calcula el determinante de A y, a partir de él, halla $|B|$.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ 8 & 3 & 6\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 8 & 10 & 14\\ -8 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

$$|A| = -60-56+42-24=-98$$

$$|B| = \begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 8 & 10 & 14\\ -8 & 3 & 6\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-2 & -1 & 0\\ -8 & 10 & 14\\ 8 & 3 & 6\end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix}-2 & -1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ 8 & 3 & 6\end{vmatrix} = -2\cdot(-98)=196$$

006 Si $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=-2$, calcula:

a) $\begin{vmatrix}a & -2b\\ c & -2d\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}-b & a\\ -d & c\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}0 & 3b\\ 0 & 3d\end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}a & -2b\\ c & -2d\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=4$

c) $\begin{vmatrix}0 & 3b\\ 0 & 3d\end{vmatrix}=0$

b) $\begin{vmatrix}-b & a\\ -d & c\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b & a\\ d & c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=-2$

007 Si $\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=3$, calcula $\begin{vmatrix}a & b+2a-c & c\\ d & e+2d-f & f\\ g & h+2g-i & i\end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix}a & b+2a-c & c\\ d & e+2d-f & f\\ g & h+2g-i & i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b+2a & c\\ d & e+2d & f\\ g & h+2g & i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=3$$

008 Halla estos determinantes.

a) $\begin{vmatrix}a & a\\ b & b\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}a & -2a\\ b & -2b\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}-a & 3a\\ -b & 3b\end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}a & a\\ b & b\end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix}a & -2a\\ b & -2b\end{vmatrix}=0$ c) $\begin{vmatrix}-a & 3a\\ -b & 3b\end{vmatrix}=0$

009 Calcula estos determinantes.

a) $\begin{vmatrix}a & d & a+d\\ b & e & b+e\\ c & f & c+f\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}a & 7 & -a\\ b & 5 & -b\\ c & 1 & -c\end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}a & d & a+d\\ b & e & b+e\\ c & f & c+f\end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix}a & 7 & -a\\ b & 5 & -b\\ c & 1 & -c\end{vmatrix}=0$

010 Comprueba que las dos matrices cumplen que $|AB| = |A| \cdot |B|$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |AB| = 36$$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \\ |B| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -12 \end{array}\right\} \rightarrow |A| \cdot |B| = 36$$

011 Determina el menor complementario de a_{21}.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) $\alpha_{21} = 1$

b) $\alpha_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10$

012 Halla los elementos cuyo adjunto es negativo.

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A_{12} = -1$, $A_{21} = -3$ y $A_{22} = -1$

b) $A_{11} = -1$, $A_{21} = -1$, $A_{23} = -2$, $A_{32} = -2$ y $A_{33} = -2$

013 Resuelve estos determinantes, aplicando la definición y desarrollando por alguna de sus columnas.

a) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$

a) Utilizando la definición: $|A| = -21 - 4 = -25$

Desarrollando por la primera columna: $|A| = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 21 = -25$

b) Utilizando la definición: $|A| = 15 + 7 - 6 + 10 = 26$

Desarrollando por la segunda columna:

$$|A| = 5(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 25 + 1 = 26$$

c) Utilizando la definición: $|A| = -24 - 7 = -31$

Desarrollando por la primera columna: $|A| = -2 \cdot 12 + 7 \cdot (-1)^{2+1} \cdot 1 = -31$

014 Resuelve estos determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-13) = 41$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 = -8$

015 Resuelve los siguientes determinantes de orden 4.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 9 & -2 \\ -1 & -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 9 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -55$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$

016 Calcula x para que se cumpla que el resultado de este determinante sea -20.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & x & x \end{vmatrix} = -20$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \\ x-1 & x+3 & -x & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ x-1 & x+3 & -x \end{vmatrix} = 16x + 44$$

$16x + 44 = -20 \rightarrow x = -4$

017 Halla todos los menores de esta matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Menores de orden 1: 0, 2, −3, −1, −3, −3, 2, 0, −2, 0, 3, −2, −1, −2, 0 y −1

Menores de orden 2: $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}=6$, $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-9$, $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=-3$,

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-5$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=-3$, $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2$, $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=-6$, $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=-5$,

$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=6$, $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=-9$, $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=6$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-4$, $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=4$,

$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=3$, $\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=6$, $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-4$, $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-3$,

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=4$, $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=-6$, $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=-2$, $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=6$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-4$,

$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=9$, $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=3$, $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=2$, $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=3$, $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=4$,

$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=3$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-2$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=2$, $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-3$, $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-1$,

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=-6$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-4$ y $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=3$

Menores de orden 3: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=28$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-6$,

$\begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-5$, $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}=1$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-13$,

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-9$, $\begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=7$, $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=3$,

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-18$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-4$, $\begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-9$,

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-24$, $\begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-1$, $\begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=12$,

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 9 \text{ y } \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 17$$

Menor de orden 4:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 15$$

018 **Calcula el rango de estas matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

019 **Calcula el rango de estas matrices.**

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3.

b) $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3.

020 **Calcula x para que el rango de estas matrices sea 3.**

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & x & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & x & 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Para que el rango de la matriz sea 3, el otro menor de orden 3 tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & x \end{vmatrix} = 6x - 36 \neq 0 \rightarrow x \neq 6$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 32 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3 para cualquier valor de x.

021 **Determina la matriz de los adjuntos de las siguientes matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

022 **Comprueba que se cumple que $A \cdot \text{Adj}(A)^t = |A| \cdot I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.**

$|A| = -4$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 12 & 9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

023 **Calcula la matriz inversa de estas matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 12 & 9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -3 & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

b) $$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{Adj}(B)^t = \frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 & 2 \\ 12 & -2 & -4 & -8 \\ 11 & -11 & -11 & 0 \\ -21 & 9 & 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{22} & -\frac{5}{22} & \frac{1}{22} & \frac{1}{11} \\ \frac{6}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{21}{22} & \frac{9}{22} & \frac{7}{22} & -\frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

024 **Calcula x para que estas matrices tengan inversa. Determina la inversa cuando exista.**

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & x+1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & x & x \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & x+1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4x + 8$

La matriz A tiene inversa si $|A| \neq 0 \rightarrow x \neq -2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}\,(A)^t = \frac{1}{4x+8} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 & 2x+2 \\ -4 & 4 & -4 \\ -x-4 & 2 & 2x+2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{4x+8} & \frac{1}{2x+4} & \frac{x+1}{2x+4} \\ -\frac{1}{x+2} & \frac{1}{x+2} & -\frac{1}{x+2} \\ -\frac{x+4}{4x+8} & \frac{1}{2x+4} & \frac{x+1}{2x+4} \end{pmatrix} \text{ si } x \neq -2$$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & x & x \end{vmatrix} = -5x - 5$

La matriz B tiene inversa si $|B| \neq 0 \rightarrow x \neq -1$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{Adj}\,(B)^t = \frac{1}{-5x-5} \cdot \begin{pmatrix} -x & -x & -1 \\ -2x+5 & 3x+10 & -7 \\ 2x & -3x-5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{5x+5} & \frac{x}{5x+5} & \frac{1}{5x+5} \\ \frac{2x-5}{5x+5} & -\frac{3x+10}{5x+5} & \frac{7}{5x+5} \\ -\frac{2x}{5x+5} & \frac{3x+5}{5x+5} & -\frac{2}{5x+5} \end{pmatrix} \text{ si } x \neq -1$$

025 **Calcula los siguientes determinantes.**

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ b & -3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} a-4 & 2 \\ 6 & a-3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ 1-a & a+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$ c) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ b & -3 \end{vmatrix} = -3a - 2b$ e) $\begin{vmatrix} a-4 & 2 \\ 6 & a-3 \end{vmatrix} = a^2 - 7a$

b) $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$ f) $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ 1-a & a+1 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2$

026 Calcula *a, b, c, d*… para que se cumplan las igualdades.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 26$

b) $\begin{vmatrix} b & 4 \\ 3b & -3 \end{vmatrix} = 45$

c) $\begin{vmatrix} c & 3c-1 \\ 4 & c \end{vmatrix} = 32$

d) $\begin{vmatrix} \frac{1}{d} & -\frac{2}{d} \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 7$

e) $\begin{vmatrix} \sqrt{e} & 2 \\ 2 & \sqrt{e-6} \end{vmatrix} = 0$

f) $\begin{vmatrix} sen\ f & cos\ f \\ cos\ f & -sen\ f \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 4a + 6 = 26 \rightarrow a = 5$

b) $\begin{vmatrix} b & 4 \\ 3b & -3 \end{vmatrix} = -15b = 45 \rightarrow b = -3$

c) $\begin{vmatrix} c & 3c-1 \\ 4 & c \end{vmatrix} = c^2 - 12c + 4 = 32 \rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ c = 14 \end{cases}$

d) $\begin{vmatrix} \frac{1}{d} & -\frac{2}{d} \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = \frac{14}{d} = 7 \rightarrow d = 2$

e) $\begin{vmatrix} \sqrt{e} & 2 \\ 2 & \sqrt{e-6} \end{vmatrix} = \sqrt{e^2 - 6e} - 4 = 0 \rightarrow e = 8$

f) $\begin{vmatrix} sen\ f & cos\ f \\ cos\ f & -sen\ f \end{vmatrix} = -sen^2\ f - cos^2\ f = -1 \neq 0 \rightarrow$ No tiene solución.

027 Obtén el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a & 2 & 4 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ x+1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -b & c & a \\ -c & a & b \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 11$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 11$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} a & 2 & 4 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$

e) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ x+1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4x$

f) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -b & c & a \\ -c & a & b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

028 Halla los valores reales de a, b, c y d para que se cumplan las igualdades.

a) $\begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = 2$

c) $\begin{vmatrix} c-1 & c+2 & 0 \\ c & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -197$

b) $\begin{vmatrix} -2 & b & -1 \\ b & 1 & b \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -5$

d) $\begin{vmatrix} d & d^2 & d-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ d & 0 & d \end{vmatrix} = -18$

a) $\begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3a = 2 \rightarrow a = 2$

b) $\begin{vmatrix} -2 & b & -1 \\ b & 1 & b \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = b^2 + 5b - 1 = -5 \rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = -4 \end{cases}$

c) $\begin{vmatrix} c-1 & c+2 & 0 \\ c & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = c^2 + 23c + 3 = -197 \rightarrow$ No tiene solución.

d) $\begin{vmatrix} d & d^2 & d-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ d & 0 & d \end{vmatrix} = -d - 2d^3 = -18 \rightarrow d = 2$

029 Calcula el valor del determinante de la matriz $A + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(Navarra. Septiembre 2005. Grupo 1. Opción B)

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |A + B| = 1$$

030 Calcula el valor del determinante de la matriz AB, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 13 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Navarra. Septiembre 2004. Grupo 1. Opción B)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 34 \\ 11 & -16 & 231 \\ 9 & -4 & 108 \end{pmatrix} \rightarrow |AB| = 10$$

031 ¿Qué relación deben guardar m y n para que el determinante $\begin{vmatrix} m & -1 & 4 \\ n & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ sea nulo?

$$\begin{vmatrix} m & -1 & 4 \\ n & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 20n - 45 - 15m = 0 \rightarrow 4n = 9 + 3m$$

032 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprueba si se verifican las siguientes igualdades. Si alguna se verifica, decide si se trata de alguna propiedad general de los determinantes.

a) $|2A| = 2|A|$

b) $|A + B| = |A| + |B|$

c) $|C - 2B| = |C| - 2|B|$

d) $|AB| = |A| \cdot |B|$

a) $|2A| = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 44 \qquad 2|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 11 = 22$

La igualdad no se cumple.

b) $|A + B| = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -15 \qquad |A| + |B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 - 14 = -3$

La igualdad no se cumple.

c) $|C - 2B| = \begin{vmatrix} 10 & -11 \\ -10 & 1 \end{vmatrix} = -100 \qquad |C| - 2|B| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 6 - 2(-14) = 34$

La igualdad no se cumple.

d) $|AB| = \begin{vmatrix} 9 & 17 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -154 \qquad |A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-14) = -154$

La igualdad se cumple porque es una de las propiedades de los determinantes.

033 Observa que si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$, se cumple que $|A + B| = |A| + |B|$.

¿Es siempre cierto para cualesquiera dos matrices cuadradas de la misma dimensión? En caso afirmativo, justifícalo y, en caso negativo, facilita un contraejemplo.

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$|A| + |B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

La igualdad se cumple en este caso pero no siempre, el apartado b) del ejercicio anterior es un contraejemplo.

034 Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Comprueba que si realizamos las siguientes operaciones, su valor no varía.

a) $F_2 + 2F_3$ b) $C_1 - 3C_3$ c) $F_3 - F_2 + F_1$ d) $C_2 - 3C_1 + 2C_3$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 34$$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 8 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 34$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 10 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 34$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 34$ d) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 14 & 0 \\ 5 & -14 & 2 \end{vmatrix} = 34$

035 Calcula cada uno de estos determinantes para comprobar que:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 3 & 0 \\ b+2 & 1 & 4 \\ 3+c & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ b & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ c & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 3 & 0 \\ b+2 & 1 & 4 \\ 3+c & 2 & -1 \end{vmatrix} = -a - 1 + 36 + 12c - 8a - 8 + 3b + 6 = 33 - 9a + 3b + 12c$$

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ b & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ c & 2 & -1 \end{vmatrix} = (36 - 9a + 3b) + (12c - 3) = 33 - 9a + 3b + 12c$$

036 Si M es una matriz cuadrada y $|M| = 6$, ¿qué puedes decir del determinante de M^3? ¿Y del determinante de $2M$?

$|M^3| = |M| \cdot |M| \cdot |M| = |M|^3 = 6^3 = 216$

Si n es el orden de la matriz cuadrada M entonces: $|2M| = 2^n|M| = 2^n \cdot 6 = 2^{n+1} \cdot 3$

037 ¿Qué propiedades de los determinantes se han empleado en cada una de las igualdades siguientes?

a) $\begin{vmatrix} a+b & 3a \\ c+d & 3c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 31 & 23 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 342 & 513 & 214 \\ 34 & 51 & 21 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

a) Propiedad 3 – Propiedad 5 – Propiedad 2
b) Propiedad 5 ($F_1 - 10F_2$)
c) Propiedad 5 ($F_1 - 10F_2$; $F_2 - 10F_3$)
d) Propiedad 9 – Propiedad 6

038 Demuestra, sin calcular el valor de los determinantes, que el primero es múltiplo de 6 y el segundo de 5.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 21 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & 8 & -12 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 4 & 21 & 2 \\ 11 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 21 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & 8 & -12 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \\ 6 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 4 & 21 & 2 \\ 11 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 7 & -1 \\ 25 & 21 & 2 \\ 15 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 5 & 21 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

039 Sabiendo que $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$, determina sin desarrollarlos el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 = 30$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

c) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

d) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$

040 Siendo $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 8$, determina sin desarrollar:

a) $\begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a-3b & b \\ c-3d & d \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} c & d \\ a+2c & b+2d \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 = 48$

c) $\begin{vmatrix} a-3b & b \\ c-3d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 8$

b) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -8$

d) $\begin{vmatrix} c & d \\ a+2c & b+2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -8$

041 Conocido que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcula el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(Canarias. Junio 2007. Opción A. Cuestión 3)

$$\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} a & -b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

042 Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$, determina sin desarrollar el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d/3 & e/3 & f/3 \\ g & h & i \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2b & c+3a & a/5 \\ 2e & f+3d & d/5 \\ 2h & i+3g & g/5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

b) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$$

c) $\begin{vmatrix} 2b & c+3a & \frac{a}{5} \\ 2e & f+3d & \frac{d}{5} \\ 2h & i+3g & \frac{g}{5} \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} b & c+3a & \frac{a}{5} \\ e & f+3d & \frac{d}{5} \\ h & i+3g & \frac{g}{5} \end{vmatrix} = \frac{2}{5}\cdot\begin{vmatrix} b & c+3a & a \\ e & f+3d & d \\ h & i+3g & g \end{vmatrix} = \frac{2}{5}\cdot\begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix} =$

$$= -\frac{2}{5}\cdot\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = \frac{2}{5}\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{5}\cdot 6 = \frac{12}{5}$$

043 Justifica sin desarrollar que los siguientes determinantes son nulos.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 5 & 4 & -10 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 9 & 14 & 3 \end{vmatrix}$

a) El determinante es nulo porque: $C_3 = -2C_1$

b) El determinante es nulo porque: $F_3 = F_1 + F_2$

c) El determinante es nulo porque:

$$C_3 = \frac{1}{2}C_1 + C_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

d) El determinante es nulo porque:

$$F_3 = 3F_2 - 2F_1 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 9 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

044 Demuestra sin desarrollar que los siguientes determinantes son nulos.

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} =$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

b) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} x+y & x-z & y-z \\ z & z-x & z-y \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$$= 2(x-z)(y-z)\cdot\begin{vmatrix} x+y & 1 & 1 \\ z & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

045 Aplicando propiedades de los determinantes, comprueba que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

046 Trata de convertir el siguiente determinante en el determinante de una matriz triangular, y así demostrar la igualdad:

$$\begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & a & b \\ 2a & 3a & a+b \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

$$\begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & a & b \\ 2a & 3a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & a & b \\ a & 2a-b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & a+b & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 2a-b & a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & a & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & a-b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & a & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

047 Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene determinante n, averigua el valor del determinante de las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$$

(Cantabria. Junio 2000. Bloque 2. Opción A)

$$|B| = \begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 3g & 2h & i \\ 6d & 4e & 2f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 3a & 2b & c \\ 3d & 2e & f \\ 3g & 2h & i \end{vmatrix} =$$

$$= 6\cdot 3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 36n$$

048 Sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$.

Sea B la matriz que resulta al realizar en A las siguientes transformaciones: primero se multiplica A por sí misma; después, se cambian de lugar la fila segunda y la tercera, y finalmente, se multiplican todos los elementos de la segunda columna por -2.

Calcular el determinante de la matriz B, usando para ello las propiedades de los determinantes.

(País Vasco. Junio 2007. Bloque A. Cuestión A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 34 & 102 \\ 14 & 90 & 282 \\ 36 & 250 & 804 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 6 & -68 & 102 \\ 36 & -500 & 804 \\ 14 & -180 & 282 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 6 & -68 & 102 \\ 36 & -500 & 804 \\ 14 & -180 & 282 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 34 & 102 \\ 36 & 250 & 804 \\ 14 & 90 & 282 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 34 & 102 \\ 14 & 90 & 282 \\ 36 & 250 & 804 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= 2 \cdot \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \end{vmatrix} \right)^2 = 2 \cdot \left(\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 24 \end{vmatrix} \right)^2 = 2 \cdot \left(2 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right)^2 = 2 \cdot 12^2 = 288$$

049 Sea A una matriz cuadrada de orden 3.

a) Si sabemos que el determinante de la matriz $2A$ es $|2A| = 8$. ¿Cuánto vale el determinante de A? Escribe la propiedad de los determinantes que hayas usado para obtener este valor.

b) Calcula para qué valores de x se cumple que $|2A| = 8$, siendo A la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$.

(Extremadura. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 3)

a) $|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \rightarrow |A| = 1$

Si en una matriz cuadrada multiplicamos por un mismo número todos los elementos de una misma fila (o columna), su determinante queda multiplicado por ese número.

b) $|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 1$

$|2A| = 8 \rightarrow |A| = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

050 Halla el valor de los siguientes determinantes, desarrollando por la fila o columna que más te interese.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 34$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2(48 + 4 - 6) = -92$

051 Dado el determinante $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}$, calcúlalo:

a) Usando la regla de Sarrus.

b) Desarrollando por los elementos de la primera columna.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 7 + 6 - 9 - 84 = -80$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 2(-39) + 7 = -80$

052 Obtén el valor del determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$:

a) Mediante la regla de Sarrus.

b) *Haciendo ceros* en la tercera fila y desarrollando por ella.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 60 - 3 + 24 - 8 - 10 + 54 = 117$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -17 & -13 \\ 2 & -8 & -13 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & -13 \\ -8 & -13 \end{vmatrix} = 221 - 104 = 117$

053 Calcula el valor del determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(Navarra. Septiembre 2006. Grupo 1. Opción B)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1+2=1$$

054 Averigua, sin realizar ninguna operación, el valor que debe tener a para que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & a & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & -10 & 4 \end{vmatrix}$ se anule.

$$F_2 = F_2 + F_4 - F_3 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & -10 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a = 6$$

055 Halla el valor de a que hace que la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & a \end{pmatrix}$ no sea regular.

(Navarra. Junio 2006. Grupo 1. Opción B)

Una matriz A no es regular si $|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 2 & -a \\ 1 & -1 & a+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a+2 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a = -2$$

056 Comprueba que $\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+1)^3$.

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^3$$

057 Comprueba que la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 & 4 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x^3 & 8 & -27 & 64 \end{vmatrix} = 0$ tiene solo tres soluciones sin necesidad de calcular el determinante. ¿Cuáles son?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 & 4 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x^3 & 8 & -27 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 2-x & -3-x & 4-x \\ x^2 & 4-x^2 & 9-x^2 & 16-x^2 \\ x^3 & 8-x^3 & -27-x^3 & 64-x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & -3-x & 4-x \\ 4-x^2 & 9-x^2 & 16-x^2 \\ 8-x^3 & -27-x^3 & 64-x^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)(3+x)(4-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2+x & 3-x & 4+x \\ x^2+2x+4 & -x^2+3x-9 & x^2+4x+16 \end{vmatrix}$$

Las tres soluciones son: $x = 2, x = -3, x = 4$.

058 Desarrolla el determinante y comprueba que es nulo. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

059 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{pmatrix}$. Calcular el valor de su determinante en función de a.

(Asturias. Septiembre 2002. Bloque 1)

$$\begin{vmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{vmatrix} = a^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a^4 \cdot \left(-\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = a^4 \cdot (1+4) = 5a^4$$

060 Obtener, en función de a, b y c, el determinante de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{pmatrix}$

(La Rioja. Septiembre 2007. Propuesta A. Ejercicio 1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+a & -a & -a & -a \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & -a & -a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -abc \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -abc$$

061 En este ejercicio los números x, y, z y u son todos distintos de cero. Justificar, sin efectuar su desarrollo, que el siguiente determinante vale 0.

$$P(x) = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ u & u & u \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix}$$

(Canarias. Junio 2003. Opción A. Cuestión 3)

$$\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ u & u & u \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = u \cdot \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \frac{u}{x} \cdot \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{x}{y} & \frac{x}{z} \end{vmatrix} = \frac{u}{xy} \cdot \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ y & x & \frac{xy}{z} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{u}{xyz} \cdot \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = 0$$

062 Averiguar según el valor de a el número de raíces reales que tiene la ecuación.

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

(Cantabria. Septiembre 2000. Bloque 2. Opción B)

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a-x^2 & x^2-a & 0 & 0 \\ a-x^2 & 0 & x^2-a & 0 \\ a-x^2 & 0 & 0 & x^2-a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x^2+3a & a & a & a \\ 0 & x^2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-a \end{vmatrix} = (x^2+3a)(x^2-a)^3 = 0$$

- Si $a = 0 \rightarrow x^8 = 0 \rightarrow$ La ecuación tiene una única solución real ($x = 0$).
- Si $a > 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones reales ($x = \pm\sqrt{a}$)
- Si $a < 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones reales ($x = \pm\sqrt{-3a}$)

063 Se considera la función:

$$f(x)=\begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Sabiendo que $f(0)=-3$ y $f(1)=f(-1)$, determinar a y b.

(Cantabria. Junio 2000. Bloque 2. Opción B)

$$\text{Si } f(0)=-3 \rightarrow \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3b\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3b = -3 \rightarrow b=-1$$

$$\text{Así: } f(x)=\begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$f(1)=\begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2a & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a+(-4-2a) = -4-a$$

$$f(-1)=\begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2a & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= a(-1)+(-4+2a) = a-4$$

$$-4-a = a-4 \rightarrow a=0$$

064 Sea A una matriz cuadrada de orden 2 verificando que $2A^2=A$. Calcular razonadamente los posibles valores del determinante de A.

(Castilla y León. Junio 2001. Prueba A. Cuestión 1)

$$|A| = |2\cdot A^2| = 2^2|A^2| = 4|A|^2$$

$$|A| = 4|A|^2 \rightarrow 4|A|^2-|A|=0 \rightarrow \begin{cases} |A|=0 \\ 4|A|-1=0 \rightarrow |A|=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

065 Estudia el rango de estas matrices.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 8 & 11 & -11 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 24 & 3 & 19 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 12 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & -8 & -24 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

b) $\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 12 & -18 \end{vmatrix} = 0 \qquad 6 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 1.

c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 8 & 11 & -11 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

d) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -39 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3.

e) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 24 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

f) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

066 **Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.**

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba B. Cuestión 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -4 & -8 & 0 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 7 & 14 & 0 & -21 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

067 **Los rangos de estas matrices son 2, 3 y 4. Averigua, sin realizar operaciones, cuál corresponde a cada una.**

a) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) 3 b) 2 c) 4

068 **Comprueba que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango 2. Añade dos filas que no sean nulas ni iguales a las anteriores de modo que el rango siga siendo 2.**

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

069 **Dada la matriz $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, añade una columna de modo que el rango sea 3. Demuéstralo.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3.

070 **Comprueba que la siguiente matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 3 & -1 \\ 12 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ es de rango 2.**

Encuentra dos columnas linealmente independientes, y expresa las otras dos como combinación lineal de las primeras.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 3 \\ 12 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & -1 \\ 12 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \\ 12 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

Respuesta abierta. Por ejemplo: Las columnas C_2 y C_3 son linealmente independientes.

$C_1 = 3C_2$ $\quad$ $C_4 = 2C_2 + C_3$

071 **¿Para qué valor de *m* el rango de esta matriz es 2?** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

Para que el rango de la matriz sea 2, el menor de orden 3 tiene que ser igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -7m - 120 + 72 + 30m - 18 + 112 = 0$$
$$\rightarrow 23m + 46 = 0 \rightarrow m = -2$$

Si $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

072 Obtener el valor de a para que el rango de la matriz A sea igual a 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix}$$

(La Rioja. Junio 2003. Propuesta A. Ejercicio 1)

Para que el rango de la matriz sea 2, los menores de orden 3 tienen que ser iguales a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -12 + 6 - 6a = 0 \rightarrow -6 - 6a = 0 \rightarrow a = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 2.}$$

073 Calcula el rango de cada matriz en función de cada uno de los parámetros.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} b & 2 & -1 \\ 3 & 2 & b+1 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & c & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -d & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ d & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -48 - 16a$$

- Si $a \neq -3 \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $a = -3 \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo. El rango de la matriz es 2.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$

$\begin{vmatrix} b & 2 & -1 \\ 3 & 2 & b+1 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 10b - 6b^2 \qquad -6b^2 + 10b + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

- Si $b \in \mathbb{R} - \left\{2, -\dfrac{1}{3}\right\} \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $b = 2$ o $b = -\dfrac{1}{3} \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo. El rango de la matriz es 2.

c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & c & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 3c$

- Si $c \neq 2 \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $c = 2 \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo. El rango de la matriz es 2.

d) $\begin{vmatrix} 1 & d & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ d & -4 & 6 \end{vmatrix} = 9d^2 - 36d + 36 = 9(d-2)^2$

$\begin{vmatrix} 1 & -d \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3d = 0 \qquad \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ d & -4 \end{vmatrix} = 12 - 6d = 0$

- Si $d \neq 2 \rightarrow$ Hay menores de orden 3 distintos de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $d = 2 \rightarrow$ Todos los menores de orden 2 y 3 son nulos. El rango de la matriz es 1.

074 **Estudia el rango de las matrices según los valores de los parámetros.**

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & a \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad$ b) $\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & b \\ b+1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4a - 12 \qquad \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a - 23$

Para cualquier valor de a al menos uno de los menores de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = b^2 - 2b \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ b+1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2b^2 + 2b - 4 = 2(b-1)(b+2)$$

Para cualquier valor de b al menos uno de los menores de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.

075 **Estudia el rango de la matriz para los distintos valores del parámetro.**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 5+a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5+a \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix} = 20 - 2a$$

- Si $a \neq 10 \rightarrow$ El menor de orden 4 es distinto de cero. El rango de la matriz es 4.
- Si $a = 10 \rightarrow$ El menor de orden 4 es nulo. El rango de la matriz es 3.

076 **Si el rango de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ es 2, ¿cuál será el rango de la matriz**

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d-a & e-b & f-c \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \end{pmatrix} ?$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-a & e-b & f-c \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = 0$$

$\rightarrow$ El rango de la matriz es menor que 3.

Como el rango de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ es 2, las dos primeras filas de la matriz cuadrada son linealmente independientes, por tanto, esta matriz tiene rango 2.

077 Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene rango 1 y la matriz $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ tiene rango 2, explicar qué valores puede tener el rango de las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & w \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ z & w & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & 0 & y & 0 \\ z & 0 & w & 0 \end{pmatrix}$$

(Cantabria. Septiembre 2000. Bloque 2. Opción A

Por ser la matriz A de rango 1, las dos primeras filas de las matrices C, D y E son linealmente dependientes y al menos uno de los valores de la matriz A es distinto de cero.

Al tener la matriz B rango 2, las dos últimas filas de las matrices C, D y E son linealmente independientes, por tanto, las tres matrices tienen al menos rango 2.

Si en la matriz C elegimos un menor de orden 3 que contenga las dos últimas filas será de la forma:

$$\begin{vmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{vmatrix} = n \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \neq 0$$

Siendo n uno de los elementos de la matriz A. Como las dos primeras filas son linealmente dependientes el menor de orden 4 es nulo, por tanto, el rango de la matriz C es 3.

Si elegimos en la matriz D un menor de orden 3 que contenga las dos últimas filas serán de la forma:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ x & y & 0 \\ z & w & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} c & d & 0 \\ x & y & 0 \\ z & w & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Como las dos primeras filas son linealmente dependientes, el menor de orden 4 es nulo, por tanto, el rango de la matriz D es 2.

Si elegimos en la matriz E un menor de orden 3 que contenga las dos últimas filas será de la forma:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & w \end{vmatrix} = -b \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \text{ o } \begin{vmatrix} c & d & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & w \end{vmatrix} = -d \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$$

Por tanto, dependiendo de si los valores de b o d son nulos o no, los menores de orden 3 serán distintos de cero o no. Luego, la matriz E puede tener rango 3.

Como las dos primeras filas son linealmente dependientes, el menor de orden 4 es nulo, por tanto, el rango de la matriz E puede ser 2 o 3.

078 Encuentra los valores de m y n que hacen que estas matrices tengan:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & n \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} m & 0 & n & 2 \\ m & m & 4 & 4 \\ 0 & m & 2 & n \end{pmatrix}$$

a) Rango $(A) = 2$ y Rango $(B) = 3$

b) Rango $(A) =$ Rango $(B) = 2$

c) Rango $(A) =$ Rango $(B) = 3$

$$\begin{vmatrix} m & 0 & n \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = m^2 \cdot (n-2) \qquad \begin{vmatrix} 0 & n & 2 \\ m & 4 & 4 \\ m & 2 & n \end{vmatrix} = -m \cdot (n-2)^2$$

a) No podemos encontrar valores de m y n que verifiquen las dos condiciones, por tanto, el rango de A no puede ser 2 si el de B es 3.

b) Si $m \neq 0$ y $n = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} m & 0 \\ m & m \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) \geq 2$

$n = 2 \rightarrow$ Los menores de orden 3 son nulos y los rangos de las matrices son 2.

c) Si $m \neq 0$ y $n \neq 2 \rightarrow$ Los menores de orden 3 son distintos de cero y los rangos de las matrices son 3.

079 **Halla el rango de la matriz M en función de los valores del parámetro x.**

$$M = \begin{pmatrix} 2x-6 & x & -1 \\ x & x & -1 \\ 4 & 4 & x-4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2x-6 & x & -1 \\ x & x & -1 \\ 4 & 4 & x-4 \end{vmatrix} = x^3 - 10x^2 + 28x - 24 = (x-2)^2(x-6)$$

- Si $x \in \mathbb{R} - \{2, 6\} \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $x = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo y hay un menor de orden 2 distinto de cero. El rango de la matriz es 2.
- Si $x = 6 \rightarrow \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo y hay un menor de orden 2 distinto de cero. El rango de la matriz es 2.

080 **Calcula el rango de la matriz A según los valores del parámetro k.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -k & 2 \\ 1 & -1 & -1 & k-1 \end{pmatrix}$$

(Baleares. Septiembre 2003. Opción A. Cuestión 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & 1 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -k^2 + k + 2 = -(k-2)(k+1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & k-1 \end{vmatrix} = -2k^2 + 5k - 2 = (k-2)(1-2k)$$

- Si $k \neq 2 \rightarrow$ Hay un menor de orden 3 distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $k = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ Los menores de orden 3 son nulos y al menos hay un menor de orden 2 distinto de cero. El rango de la matriz es 2.

081 **Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de sus parámetros.**

$$\begin{pmatrix} a+1 & 1 & -a & b \\ 1 & a+1 & 0 & 2b \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a+1)^2 \qquad \begin{vmatrix} a+1 & 1 & b \\ 1 & a+1 & 2b \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -b(a^2+a+1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & b \\ a+1 & 0 & 2b \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -b(a+1) \qquad \begin{vmatrix} a+1 & -a & b \\ 1 & 0 & 2b \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -b(2a^2+2a+1)$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$, para cualquier valor de b, hay un menor de orden 3 distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $a = 0$ y $b \neq 0 \rightarrow$ El segundo menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $a = 0$ y $b = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.
- Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ El rango es mayor o igual que 2: el rango es 2 si $b = 0$ y es 3 si $b \neq 0$.

082 **Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.**

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 3. Pregunta A)

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - 2\lambda = 2\lambda(2\lambda - 1)$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $\lambda = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.
- Si $\lambda = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

083 **Estudiar el rango de la matriz que sigue, mediante transformaciones de filas y columnas, indicando en cada caso las transformaciones realizadas.**

$$A = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}$$

(País Vasco. Junio 2000. Bloque E. Cuestión E)

Si restamos la primera columna a las dos últimas:

$$\begin{pmatrix} b & a-b & a-b \\ a & b-a & 0 \\ a & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

Si sumamos las dos últimas filas a la primera:

$$\begin{pmatrix} 2a+b & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 \\ a & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

- Si $a = b = 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 0.
- Si $a = b \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 3a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ El rango de la matriz es 1.
- Si $b = -2a \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & -3a & 0 \\ a & 0 & -3a \end{pmatrix} \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.
- Si $a \neq b$ y $b \neq -2a \rightarrow$ Las tres filas son linealmente independientes. El rango de la matriz es 3.

084 **Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$:**

a) Prueba que para cualquier valor de a y b, Rango $(A) \geq 2$.

b) Determina un par de valores reales para los cuales sea Rango $(A) = 3$ y otro par de valores de a y b de forma que Rango $(A) = 4$.

(Cantabria. Junio 2001. Bloque 2. Opción A)

a) Si $a = b = 0 \rightarrow b + 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) \geq 1$

$$\begin{vmatrix} b+1 & a \\ 0 & b+1 \end{vmatrix} = (b+1)^2$$

$$\begin{vmatrix} b & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = b^2$$

Como ambos menores no pueden ser nulos para cualquier valor de a y $b \rightarrow$ Rango $(A) \geq 3$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b+1 & 0 & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} b+1 & a & 0 \\ 0 & b+1 & a \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -a^4 + b^2(b+1)^2$$

- Para que Rango $(A) < 4$ el determinante tiene que valer cero:
  $a^4 = b^2(b+1)^2 \rightarrow a^2 = b(b+1)$
  Como $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ b+1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3$, para que el Rango $(A) = 3$ basta con tomar un valor de a que sea distinto de cero: si $b = 1$ y $a = \sqrt{2}$ el rango de la matriz es 3.
- Para que Rango $(A) = 4$ basta con que $-a^4 + b^2(b+1)^2 \neq 0$, por ejemplo, para $a = 1$ y $b = 1$ la matriz tiene rango 4.

085 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Vemos que ambas tienen rango máximo, o sea, 2. Determina los valores de c tales que la matriz $A + cB$ ya no tenga rango 2. ¿Cuál es el rango que tienen las respectivas matrices suma?

(Aragón. Septiembre 2003. Opción B. Cuestión 1)

$$A + cB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{vmatrix} = (1+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2-c \end{vmatrix} = (1+c)(6-c)$$

Si $c = 6$ o $c = -1 \rightarrow$ El menor de orden 2 es nulo y la matriz $A + cB$ no tiene rango 2.

Como $-1 \neq 0 \rightarrow$ El rango de las matrices $A + 6B$ y $A - B$ es 1.

086 **a) Si A es una matriz y $a \in \mathbb{R}$, ¿cuándo se cumple que Rango $(aA) =$ Rango (A)?**

b) Estudie, en función de los valores de a, el rango de la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

(Murcia. Junio 2001. Bloque 1. Cuestión 2)

a)
- Si A es la matriz nula, su rango es 0 y el rango de la matriz aA también es 0 para cualquier valor de a.
- Si $a \neq 0 \rightarrow$ El número de filas o columnas linealmente independientes de A y de aA coincide. Los rangos de ambas matrices son iguales.
- Si $a = 0 \rightarrow$ La matriz aA tiene rango 0 y solo coincide con el rango de A si esta matriz es nula.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2a$

- Si $a \neq -1 \rightarrow$ Hay un menor de orden 3 distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

087 **Toma una matriz cuadrada de orden 2 y calcula su matriz adjunta. Compara sus determinantes. Haz lo mismo con una matriz cuadrada de orden 3. Establece una hipótesis general y trata de demostrarla.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada de orden 2.

$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 7 \quad |\text{Adj}(A)| = 7$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada de orden 3.

$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 2 \quad |\text{Adj}(A)| = 4$

Si A es una matriz cuadrada de orden n:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A)^t \rightarrow |A^{-1}| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^n \cdot |\text{Adj}(A)^t|$$

Como $|\text{Adj}(A)^t| = |\text{Adj}(A)|$ tenemos que:

$$|A^{-1}| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^n \cdot |\text{Adj}(A)| = \frac{1}{|A|^n} \cdot |\text{Adj}(A)|$$

Como $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \rightarrow \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{|A|^n} \cdot |\text{Adj}(A)| \rightarrow |\text{Adj}(A)| = |A|^{n-1}$

088 **Halla la matriz inversa de estas matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

a) $|A| = 2 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

b) $|B| = 1 \neq 0 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $|C| = -20 \neq 0 \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}$

d) $|D| = 10 \neq 0 \rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{9}{10} & -\frac{11}{10} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

089 ¿Para qué valores del parámetro a la matriz no tiene inversa? Calcula la matriz inversa cuando $a = 2$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$|M| = a - a^2$

La matriz no tiene inversa si su determinante es nulo, es decir, si $a = 0$ o $a = 1$.

Si $a = 2 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |M| = -2 \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

090 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{pmatrix}$.

Encuentra su inversa, si existe, cuando $a = 1$.

(Asturias. Septiembre 2002. Bloque 1)

$|A| = 5a^4$

Si $a = 1 \rightarrow |A| = 5 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

091 Para cada número real λ, $M(\lambda)$ es la matriz $M(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Obtener el determinante de la matriz $M(\lambda)$, y justificar que para cualquier número real λ existe la matriz $M(\lambda)^{-1}$ inversa de $M(\lambda)$.

b) Calcular la matriz $M(0)^{-1}$.

c) Si $A = M(8)$, $B = M(4)$ y $C = M(3)$, calcular el determinante de la matriz producto $A \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}$.

(C. Valenciana. Junio 2002. Ejercicio B. Problema 1)

a) $|M(\lambda)| = \lambda^2 - 2\lambda + 2$

La ecuación $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ no tiene solución, por tanto, el determinante de la matriz es distinto de cero y siempre existe la matriz inversa.

b) $M(0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |M(0)| = 2 \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = M(8) \rightarrow |A| = 50$

$B = M(4) \rightarrow |B| = 10$

$C = M(3) \rightarrow |C| = 5$

$|A \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| \cdot |C^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} \cdot \frac{1}{|C|} = 50 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = 1$

092 **A, B y C son tres matrices cuadradas tales que $|A| = 5$, $|B| = 4$ y $|C| = 2$. Decide razonadamente el valor de los siguientes determinantes.**

a) $|A^t|$ **c) $|AB^{-1}|$** **e) $|(BC)^{-1}|$**

b) $|B^{-1}|$ **d) $|AB^{-1}|$** **f) $|C^{-1}B^t|$**

a) $|A^t| = |A| = 5$

b) $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{4}$

c) $|AB^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

d) $|A^{-1}B| = |A^{-1}| \cdot |B| = \frac{1}{|A|} \cdot |B| = \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5}$

e) $|(BC)^{-1}| = \frac{1}{|BC|} = \frac{1}{|B| \cdot |C|} = \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$

f) $|C^{-1}B^t| = |C^{-1}| \cdot |B^t| = \frac{1}{|C|} \cdot |B| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

093 **a) Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ cumple que $A^3 = -A - I$ y calcula la matriz inversa de A.**

b) Si A es cualquier matriz de n filas y n columnas tal que $A^3 = -A - I$ y se sabe que det $(A) = m$, calcula el valor del determinante de $A + I$ en función de m. (I representa la matriz unidad.)

(Cantabria. Junio 2002. Bloque 2. Opción B)

a) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$-A - I = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$A^3 = -A - I \rightarrow -A^3 - A = I \rightarrow A(-A^2 - I) = I \rightarrow A^{-1} = -A^2 - I$

$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $|A + I| = |-A^3| = -|A|^3 = -m^3$

094 Calcula las matrices *X*, *Y*, *Z* y *T* que cumplen las ecuaciones.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

c) $Z \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix}$

d) $T \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

b) $Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $Z = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $T = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

095 Determina las matrices $X, Y, Z\ldots$ en las ecuaciones.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix}$

b) $Y \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot Z = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix}$

a) $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $Y = \left[\begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & -6 & -8 \\ -23 & 12 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & \frac{3}{2} \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $Z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 10 & 4 & 28 \\ -8 & 12 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

096 Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}$, encuentra dos matrices C y D tales que:

$$CA = B \qquad DB = A$$

¿Qué relación hay entre C y D?

$$C = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{76} \begin{pmatrix} 35 & -23 & 9 \\ -2 & 10 & 6 \\ 15 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{76} \begin{pmatrix} 212 & -122 & -235 \\ -36 & 20 & 46 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -5 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$CD = BA^{-1}AB^{-1} = BIB^{-1} = BB^{-1} = I \rightarrow C$ y D son inversas.

097 Se consideran las matrices cuadradas reales de orden 2,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) La matriz P^{-1}.

b) La matriz real cuadrada X de orden 2, tal que $P^{-1}XP = Q$.

c) La matriz cuadrada $(PQP^{-1})^2$.

(C. Valenciana. Septiembre 2003. Ejercicio B. Problema 1)

a) $|P| = -1 \neq 0 \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $P^{-1}XP = Q \rightarrow X = PQP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $(PQP^{-1})^2 = X^2 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -10 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$

098 Sea k un número natural y sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\qquad C=(1\quad 1\quad 2)$$

a) Calcular A^k.

b) Hallar la matriz X que verifica la ecuación: $A^kX=BC$

(Madrid. Junio 2001. Opción A. Ejercicio 2)

a) $$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Entonces: $A^k=\begin{pmatrix}1&k&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) $$A^kX=BC\rightarrow X=(A^k)^{-1}BC=\begin{pmatrix}1&-k&-k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot(1\quad 1\quad 2)=$$

$$=\begin{pmatrix}1&-k&-k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&2\\-1&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&2\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$$

099 Determina la matriz X que verifica la ecuación $AX=X-B$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\ \text{y}\ B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

(Andalucía. Junio 2002. Opción B. Ejercicio 3)

$$AX=X-B\rightarrow AX-X=-B\rightarrow (A-I)X=-B\rightarrow X=(A-I)^{-1}(-B)$$

$$A-I=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\rightarrow(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&-1&0\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&-1&0\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&1&1\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}$$

100 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$:

a) Halla la inversa de $A - BC$.

b) Resuelve la ecuación matricial $AX - BCX = A$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2001. Bloque 1. Pregunta B)

a) $A - BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A - BC| = -1 \neq 0 \rightarrow (A - BC)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $AX - BCX = A \rightarrow (A - BC)X = A$

$$X = (A - BC)^{-1}A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -13 & 21 \\ 8 & -9 & 16 \\ -10 & 12 & -18 \end{pmatrix}$$

101 Responde razonadamente:

a) Si A tiene inversa, ¿cuál es el rango de A^{-1}?

b) ¿Es cierto que siempre Rango (A) = Rango (A^t)?

c) ¿Es siempre cierto que, si A y B son matrices de la misma dimensión, Rango $(A + B)$ = Rango (A) + Rango (B)?

d) ¿Y que Rango (A^2) = Rango (A)?

a) Si A tiene inversa, verifica que:

$$|A| \neq 0 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^{-1}) = \text{Rango } (A)$$

b) Sí, ya que el rango corresponde al número de filas o columnas linealmente independientes y esta relación no cambia al trasponerlas.

c) No. Por ejemplo, si A y B son dos matrices de orden 2 con rango 2, la matriz suma $A + B$ también es una matriz de orden 2 que no puede tener rango $2 + 2 = 4$.

d) No. Por ejemplo: si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de modo que el rango de A es 1 y el de A^2 es 0. Solo es cierto cuando A es una matriz regular.

102 a) Calcula la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{array}\right\}$$

(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 3)

a) $|A| = 2 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

103 a) Sean F_1, F_2, F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3, con det $(M) = -2$. Calcula el valor del determinante de la matriz que tiene por filas $F_1 - F_2$, $2F_1$, $F_2 + F_3$.

b) Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla dos matrices X e Y que verifican:

$$\left.\begin{array}{l} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{array}\right\}$$

siendo C^t la matriz traspuesta de C.

(Galicia. Junio 2007. Bloque 1. Opción 1)

a) Si escribimos:

$\det(M) = \det(F_1, F_2, F_3) = -2$

Entonces:

$\det(F_1 - F_2, 2F_2, F_2 + F_3) = 2\det(F_1 - F_2, F_2, F_2 + F_3) = 2\det(F_1, F_2, F_2 + F_3) =$
$= 2\det(F_1, F_2, F_3) = 2(-2) = -4$

b) Si sumamos las ecuaciones tenemos:

$$2X = C + C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$X + Y^{-1} = C \rightarrow Y^{-1} = C - X \rightarrow Y = (C - X)^{-1}$$

$$C - X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Y = (C - X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

104 **Sean F_1, F_2, F_3 y F_4 las filas de una matriz cuadrada P de orden 4×4, cuyo determinante vale 3. Calcula razonadamente el valor del determinante de la inversa de P, el valor del determinante de la matriz αP, donde α denota un número real no nulo, y el valor del determinante de la matriz cuyas filas son $2F_1 - F_4$, F_3, $7F_2$ y F_4.**

(Galicia. Junio 2001. Bloque 1. Pregunta 2)

$$|P| = 3 \rightarrow |P^{-1}| = \frac{1}{|P|} = \frac{1}{3} \qquad |\alpha P| = \alpha^4 |P| = 3\alpha^4$$

$$\begin{aligned} \det(2F_1 - F_4, F_3, 7F_2, F_4) &= 7\det(2F_1 - F_4, F_3, F_2, F_4) = -7\det(2F_1 - F_4, F_2, F_3, F_4) = \\ &= -7\det(2F_1, F_2, F_3, F_4) = -14\det(F_1, F_2, F_3, F_4) = \\ &= -14 \cdot 3 = -42 \end{aligned}$$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 **Sea $P(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix}$.**

Halla dos raíces de este polinomio de grado cuatro.

(La Rioja. Junio 2007. Propuesta A. Ejercicio 2)

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & 0 \\ 3-3x & 0 & x-3 & 0 \\ 3-3x & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= -\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 3-3x & x-3 & 0 \\ 3-3x & 0 & x-3 \end{vmatrix} + (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 3-3x & x-3 & 0 \\ 3-3x & 0 & x-3 \end{vmatrix} = \\ &= (x-1)(x-3)^2 + (x-1)\left[x(x-3)^2 - 2(x-3)(3-3x)\right] = \\ &= (x-1)(x-3)^2 + (x-1)(x-3)\left[x(x-3) - 2(3-3x)\right] = \\ &= (x-1)(x-3)\left[(x-3) + (x^2 - 3x - 6 + 6x)\right] = \\ &= (x-1)(x-3)(x^2 + 4x - 9) \end{aligned}$$

por tanto, $x = 1$ y $x = 3$ son dos raíces del polinomio.

2 Utiliza las propiedades de los determinantes para desarrollar el siguiente:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}$$

Enuncia las propiedades que has utilizado.

(Castilla-La Mancha. Junio 2003. Bloque 1. Pregunta B)

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2x+1 & 3x+2 \\ 1 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2x+1 & 3x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

En primer lugar, utilizamos la siguiente propiedad: si todos los elementos de una columna de la matriz están multiplicados por un mismo número, su determinante queda multiplicado por ese número. A continuación, a las dos últimas filas le restamos la primera fila de la matriz por la propiedad que dice que el determinante no varía si a una fila le sumamos una combinación lineal de las demás. Por último, el determinante es nulo porque tiene dos filas iguales.

3 Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$, calcular el valor del siguiente determinante sin desarrollarlo:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$$

(Aragón. Septiembre 2006. Opción B. Cuestión 1)

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -3 \cdot 7 = -21$$

4 Hallar los valores de k para que la matriz $\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$:

a) No tenga inversa.

b) Tenga rango 3.

(Canarias. Septiembre 2006. Opción B. Cuestión 3)

a) $\begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} =$

$$= -k \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} = 3k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k+4 & 5 & 7 \\ k+4 & k+5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 3k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k-3 & -2 & 0 \\ k-3 & k-2 & 0 \end{vmatrix} = 3k \cdot \begin{vmatrix} k-3 & -2 \\ k-3 & k-2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3k[(k-3)(k-2) + 2(k-3)] = 3k^2(k-3)$$

Si $k = 0$ o si $k = 3 \rightarrow$ El determinante es nulo. La matriz no tiene inversa.

b) Si $k = 0$ o si $k = 3 \rightarrow$ El menor de orden 4 es igual a cero.
Comprobamos si hay un menor de orden 3 no nulo.

- Si $k = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 3.}$$

- Si $k = 3$:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 3.}$$

5 Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$:

a) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

b) Determinar para qué valores de a existe matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

(Madrid. Junio 2006. Opción B. Ejercicio 3)

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2a - 2a^3 = 2a(1 - a^2)$

b)
- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $a = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.
- Si $a = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.
- Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

6 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Probar que la matriz T tiene inversa, T^{-1}, y calcular dicha inversa T^{-1}.

b) Dada la ecuación con matriz incógnita B, $A = T^{-1}BT$, calcular el determinante de B.

c) Obtener los elementos de la matriz B considerada en el apartado b).

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio B. Problema 1)

a) $|T| = -1 \neq 0 \rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = T^{-1}BT \rightarrow B = TAT^{-1} \rightarrow |B| = |T| \cdot |A| \cdot |T^{-1}| = |T| \cdot |A| \cdot \dfrac{1}{|T|} = |A| = 2$

c) $B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3 Sistemas de ecuaciones lineales

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Amor se escribe sin hache

[Esta novela es una historia de amor contada con un humor disparatado. En la siguiente escena, los protagonistas, Sylvia y Zambombo, llegan a una isla después de naufragar el barco donde viajaban. Una vez encendida una hoguera admirable, Zambombo determinó construir una cabaña.]

–¡Sí, sí! –palmoteó Sylvia–. Una cabaña... y tu amor... ¡Ah! ¡Qué dichosa soy!

Zamb se dirigió a la entrada del bosque y transportó a la playa unos cuantos árboles que yacían en el suelo derribados, tal vez, por alguna tormenta. Calculó la resistencia de los árboles midiendo su diámetro y su longitud y escribió en su cuadernito:

$$A + B = (A + B) - (A + B) \cdot (A + B) + (A + B)$$

Elevó al cuadrado el primer término, y con gran sorpresa suya, que no creía saber tantas matemáticas, obtuvo:

$$(A + B)^2 = (A + B) - (A + B) \cdot (A + B) + (A + B)$$

Y sustituyendo esto por las cifras averiguadas, logró:

$$73^2 = (10 + 10)$$

La resistencia de los troncos del árbol era de 730 kilogramos.

Puso los troncos apoyados entre sí, formando dos vertientes, en número de quince. De manera que cuando Zamb y Sylvia se metieron debajo, los kilos de árbol que se les cayeron encima, al desplomarse la cabaña, fueron:

$$730 \cdot 15$$

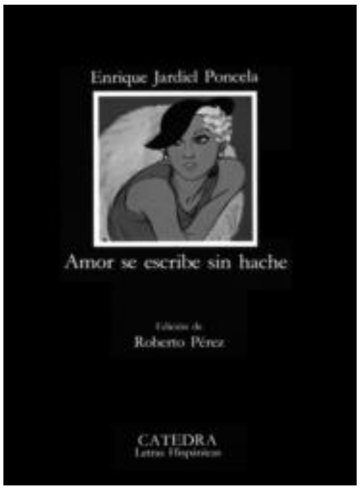
o sea: 10.950.

Ambos se desmayaron a consecuencia del traumatismo. Al volver en sí, era de noche.*

* Puede calcularse que, por cada 100 kilos que le caen en la cabeza a un ser humano, permanece desmayado un minuto. Como en 10.950 kilos hay, aproximadamente, 109 veces 100 kilos, resulta que Zambombo y Sylvia estuvieron desmayados durante 109 minutos, o sea, dos horas menos once minutos. No nos explicamos, por lo tanto, por qué al volver en sí era ya de noche.

ENRIQUE JARDIEL PONCELA

Amor se escribe sin hache
Enrique Jardiel Poncela



En esta obra, como en casi todas las de Jardiel Poncela, el humor es el recurso literario predominante y, a través de un manejo casi surrealista del mismo, logra que los lectores (cuando se trata de novelas) y los espectadores (cuando se trata de piezas teatrales) revisen su percepción de los problemas humanos más importantes. En esta novela aborda el tema del amor a través de la historia disparatada que viven los protagonistas, Sylvia y Zambombo.

El texto anterior forma parte de una escena donde los protagonistas han llegado a una isla después de naufragar el barco donde viajaban. Allí tienen que enfrentarse a cuatro problemas: localizar geográficamente el sitio donde se encuentran, hacer fuego, construir una choza y encontrar víveres.

Zambombo aborda el problema de la orientación con técnicas disparatadas, como la medida de la velocidad del viento mediante una regla de tres:

Para ello, por medio de dos rayas, señaló en el suelo su estatura, que era de un metro y setenta y cinco. Colocó en una de las rayas un papelito y midió, reloj en mano, lo que el viento tardaba en llevar el papel a la otra rayita. Tardó cuatro segundos. Y Zamb razonó por medio de la regla de tres:

1,75 metros los recorre en 4 segundos
1.000 metros (o sea un kilómetro) los recorrerá en *x*

De donde *x* era igual a 1.000 multiplicado por 4 y partido por 1,75.

Hizo las operaciones, contando por los dedos, y comprobó que el viento corría que se las pelaba.

Luego Zambombo, como si fuera un robinsón, se dedica a hacer fuego frotando dos trozos de madera. Cuando consigue una llamita tras seis horas de trabajo, su propio sudor se la apaga. Sylvia le dice: «¿Qué? ¿No puedes hacer fuego?». Y él le contesta: «Podré, porque traigo cerillas, pero si no las hubiera traído, no sé cómo nos las habríamos arreglado...».

Una vez encendida una hoguera admirable, Zambombo determinó construir una cabaña tal como se describe en el texto elegido.

Finalmente, el cuarto problema, el de los víveres, lo resuelven comiendo los productos vegetales anunciados en el cartel que vieron al llegar en la playa. Veinte días después, Sylvia había adelgazado dieciocho libras y Zambombo, diecinueve. Pero se recuperaron cuando aprendieron a pescar "piscis rodolphus valentinus".

La ingenuidad romántica de Zambombo desencadena el desenlace de esta aventura y le sirve a Jardiel para plantear la siguiente y llegar, finalmente, a la conclusión moral de la novela.

Jardiel Poncela utiliza aquí el lenguaje algebraico como un recurso humorístico, una aplicación *novedosa*, porque en Matemáticas y en las otras ciencias se emplea para expresar propiedades o resolver problemas como este: «Sylvia tiene 24 años; tiene el doble de la edad que tenía Zambombo cuando ella tenía la edad que él tiene ahora. ¿Qué edad tiene Zambombo?».

Sea x la edad que tiene Zambombo.

Entonces: $24 = 2(x - (24 - x)) \rightarrow 24 = 2(2x - 24) \rightarrow 12 = 2x - 24 \rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$ años

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x - 2y &= 4 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= -1 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x - 2y &= 4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -1 \end{aligned}\right.$

b) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= -1 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{3} \\ y &= \frac{2}{3} \end{aligned}\right.$

002 Escribe tres ecuaciones equivalentes a estas.

a) $x - 2 = 7$ b) $2x = -3$ c) $\frac{x}{2} - 4 = 6$

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$x - 9 = 0$ $2x - 4 = 14$ $2 - x = -7$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$4x + 6 = 0$ $1 - 6x = 10$ $10x + 15 = 0$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$x - 8 = 12$ $16 - 2x = -24$ $3x = 60$

003 Escribe dos sistemas equivalentes a estos.

a) $\left.\begin{aligned} -x + 2y &= 0 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x - 2y &= 3 \end{aligned}\right\}$

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ 3x - y &= 5 \end{aligned}\right\}$

b) Aunque el sistema es incompatible, podemos considerar sistemas equivalentes. Los siguientes sistemas se han obtenido multiplicando las ecuaciones por una constante:

$\left.\begin{aligned} -x + y &= 0 \\ 2x - 2y &= 3 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 4x - 4y &= 6 \end{aligned}\right\}$

ACTIVIDADES

001 Escribe una ecuación con tres incógnitas de coeficientes 4, -1 y 1, respectivamente, y con término independiente -2.
Calcula tres soluciones de esta ecuación.

La ecuación es $4x - y + z = -2$, y tres soluciones son:

$x = 1$, $y = 6$ y $z = 0$

$x = -1$, $y = 0$ y $z = 2$

$x = 0$, $y = 2$ y $z = 0$

002 Determina una solución de este sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -x-y+z=0 \\ -2x=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\}$$

Respuesta abierta. Por ejemplo: $x=0,\ y=2,\ z=2$

003 Clasifica estos sistemas según su número de soluciones.

a) $\left.\begin{array}{r} -2x+y=2 \\ 2x-y=-2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} -x+2y=4 \\ 2x-4y=1 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=1 \\ 2x-y=3 \end{array}\right\}$

a) Tiene infinitas soluciones. El sistema es compatible indeterminado.

b) No tiene solución. El sistema es incompatible.

c) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=1 \\ 2x-y=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \end{array}\right.$

Tiene solución única. El sistema es compatible determinado.

004 Convierte este sistema en un sistema escalonado y resuélvelo.

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -y+2z=1 \\ -x=5 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -y+2z=1 \\ -x\qquad\quad=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -y+2z=1 \\ -y-z=6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -y+2z=1 \\ z=7 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-5 \\ y=13 \\ z=7 \end{array}\right.$$

005 Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y-2z=1 \\ -x-y+z=0 \\ y-z=1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} y-z=1 \\ 2x-2y+z=3 \\ 3x\qquad-2z=7 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-2z=1 \\ y-z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=1+\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

b) $\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 7 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-2y+z=3 \\ y-z=1 \\ z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right.$$

006 Resuelve aplicando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{array}{r} y+z=-5 \\ 2x-y=0 \\ x+z=-4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x-y+z+t=4 \\ 3x-2y-t=-2 \\ x+2y-2z-t=0 \\ y+z-4t=-4 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\to \left.\begin{array}{r} x \quad +z=-4 \\ y+z=-5 \\ -z=3 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-2 \\ z=-3 \end{array}\right.$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & -30 & -34 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & -30 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 22 \end{array}\right)$

$\to \left.\begin{array}{r} x+2y-2z-t=0 \\ y+z-4t=-4 \\ 14z-30t=-34 \\ -2t=22 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=-19 \\ y=-22 \\ z=-26 \\ t=-11 \end{array}\right.$

007 Discute estos sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y-2z=1 \\ -x-y+z=0 \\ y-z=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -2x+y-z=1 \\ 2x-2y-z=3 \\ -y-2z=7 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

Sistema incompatible

008 **Discute utilizando el método de Gauss.**

$$\left.\begin{array}{r}-x+y+z-2t=-5\\ 2x-y-t=0\\ x+z-3t=-2\\ -x+y-2z+t=0\end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}-1&1&1&-2&-5\\2&-1&0&-1&0\\1&0&1&-3&-2\\-1&1&-2&1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrrr|r}1&0&1&-3&-2\\-1&1&1&-2&-5\\2&-1&0&-1&0\\-1&1&-2&1&0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{rrrr|r}1&0&1&-3&-2\\0&1&2&-5&-7\\0&-1&-2&5&4\\0&1&-1&-2&-2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrrr|r}1&0&1&-3&-2\\0&1&2&-5&-7\\0&0&0&0&-3\\0&0&3&-3&-5\end{array}\right)$$

Sistema incompatible

009 **Discute y resuelve este sistema:**

$$\left.\begin{array}{r}2x+y-z=1\\ -x-2y+z=0\\ x-y+\lambda z=2\end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r}2&1&-1&1\\-1&-2&1&0\\1&-1&\lambda&2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&-1&\lambda&2\\-1&-2&1&0\\2&1&-1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&-1&\lambda&2\\0&-3&\lambda+1&2\\0&3&-1-2\lambda&-3\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&-1&\lambda&2\\0&-3&\lambda+1&2\\0&0&-\lambda&-1\end{array}\right)$$

- Si $\lambda=0\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&-1&0&2\\0&-3&1&2\\0&0&0&-1\end{array}\right)\rightarrow$ Sistema incompatible

- Si $\lambda\neq0\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&-1&\lambda&2\\0&-3&\lambda+1&2\\0&0&-\lambda&-1\end{array}\right)\rightarrow$ Sistema compatible determinado

$$\left.\begin{array}{r}x-y+\lambda z=2\\ -3y+(\lambda+1)z=2\\ -\lambda z=-1\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{1+2\lambda}{3\lambda}\\ y=\dfrac{1-\lambda}{3\lambda}\\ z=\dfrac{1}{\lambda}\end{array}\right.\quad\text{con }\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$$

010 Discute y resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= -2\\ 2x - 2y &= 1\\ x - \lambda z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -\lambda & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2 & 5\\ 0 & 2 & -\lambda-1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

- Si $\lambda \neq 1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right) \to$ Sistema compatible $\to \begin{cases} x = 3\\ y = \dfrac{5}{2}\\ z = 0 \end{cases}$

- Si $\lambda = 1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$ Sistema compatible indeterminado

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= -2\\ 2y - 2z &= 5\\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\} \to \begin{cases} x = 3 + a\\ y = \dfrac{5+2a}{2}\\ z = a \end{cases} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

011 Escribe mediante ecuaciones este sistema, y resuélvelo aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2\\ -2 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1\\ -2x + y - z &= -2\\ -2y + z &= -1 \end{aligned}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -1 & -2\\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 5 & -5 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 5 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \to \left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1\\ 5y - 5z &= 0\\ -5z &= -5 \end{aligned}\right\} \to \begin{cases} x = 1\\ y = 1\\ z = 1 \end{cases}$$

012 Determina la expresión matricial de este sistema, y resuélvelo como si fuera una ecuación matricial.

$$\left.\begin{aligned} -3x + y + 2z &= 0\\ -x - 2y + z &= -2\\ x - y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} 0\\ -2\\ 1 \end{pmatrix}$$

$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$$|A| = 11 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

013 **Utiliza el teorema de Rouché-Fröbenius para determinar si estos sistemas son compatibles, y resuélvelos aplicando el método de Gauss.**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = -2 \\ -x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + 3z = -2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + 3y - 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 0 \\ -x - z = 7 \end{array}\right\}$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{array}\right)$

$|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 2$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 4y + 3z = -2 \\ -5y + 5z = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2 + 5\lambda}{5} \\ y = \dfrac{2 + 5\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

$|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\,(A^*) = 3$$

Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

014 **Mediante el teorema de Rouché-Fröbenius, determina si el sistema es compatible.**

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - z + t = 1 \\ x - 3y + z - t = 0 \\ 3x - 2y = 1 \\ y - 2z = 4 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\,(A) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -8 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\,(A^*) = 3$$

Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

015 **Discute este sistema aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius.**

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z + t = 1 \\ -x - 3y + z - 2t = 0 \\ -2y - t = 1 \\ y - 2z = -3 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

016 **Añade una ecuación al sistema de ecuaciones para que se convierta en:**

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y - z = 1 \\ -x - y + z = 3 \end{array}\right\}$$

a) Un sistema compatible determinado.
b) Un sistema compatible indeterminado.
c) Un sistema incompatible.

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y - z = 1 \\ -x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \end{array}\right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y - z = 1 \\ -x - y + z = 3 \\ x + y = 4 \end{array}\right\}$$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y - z = 1 \\ -x - y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\}$$

017 **Evalúa si se puede aplicar la regla de Cramer a estos sistemas de ecuaciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = -2 \\ x - y + z = 4 \\ -2y + z = -3 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z + t = 0 \\ x - 3y + z - 2t = -2 \\ -2y + 3t = 3 \end{array}\right\}$

a) El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

b) El número de ecuaciones no es el mismo que el número de incógnitas, por tanto, no se puede aplicar la regla de Cramer.

018 **Escribe dos sistemas de ecuaciones lineales a los que se pueda aplicar la regla de Cramer y que cumplan cada una de estas condiciones.**

a) Tenga 3 ecuaciones. **b) Tenga 4 incógnitas.**

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ x + y \phantom{{}+z} = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z + t = 4 \\ x + y - z - t = 0 \\ 2x + y - z \phantom{{}+t} = 2 \\ y + z + t = 3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z - t = 4 \\ x + y - z - t = -2 \\ x + y - z \phantom{{}-t} = -1 \\ y + z + 2t = -1 \end{array}\right\}$$

019 **Evalúa si se puede aplicar la regla de Cramer a este sistema, y si se puede, calcula $|A_x|$, $|A_y|$ y $|A_z|$ y resuelve el sistema.**

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y - z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \\ -2x + z = -1 \end{array}\right\}$$

El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \rightarrow \text{Se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 2$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 1$$

020 **Resuelve este sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer, si es posible.**

$$\left.\begin{array}{r} -2x+y-z+t=4 \\ -x-3y+z-2t=-8 \\ -2y-t=-4 \\ y-2z=-1 \end{array}\right\}$$

El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

$\rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ -8 & -3 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -9 & 1 \\ 0 & -11 & 17 & -2 \\ 0 & -6 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -9 & 1 \\ -11 & 17 & -2 \\ -6 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & -8 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 20 & -3 & 5 \\ -1 & -8 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & -3 & 5 \\ -4 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & -11 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -1 & -11 & -2 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A_t| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -3 & 20 \\ -1 & -3 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 20 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 42$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -\frac{1}{3} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1}{3} \qquad t = \frac{|A_t|}{|A|} = \frac{14}{3}$$

021 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones mediante la regla de Cramer.**

a) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y-3z=0 \\ x-\ y+4z=1 \\ 2x+3y-7z=-1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+\ y-\ z=0 \\ x-\ y+\ z=1 \\ 2x+4y-4z=-1 \end{array}\right\}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = \text{Rango } (A^*) = 2 < \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible indeterminado

Consideremos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 3z \\ x - \quad y = 1 - 4z \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3z & 2 \\ 1-4z & -1 \end{vmatrix} = 5z - 2 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 3z \\ 1 & 1-4z \end{vmatrix} = 3 - 15z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{5z-2}{-5} = \frac{2-5z}{5} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{3-15z}{-5} = \frac{15z-3}{5}$$

La solución es: $x = \dfrac{2-5\lambda}{5}$, $y = \dfrac{15\lambda - 3}{5}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = \text{Rango } (A^*) = 2 < \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x + y = z \\ x - y = 1 - z \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} z & 1 \\ 1-z & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & 1-z \end{vmatrix} = 1 - 2z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{1-2z}{-2} = \frac{2z-1}{2}$$

La solución es: $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{2\lambda - 1}{2}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

022 **Resuelve el sistema utilizando la regla de Cramer.**

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - 3z + 2t = 4 \\ -x - 3y + z - 2t = 0 \\ x - 2y - 2z = 4 \\ 3x + 4y - 4z + 4t = 4 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A) < 4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 4 + 3z - 2t \\ -x - 3y = -z + 2t \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4+3z-2t & 1 \\ -z+2t & -3 \end{vmatrix} = -12 - 8z + 4t \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{12 + 8z - 4t}{5}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 4+3z-2t \\ -1 & -z+2t \end{vmatrix} = 8 + z - 2t \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-8 - z + 2t}{5}$$

La solución es:

$$x = \frac{12 + 8\lambda - 4\mu}{5}, \quad y = \frac{-8 - \lambda + 2\mu}{5}, \quad z = \lambda, \quad t = \mu \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

023 **Resuelve este sistema:** $\left.\begin{array}{r} 5x - y + 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{array}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = \text{Rango } (A^*) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado

La solución es: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

024 **Escribe un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de cuatro ecuaciones y que tenga:**

a) Solución única.

b) Infinitas soluciones.

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z + t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \\ 2x + y - z \quad = 0 \\ y + z + t = 0 \end{array}\right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z + t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \\ x + y \quad = 0 \\ y + z + t = 0 \end{array}\right\}$$

025 **Discute este sistema en función de los valores de *m*.**

$$\left.\begin{array}{r} -x + y - z = -1 \\ 4x - 2y + 2z = 2m \\ -3x - 2y + mz = -4 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & m \end{vmatrix} = 4 - 2m$$

- Si $m \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

- Si $m = 2 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3$$

Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) \rightarrow$ Sistema incompatible

026 **Discute el sistema según los valores de *a*.**

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ay - 3z = 0 \\ 5x + 3y - z = 0 \end{array}\right\}$$

El sistema es homogéneo $\rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) \rightarrow$ Sistema compatible

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7a + 63$$

- Si $a \neq -9 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -9 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2 < \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible indeterminado

027 **Resuelve este sistema en función de los valores de *m*.**

$$\left.\begin{array}{r} -x + y - z = -1 \\ 4x - 2y + 2z = 2m \\ -3x - 2y + mz = -4 \end{array}\right\}$$

Si $m \neq 2 \rightarrow |A| = 4 - 2m \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2m & -2 & 2 \\ -4 & -2 & m \end{vmatrix} = -2m^2 + 6m - 4 = -2(1-m)(2-m)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2m & 2 \\ -3 & -4 & m \end{vmatrix} = -2(m^2 + m - 7) \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2m \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 22 - 10m$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-2(1-m)(2-m)}{4-2m} = -1 + m$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2(m^2+m-7)}{4-2m} = \frac{m^2+m-7}{m-2}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{22-10m}{4-2m} = \frac{5m-11}{m-2}$$

028 **Resuelve el sistema según los valores de *a*.**

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ay - 3z = 0 \\ 5x + 3y - z = 0 \end{array}\right\}$$

- Si $a \neq -9 \rightarrow |A| = 7a + 63 \neq 0$
  Como el sistema es homogéneo la solución es: $x = 0$, $y = 0$, y $z = 0$
- Si $a = -9 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \rightarrow \text{Consideramos el sistema: } \left.\begin{array}{r} 2x - 3y = -z \\ x + 9y = 3z \end{array}\right\}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -z & -3 \\ 3z & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & 3z \end{vmatrix} = 7z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{7z}{21} = \frac{z}{3}$$

La solución es: $x = 0$, $y = \frac{\lambda}{3}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

029 **Resuelve por los métodos clásicos: reducción, igualación o sustitución, los sistemas de ecuaciones y clasifícalos atendiendo a su número de soluciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = 1 \\ -3x + 2y = -11 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 4x - 6y = 10 \\ -6x + 9y = -15 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + 6y = 5 \\ -3x - 9y = 1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = 4 \\ -x - y = 1 \\ 3x + 2y = -5 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 3y + z = 3 \\ 3x + 4y = 11 \\ -2x + 2z = -8 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 3a - 2b = -1 \\ -2a - b = -4 \\ a + 4b = 3 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}2x+5y=1\\ -3x+2y=-11\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l}x=3\\ y=-1\end{array}\right.$

Sistema compatible determinado

b) $\left.\begin{array}{r}4x-6y=\ \ 10\\ -6x+9y=-15\end{array}\right\} \to 2x-3y=5 \to x=\dfrac{5+3\lambda}{2},\quad y=\lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$

Sistema compatible indeterminado

c) $\left.\begin{array}{r}2x+6y=5\\ -3x-9y=1\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}6x+18y=15\\ -6x-18y=2\end{array}\right\}$

Sistema incompatible

d) $\left.\begin{array}{r}2x+5y=4\\ -x-\ \ y=1\\ 3x+2y=-5\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l}x=-3\\ y=2\end{array}\right.$

Sistema compatible determinado

e) $\left.\begin{array}{rrrl} & 3y+ & z= & 3\\ 3x+ & 4y & = & 11\\ -2x & & +2z= & -8\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rl}3y+z= & 3\\ 3x+4y\ \ = & 11\\ x+3y\ \ = & 7\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rl}3y+z= & 3\\ 3x+4y\ \ = & 11\\ -5y\ \ = & -10\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=2\\ z=-3\end{array}\right.$

Sistema compatible determinado

f) $\left.\begin{array}{r}3a-2b=-1\\ -2a-\ \ b=-4\\ a+4b=3\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}6a-4b=-2\\ -6a-3b=-12\\ a+4b=3\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}a=1\\ b=2\\ 1+8\neq 3\end{array}\right\}$

Sistema incompatible

030 **Dado el sistema $\left.\begin{array}{r}x+2y=1\\ 3x-\ \ y=2\end{array}\right\}$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax+by=c$ (distinta que las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.**

(Madrid. Junio 2004. Opción B. Ejercicio 2)

$$\left.\begin{array}{r}x+2y=1\\ 3x-\ \ y=2\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}3x+6y=3\\ -3x+\ \ y=-2\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{7}\\[2mm] y=\dfrac{1}{7}\end{array}\right.$$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r}x+2y=1\\ 3x-\ \ y=2\\ 7x+7y=6\end{array}\right\}$$

031 Resuelve aplicando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{aligned} 2x+3y+5z&=1\\ 4x+7y+13z&=-1\\ 2x+3y+7z&=-3\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x+2y+z&=1\\ x+y-z&=1\\ 2x+3y+z&=1\end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 5x+2y+3z&=5\\ -x+3y-2z&=12\\ x+y+z&=2\end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 3y+z&=3\\ 3x+4y&=11\\ -2x+2z&=-8\end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} x-2y-z&=-1\\ x-y+2z&=2\\ x+2y+z&=3\end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} -p+3q-r&=12\\ 3p+2r&=7\\ 5p-6q+4r&=5\end{aligned}\right\}$

g) $\left.\begin{aligned} 3x-y+2z&=7\\ -x+2y+5z&=-2\\ 3x+4y+19z&=8\end{aligned}\right\}$

h) $\left.\begin{aligned} 2a-4b-c&=-7\\ -3a+2b-3c&=-4\\ -a-3b-8c&=-12\end{aligned}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2&3&5&1\\ 4&7&13&-1\\ 2&3&7&-3\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2&3&5&1\\ 0&1&3&-3\\ 0&0&2&-4\end{array}\right) \to \left.\begin{aligned} 2x+3y+5z&=1\\ y+3z&=-3\\ 2z&=-4\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=1\\ y&=3\\ z&=-2\end{aligned}\right.$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&1\\ 1&1&-1&1\\ 2&3&1&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&1\\ 0&-1&-2&0\\ 0&-1&-1&-1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&1\\ 0&-1&-2&0\\ 0&0&1&-1\end{array}\right)$

$\to \left.\begin{aligned} x+2y+\ z&=1\\ -\ \ y-2z&=0\\ z&=-1\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=-2\\ y&=2\\ z&=-1\end{aligned}\right.$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 5&2&3&5\\ -1&3&-2&12\\ 1&1&1&2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&2\\ -1&3&-2&12\\ 5&2&3&5\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&2\\ 0&4&-1&14\\ 0&-3&-2&-5\end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&2\\ 0&4&-1&14\\ 0&0&-11&22\end{array}\right) \to \left.\begin{aligned} x+\ y+\ z&=2\\ 4y-\ z&=14\\ -11z&=22\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=1\\ y&=3\\ z&=-2\end{aligned}\right.$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0&3&1&3\\ 3&4&0&11\\ -2&0&2&-8\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3&4&0&11\\ 0&3&1&3\\ -2&0&2&-8\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3&4&0&11\\ 0&3&1&3\\ 0&8&6&-2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3&4&0&11\\ 0&3&1&3\\ 0&0&10&-30\end{array}\right)$

$\to \left.\begin{aligned} 3x+4y\qquad&=11\\ 3y+\ z&=3\\ 10z&=-30\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=1\\ y&=2\\ z&=-3\end{aligned}\right.$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&-1&-1\\ 1&-1&2&2\\ 1&2&1&3\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&-1&-1\\ 0&1&3&3\\ 0&4&2&4\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&-1&-1\\ 0&1&3&3\\ 0&0&-10&-8\end{array}\right)$

$\to \left.\begin{aligned} x-2y-\ z&=-1\\ y+\ 3z&=3\\ -10z&=-8\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=1\\ y&=\frac{3}{5}\\ z&=\frac{4}{5}\end{aligned}\right.$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & -6 & 4 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 9 & -1 & 43 \\ 0 & 9 & -1 & 65 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 9 & -1 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{array}\right)$

Sistema incompatible

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 19 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 19 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 10 & 34 & 2 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 5z = -2 \\ 5y + 17z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{12 - 9\lambda}{5} \\ y = \dfrac{1 - 17\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{array}\right. \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -1 & -7 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -8 & -12 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & -1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & 21 & 32 \\ 0 & -10 & -17 & -31 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & 21 & 32 \\ 0 & 0 & 23 & -21 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 3y + 8z = 12 \\ 11y + 21z = 32 \\ 23z = -21 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{123}{23} \\ y = \dfrac{107}{23} \\ z = -\dfrac{21}{23} \end{array}\right.$$

032 **Utiliza el método de Gauss para discutir los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.**

a) $\left.\begin{array}{r} 6x - 3y = 9 \\ -4x + 2y = -6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x - 3y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 4 \\ 2x - 2y + z = 6 \\ 5x - 5y + 4z = 16 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3a + 2b + 2c = 1 \\ 2a + b + c = 0 \\ 3b + 2c = -1 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} -4p + 2q = -8 \\ 6p - 3q = 5 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 3x - 3y = 3 \\ 2x = 0 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 5 \\ 5x + 7y + z = 1 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} 3a + b - c = 2 \\ -2a + 3b + 2c = 5 \\ 11b + 4c = 19 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 9 \\ -4 & 2 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible determinado

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & -5 & 4 & 16 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado

e) $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 6 & -3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible

f) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible determinado

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right)$

Sistema incompatible

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado

033 **Resolver el sistema de ecuaciones lineales:**

$$\left.\begin{array}{r} y - x = z \\ x - z = y \\ y + z = x \end{array}\right\}$$

(Extremadura. Septiembre 2005. Repertorio A. Ejercicio 2)

$$\left.\begin{array}{r} -x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -x + y - z = 0 \\ -2z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

034 **En un sistema hay, entre otras, estas dos ecuaciones:**

$$x + 2y - 3z = 5 \quad \text{y} \quad 2x + 4y - 6z = -2.$$

¿Qué puede decirse de las soluciones del sistema?

(Cataluña. Septiembre 2005. Cuestión 1)

Como los coeficientes de las incógnitas son proporcionales y los términos independientes no lo son, el sistema es incompatible.

035 Dar un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea incompatible.

(Extremadura. Junio 2005. Repertorio B. Ejercicio 1)

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=3\\x-y-z=-1\\2x+y+z=0\end{array}\right\}$$

036 Dado el sistema $\left.\begin{array}{r}2x+2y-z=1\\x+y+2z=1\end{array}\right\}$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$ (distinta que las anteriores) de manera que el sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas resultante sea compatible indeterminado.

(Madrid. Junio 2004. Opción B. Ejercicio 2)

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r}2x+2y-z=1\\x+y+2z=1\\5z=1\end{array}\right\}$$

037 Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r}3x-2y+z=5\\2x-3y+z=4\end{array}\right\}$:

a) Añade una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea incompatible.

b) Añade una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea compatible indeterminado. Resuelve el sistema.

(Cataluña. Junio 2000. Cuestión 3)

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r}3x-2y+z=5\\2x-3y+z=4\\3x-2y+z=1\end{array}\right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r}3x-2y+z=5\\2x-3y+z=4\\x+y=1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}3x-2y+z=5\\x+y=1\\x+y=1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}3x-2y+z=5\\x+y=1\\0=0\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1-\lambda\\y=\lambda\\z=2+5\lambda\end{array}\right.\quad\text{con } \lambda\in\mathbb{R}$$

038 Discute por el método de Gauss el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x+2y+z=2\\-x+3y+z=0\\-x+y+az=1\end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ -1 & 3 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & a & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 5 & 2 & | & 2 \\ 0 & 3 & 1+a & | & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 5 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1-5a & | & -9 \end{pmatrix}$$

- Si $a \neq \frac{1}{5} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 5 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1-5a & | & -9 \end{pmatrix} \to$ Sistema compatible determinado
- Si $a = \frac{1}{5} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 5 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -9 \end{pmatrix} \to$ Sistema incompatible

039 **Resolver el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{array}\right\}$. Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x+y+\alpha z=\beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.**

(Madrid. Junio 2005. Opción B. Ejercicio 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 2 & 1 & -1 & | & 2 \\ 5 & 1 & \alpha & | & \beta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -3 & -7 & | & 0 \\ 0 & -9 & \alpha-15 & | & \beta-5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -3 & -7 & | & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+6 & | & \beta-5 \end{pmatrix}$$

Para que el sistema sea compatible indeterminado debe ocurrir que:

$\alpha+6=0 \to \alpha=-6$

$\beta-5=0 \to \beta=5$

040 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde a y b son números reales, halle los valores de a y b que hacen que las dos matrices conmuten, es decir, que hacen que se cumpla $AB = BA$.**

(Cataluña. Año 2005. Serie 4. Cuestión 1)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \to \left.\begin{array}{c} 1=1 \\ a+b=a+b \\ 0=0 \\ 1=1 \end{array}\right\}$$

Los productos son iguales para cualquier valor de a y de b.

041 **Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$.**

¿Qué condiciones han de cumplir x, y y z para que las matrices A y B conmuten, es decir, para que $AB = BA$?

(Cantabria. Septiembre 2005. Bloque 2. Opción B)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z & y \\ 3x+4z & 3y \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z & 2z \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \rightarrow \left.\begin{aligned} x+2z &= x+3y \\ y &= 2x+4y \\ 3x+4z &= z \\ 3y &= 2z \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 3y-2z &= 0 \\ 2x+3y \qquad &= 0 \\ 3x \qquad +3z &= 0 \\ 3y-2z &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 2x+3y \qquad &= 0 \\ -9y+6z &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

042 Escribe mediante ecuaciones estos sistemas.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{aligned} 2x+3y+5z &= 3 \\ x+2y-\ z &= -1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} a+4b &= -1 \\ 2a+3b &= 4 \\ a+5b &= 2 \\ -6a+7b &= 5 \end{aligned}\right\}$

043 Escribe en forma matricial estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{aligned} x+2y-3z &= -2 \\ -x-\ y+2z &= 3 \\ 3y-5z &= 0 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} p+q+r-s &= 3 \\ 2p-q+2s &= 5 \\ q+3r-5s &= -1 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x+y-\ z+t-\ v &= -1 \\ 2x-\qquad 3z+\qquad 6v &= 8 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x+y-z &= 3 \\ -x+z &= -7 \\ 2x+y+4z &= 5 \\ 3y-9z &= -1 \end{aligned}\right\}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

044 Escribe en forma matricial, y luego resuelve empleando la matriz inversa.

a) $\left.\begin{array}{r} 4x - y = 18 \\ 3x + 2y = 8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - z = -7 \\ 2x + y - 3z = -26 \\ 4y + 2z = 0 \end{array}\right\}$

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix}$

$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$|A| = 11 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -26 \\ 0 \end{pmatrix}$

$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$|A| = 6 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -26 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \\ z = 8 \end{cases}$

045 Discute los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius.

a) $\left.\begin{array}{r} x+3y-5z=-8 \\ 3x+6y-5z=0 \\ 4x+9y-10z=-8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 8x-6y+2z=-1 \\ 3x+y-z=10 \\ -x+3y-2z=5 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 3a+2b-6c+3d=7 \\ a-b+2c-d=6 \\ 6a-b=3 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} a+5b=7 \\ -2a+2b+3c=-2 \\ -a+3b+2c=1 \\ 4b+c=4 \end{array}\right\}$

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 6 & -5 \\ 4 & 9 & -10 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -8 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 4 & 9 & -10 & -8 \end{array}\right)$

$|A|=0$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=2$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 9 & -8 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \text{Rango }(A^*)=2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

b) $A=\begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$

$|A|=-14\neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
Sistema compatible determinado

c) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$ $\qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=2$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}=110\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A^*)=3$

Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) \rightarrow$ Sistema incompatible

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 12 & 3 & 12 \\ 0 & 8 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Rango $(A^*) = 2$

Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas

Sistema compatible indeterminado

046 **Resuelve, aplicando la regla de Cramer, estos sistemas compatibles determinados.**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 \\ -3x - 2y = -1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3a + 2b + 2c = 1 \\ 2a + b + c = 0 \\ 3b + 2c = -1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2a - 3b = 6 \\ -a + 5b = -3 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} 3x + 5y = 33 + 2z \\ 3x = 19 - y \\ 10 + 3z = x + 2y \end{array}\right\}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 4$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = 3 \qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = -4$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_a| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \qquad |A_c| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = -1 \qquad b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = -5 \qquad c = \dfrac{|A_c|}{|A|} = 7$

c) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_a| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 21$ $\qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = 3$ $\qquad b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = 0$

d) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 26 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 33 & 5 & -2 \\ 19 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 130$ $\quad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 33 & -2 \\ 3 & 19 & 0 \\ 1 & 10 & -3 \end{vmatrix} = 104$ $\quad |A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 33 \\ 3 & 1 & 19 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 26$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = 5$ $\qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = 4$ $\qquad z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = 1$

047 **Resuelve, aplicando la regla de Cramer, estos sistemas compatibles indeterminados.**

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 6 \\ -3x + y - 2z &= -3 \\ 2x - 3y + z &= -3 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y + z + t &= 4 \\ x - y + z &= 1 \\ y - z + t &= 1 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2a - b &= 0 \\ 11a - b - 3c &= 0 \\ a - 2b + c &= 0 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 3p - 3q + 11r &= 0 \\ 4p + 7r &= 0 \\ 5p + 3q + 3r &= 0 \\ -6p - 6q + r &= 0 \end{aligned}\right\}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y &= 6 - z \\ -3x + y &= -3 + 2z \end{aligned}\right\}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 6 - z & 2 \\ -3 + 2z & 1 \end{vmatrix} = 12 - 5z$ $\qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 6 - z \\ -3 & -3 + 2z \end{vmatrix} = 15 - z$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{12 - 5z}{7}$ $\qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{15 - z}{7}$

La solución es: $x = \dfrac{12 - 5\lambda}{7}$, $y = \dfrac{15 - \lambda}{7}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} x+y+z=4-t \\ x-y+z=1 \\ y-z=1-t \end{matrix}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4-t & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1-t & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4-2t \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 2-t$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4-t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-t & -1 \end{vmatrix} = 3-t \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{3-t}{2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4-t \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = 1+t \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1+t}{2}$$

La solución es: $x = 2-\lambda,\quad y = \dfrac{3-\lambda}{2},\quad z = \dfrac{1+\lambda}{2},\quad t = \lambda$ con $\lambda = \mathbb{R}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 11 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 11 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} 2a-b=0 \\ 11a-b=3c \end{matrix}\right\}$$

$|A_a| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3c & -1 \end{vmatrix} = 3c \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 3c \end{vmatrix} = 6c$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = \dfrac{c}{3} \qquad b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = \dfrac{2c}{3}$

La solución es: $a = \dfrac{\lambda}{3},\quad b = \dfrac{2\lambda}{3},\quad c = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ -6 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} 3p-3q=-11r \\ 4p=-7r \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} p = -\dfrac{7}{4}\lambda \\ q = \dfrac{23}{12}\lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ r = \lambda \end{cases}$$

048 Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\left.\begin{aligned} x+2y+z&=3\\ x+y-3z&=3\\ 2x+3y+z&=3\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x+y+2z&=3\\ 2y+3z&=2\\ 3x+y+3z&=7\end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} a+c&=0\\ b-c&=1\\ a+3b+c&=5\end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 5x+4y+2z&=0\\ 2x+3y+z&=0\\ 16x+17y+7z&=0\\ 4x-y+4z&=1\end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} a+c&=0\\ b-c&=1\\ a+3b-2c&=5\end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} 2x-y+t&=0\\ x+2y-z+4t&=-1\\ 3x-4y+z-2t&=1\end{aligned}\right\}$

g) $\left.\begin{aligned} 2x-4y+z&=7\\ -3x+6y-2z&=4\\ 11x-22y+6z&=24\end{aligned}\right\}$

h) $\left.\begin{aligned} 2a-b+c&=7\\ 3a+2b-2c&=1\end{aligned}\right\}$

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&-3\\2&3&1\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\1&1&-3&3\\2&3&1&3\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&-3\\2&3&1\end{vmatrix}=-3\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=\text{Rango }(A^*)=3=\text{n.º de incógnitas}$

Sistema compatible determinado

$|A_x|=\begin{vmatrix}3&2&1\\3&1&-3\\3&3&1\end{vmatrix}=12 \qquad |A_y|=\begin{vmatrix}1&3&1\\1&3&-3\\2&3&1\end{vmatrix}=-12 \qquad |A_z|=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&3\\2&3&3\end{vmatrix}=3$

$x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=-4 \qquad y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=4 \qquad z=\dfrac{|A_z|}{|A|}=-1$

b) $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&3\\3&1&3\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&3\\0&2&3&2\\3&1&3&7\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&2&3\\3&1&3\end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=2\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=2$

$\begin{vmatrix}1&1&3\\0&2&2\\3&1&7\end{vmatrix}=0 \rightarrow \text{Rango }(A^*)=2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned} x+y&=3-2z\\ 2y&=2-3z\end{aligned}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3-2z & 1 \\ 2-3z & 2 \end{vmatrix} = 4 - z \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3-2z \\ 0 & 2-3z \end{vmatrix} = 2 - 3z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{4-z}{2} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{2-3z}{2}$$

La solución es: $x = \dfrac{4-\lambda}{2}$, $y = \dfrac{2-3\lambda}{2}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado

$$|A_a| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad |A_c| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$a = \frac{|A_a|}{|A|} = -\frac{2}{3} \qquad b = \frac{|A_b|}{|A|} = \frac{5}{3} \qquad c = \frac{|A_c|}{|A|} = \frac{2}{3}$$

d) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 16 & 17 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 17 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 16 & 17 & 7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 21 \rightarrow \text{Rango}(A) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 17 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & -13 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ -21y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{21} \\ y = -\dfrac{1}{21} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A^*) = 3 \neq \text{Rango }(A) \rightarrow$ Sistema incompatible

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) = \text{Rango }(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas

Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{l} 2x - y = -t \\ x + 2y = -1 + z - 4t \end{array}\right\}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} -t & -1 \\ -1 + z - 4t & 2 \end{vmatrix} = -1 + z - 6t$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{-1 + \lambda - 6\mu}{5}$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -t \\ 1 & -1 + z - 4t \end{vmatrix} = -2 + 2z - 7t$

$y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{-2 + 2\lambda - 7\mu}{5}$

La solución es: $x = \dfrac{-1 + \lambda - 6\mu}{5}, \quad y = \dfrac{-2 + 2\lambda - 7\mu}{5},$

$z = \lambda, \quad t = \mu \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

g) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 11 & -22 & 6 \end{pmatrix}$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 7 \\ -3 & 6 & -2 & 4 \\ 11 & -22 & 6 & 24 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 11 & -22 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & -2 & 4 \\ 11 & 6 & 24 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 2$

Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x + z = 7 + 4y \\ -3x - 2z = 4 - 6y \end{array}\right\}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 7+4y & 1 \\ 4-6y & -2 \end{vmatrix} = -18 - 2y \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 7+4y \\ -3 & 4-6y \end{vmatrix} = 29$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = 18 + 2\lambda \qquad z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = -29$

La solución es: $x = 18 + 2\lambda,\quad y = \lambda,\quad z = -29$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

h) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2a - b = 7 - c \\ 3a + 2b = 1 + 2c \end{array}\right\}$

$|A_a| = \begin{vmatrix} 7-c & -1 \\ 1+2c & 2 \end{vmatrix} = 15 \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 7-c \\ 3 & 1+2c \end{vmatrix} = 7c - 19$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = \dfrac{15}{7} \qquad b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = \dfrac{7c-19}{7}$

La solución es: $a = \dfrac{15}{7},\quad b = \dfrac{7\lambda - 19}{7},\quad c = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

049 Discute el sistema de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro m.

$$\left.\begin{array}{r}(m-2)x+y=0\\ x+(m-2)y=0\end{array}\right\}$$

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de m.

$$A=\begin{pmatrix} m-2 & 1\\ 1 & m-2\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} m-2 & 1\\ 1 & m-2\end{vmatrix}=m^2-4m+3$$

$$m^2-4m+3=0\rightarrow\begin{cases} m=1\\ m=3\end{cases}$$

- Si $m\in\mathbb{R}-\{1,3\}\rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*)=2=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m=1$ o $m=3\rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*)=1<$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

050 Discute, en función de a, el sistema.

$$\left.\begin{array}{r}ax+ay=a\\ x-ay=1\end{array}\right\}$$

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba B. Cuestión 3)

$$A=\begin{pmatrix} a & a\\ 1 & -a\end{pmatrix}\qquad A^*=\left(\begin{array}{cc|c} a & a & a\\ 1 & -a & 1\end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a\\ 1 & -a\end{vmatrix}=-a^2-a$$

$$-a^2-a=0\rightarrow\begin{cases} a=0\\ a=-1\end{cases}$$

Al ser la última columna de la matriz A^* igual que la primera:

- Si $a\in\mathbb{R}-\{-1,0\}\rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*)=2=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a=-1$ o $a=0\rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*)=1<$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

051 El siguiente sistema de ecuaciones depende de un parámetro p. Discútelo según los valores de p.

$$\left.\begin{array}{r}x+2y+z=p\\ 2x+3y+z=p\\ x+y-pz=p\end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -p \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & p \\ 2 & 3 & 1 & p \\ 1 & 1 & -p & p \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -p \end{vmatrix} = p \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & p \\ 2 & 3 & p \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = -p$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $p \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $p = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

052 Discute el sistema según los valores de a.

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 2 \\ 5x + 2y + 4z &= -1 \\ 3x + y + a^2z &= 3a \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & a^2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & a^2 & 3a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = 1 - a^2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3a \end{vmatrix} = -3a - 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = -1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

053 Discute este sistema para los distintos valores de k.

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ 2x + y &= 5 \\ 4x - 3y &= k \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & k \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & k \end{vmatrix} = 5k - 65$$

- Si $k \neq 13 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $k = 13 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

054 **Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro *p*.**

$$\left.\begin{aligned} px + (p+1)z &= p \\ py + z &= p \\ y + pz &= p \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & p+1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 1 & p \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} p & 0 & p+1 & p \\ 0 & p & 1 & p \\ 0 & 1 & p & p \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} p & 0 & p+1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 1 & p \end{vmatrix} = p(p^2 - 1) \qquad \begin{vmatrix} p & 0 & p \\ 0 & p & p \\ 0 & 1 & p \end{vmatrix} = p(p^2 - p) = p^2(p-1)$$

- Si $p \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $p = -1$, como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible
- Si $p = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado
- Si $p = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

055 **¿Qué valores debe tomar *a* en el siguiente sistema de ecuaciones lineales para que sea incompatible?**

$$\left.\begin{aligned} x + (a-1)y + z &= 1 \\ 3x + ay + az &= 3 \end{aligned}\right\}$$

¿Y para que sea compatible?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 3 & a & a \end{pmatrix}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 1 & 1 \\ 3 & a & a & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 3 - 2a \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a - 3$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas para cualquier valor de a
Sistema compatible indeterminado para cualquier valor de a

056 Clasifica el siguiente sistema para los distintos valores del parámetro p.

$$\left.\begin{aligned} a + pb - 2c &= 0 \\ pb + c &= 0 \\ 3a + 2b - c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de p.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & -2 \\ 0 & p & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & p & -2 \\ 0 & p & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8p - 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

- Si $p \neq \frac{1}{4} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $p = \frac{1}{4} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

057 Halla para qué valores del parámetro a este sistema es incompatible.

$$\left.\begin{aligned} (a+1)x + y + z &= a(a+3) \\ x + (a+1)y + z &= a^2(a+3) \\ x + y + (a+1)z &= a^3(a+3) \end{aligned}\right\}$$

¿Qué valor debe tomar a para que sea compatible indeterminado?

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & a(a+3) \\ 1 & a+1 & 1 & a^2(a+3) \\ 1 & 1 & a+1 & a^3(a+3) \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3 + 2 - 3(a+1) = a^3 + 3a^2 = a^2(a+3)$$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & a(a+3) \\ 1 & a+1 & a^2(a+3) \\ 1 & 1 & a^3(a+3) \end{vmatrix} = a(a+3)\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a(a+3)(a^2(a+1)^2 - a^2 - a(a+1)) =$$

$$= a^2(a+3)(a^3 + 2a^2 - a - 1)$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 0\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado
- Si $a = -3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$
  Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

Luego no hay ningún valor de a para el que el sistema sea incompatible.
Los valores para los que es compatible indeterminado son 0 y -3.

058 **Averigüe si el siguiente sistema puede ser compatible indeterminado para algún valor de *m*.**

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{array}\right\}$$

¿Es incompatible para algún valor de *m*?

(Cataluña. Junio 2006. Cuestión 2)

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 2 - 2m$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

El sistema no es incompatible para ningún valor de m.

059 Discute el sistema de ecuaciones lineales según los valores de b.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=2 \\ x+(1+b)y-bz=2b \\ x+by+(1+b)z=1 \end{array}\right\}$$

(Extremadura. Junio 2006. Repertorio B. Ejercicio 4)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix}=2b^2-2b=2b(b-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1+b & 2b \\ 1 & b & b \end{vmatrix}=-b^2+3b-2=-(b-1)(b-2)$$

- Si $b\in\mathbb{R}-\{0,1\}\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $b=0\rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=2\neq$ Rango $(A^*)=3$
  Sistema incompatible
- Si $b=1\rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=2<$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

060 Discutir la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a.

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=a \\ x+y-z=1 \\ 3x+3y+az=a \end{array}\right\}$$

(País Vasco. Julio 2006. Bloque A. Problema A)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & a & a \end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & a \end{vmatrix}=2a+6 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & a \end{vmatrix}=2a-6$$

- Si $a\neq -3\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a=-3\rightarrow\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=2\neq$ Rango $(A^*)=3$
  Sistema incompatible

061 Estudie, según los valores del parámetro a, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left.\begin{aligned} ax + ay &= a \\ x - y + az &= a \\ x + 2y + 3z &= a \end{aligned}\right\}$$

(Murcia. Junio 2006. Bloque 1. Cuestión A)

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a & a & 0 & a \\ 1 & -1 & a & a \\ 1 & 2 & 3 & a \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -a(a+6) \qquad \begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = -3a(a-1)$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-6, 0\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -6 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

062 a) El siguiente sistema es compatible y determinado.

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 4y + 3z &= 2 \\ x + 2y &= 1 \\ x + 3y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Calcula su solución.

b) Considera ahora el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 4y + az &= 2 \\ x + 2y &= 1 \\ x + ay + 2z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

- ¿Es posible encontrar valores para a tales que el sistema sea incompatible? En caso afirmativo, indica cuáles. Justifica tu respuesta.
- ¿Es posible encontrar valores para a tales que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

(Cantabria. Junio 2004. Bloque 1. Opción B)

a) $$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = -\frac{3}{5} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{4}{5} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = -\frac{2}{5}$$

Comprobamos con la última ecuación: $-\frac{3}{5}+3\cdot\frac{4}{5}+2\left(-\frac{2}{5}\right)=1$

Por tanto, la solución es: $x=-\frac{3}{5},\quad y=\frac{4}{5},\quad z=-\frac{2}{5}$

b) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & a\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & a & 2\end{pmatrix}\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & a & 2\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & a & 2 & 1\end{array}\right)$

$\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & a\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=3a-4\qquad \begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & a & 2\end{vmatrix}=a-8$

Rango $(A)=3$ para cualquier valor de a

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & a & 2\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & a & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & a & 2\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 1+a & 3 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4 & a & 2\\ 3 & 1 & 2\\ 1+a & 3 & 2\end{vmatrix}=6a-2a^2$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{0,3\}\rightarrow$ Rango $(A^*)=4\neq$ Rango $(A)=3\rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a=0$ o $a=3\rightarrow$ Rango $(A^*)=$ Rango $(A)=3$
  Sistema compatible determinado

Por tanto no hay valores para los que el sistema sea compatible indeterminado.

063 **Clasificar el siguiente sistema según los distintos valores de los parámetros *a* y *b*.**

$$\left.\begin{aligned}x-y-z&=b\\ -x+y&=2\\ x+ay+2z&=-2\end{aligned}\right\}$$

(Murcia. Junio 2008. Bloque 1. Cuestión B)

$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & a & 2\end{pmatrix}\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & b\\ -1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & a & 2 & -2\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & a & 2\end{vmatrix}=a+1\qquad \begin{vmatrix}1 & -1 & b\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=-2b-4$

- Si $a\neq-1$ y para cualquier valor de b:
  Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a=-1$ y $b\neq-2\rightarrow\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq0\rightarrow$ Rango $(A)=2\neq$ Rango $(A^*)=3$
  Sistema incompatible
- Si $a=-1$ y $b=-2\rightarrow\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq0\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=2$
  Sistema compatible indeterminado

064 Discute este sistema y resuélvelo cuando $m = 6$.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ x - 2y + mz = m \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & m & m \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = m - 7 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = m$$

- Si $m \neq 7 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = 7 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible
- Si $m = 6 \rightarrow |A| = -1$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -18 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 12 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 18 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -12 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = -6$$

065 Se considera el sistema $\left.\begin{array}{r} x + y + az = 4 \\ ax + y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{array}\right\}$, donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del valor de a.

b) Resolver el sistema para $a = 1$.

(Castilla y León. Septiembre 2007. Prueba A. Problema 1)

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 4 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2a^2 - a - 1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6a - 6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$2a^2 - a - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}, 1\right\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado

- Si $a = -\frac{1}{2} \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} y - z = -x \\ 2y - z = 2 - 2x \end{array}\right\}$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 2-2x & -1 \end{vmatrix} = 2 - x \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -x \\ 2 & 2-2x \end{vmatrix} = 2$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = 2 - x \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 2$$

La solución es: $x = \lambda, \quad y = 2 - \lambda, \quad z = 2$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

066 **Se considera el sistema de ecuaciones:**

$$\left.\begin{array}{r} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 0 \end{array}\right\}$$

a) Discútelo para los distintos valores de m.

b) Resuélvelo para $m = 1$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2004. Bloque 2. Pregunta B)

a) $A = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - m \qquad \begin{vmatrix} m-1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ m & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3m + 1$$

- Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $m = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible
- Si $m = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible

b) Si $m = 1 \rightarrow |A| = -2$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -1 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0$$

067 Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+\alpha y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ \alpha x+y+z=9 \end{array}\right\}$, se pide:

a) Prueba que siempre es compatible, obteniendo los valores de α para los que es indeterminado.

b) Resuelve el ejercicio anterior para $\alpha = 7$.

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 1. Problema 2)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{array}\right)$

Las dos últimas columnas de la matriz ampliada son proporcionales entonces Rango (A) = Rango (A^*) para cualquier α.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 8\alpha + 7 \qquad \alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0 \to \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 7 \end{cases}$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, 7\} \to$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $\alpha = 1 \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$
  Sistema compatible indeterminado
- Si $\alpha = 7 \to \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \to$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$
  Sistema compatible indeterminado

b) Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x+7y=9-z \\ 3x+5y=9-z \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 9-z & 7 \\ 9-z & 5 \end{vmatrix} = 2z - 18 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 9-z \\ 3 & 9-z \end{vmatrix} = 2z - 18$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{2z-18}{-16} = \frac{9-z}{8} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{2z-18}{-16} = \frac{9-z}{8}$$

La solución es: $x = y = \dfrac{9-\lambda}{8}, \quad z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

068 Sea S el sistema de ecuaciones lineales:

$$S = \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x + 4y + 9z = 14 \\ x + 8y + Az = \dfrac{10}{7}A \end{cases}$$

Estudiar la compatibilidad del sistema en función de A. Resolver para $A = 0$.

(País Vasco. Julio 2007. Bloque A. Problema A)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & A \end{pmatrix} \qquad B^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \\ 1 & 8 & A & \frac{10}{7}A \end{array}\right)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & A \end{vmatrix} = 2A - 42 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 14 \\ 1 & 8 & \frac{10}{7}A \end{vmatrix} = \frac{10}{7}(2A - 42)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

- Si $A \neq 21 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado
- Si $A = 21 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $A = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ x + 4y + 9z = 14 \\ x + 8y \quad = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 2y \quad = 4 \\ x + 8y \quad = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 2y \quad = 4 \\ -7x \quad = -16 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{16}{7} \\ y = -\frac{2}{7} \\ z = \frac{10}{7} \end{array}\right.$$

069 **Considere el sistema de ecuaciones:**

$$\left.\begin{array}{r} px + 7y + 8z = 1.370 \\ x + y + z = 200 \\ 7x + py + 8z = 1.395 \end{array}\right\}$$

a) Discútalo en función del parámetro p.

b) Resuelva el sistema para $p = 6$.

(Cataluña. Septiembre 2006. Problema 6)

a) $$A = \begin{pmatrix} p & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & p & 8 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} p & 7 & 8 & 1.370 \\ 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & p & 8 & 1.395 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} p & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & p & 8 \end{vmatrix} = -p^2 + 16p - 63 \qquad \begin{vmatrix} p & 8 & 1.370 \\ 1 & 1 & 200 \\ 7 & 8 & 1.395 \end{vmatrix} = -205p + 1.410$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$-p^2 + 16p - 63 = 0 \rightarrow \begin{cases} p = 7 \\ p = 9 \end{cases}$$

- Si $p \in \mathbb{R} - \{7, 9\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $p = 7$ o $p = 9 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

b) Para $p = 6 \rightarrow |A| = -3$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1.370 & 7 & 8 \\ 200 & 1 & 1 \\ 1.395 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -255 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 85$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 1.370 & 8 \\ 1 & 200 & 1 \\ 7 & 1.395 & 8 \end{vmatrix} = -180 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 60$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 1.370 \\ 1 & 1 & 200 \\ 7 & 6 & 1.395 \end{vmatrix} = -165 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 55$$

070 Discute, según los valores del parámetro m, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} y + mz &= 0 \\ x + z &= 0 \\ mx - y &= m \end{aligned}\right\}$$

Resuélvelo, si es posible, para $m = 0$ y $m = 2$.

(Galicia. Junio 2006. Bloque 1. Opción 2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ m & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & m & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & -1 & 0 & m \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ m & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ m & -1 & m \end{vmatrix} = -m$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $m \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $m = 0 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Resolvemos para $m = 0$: $\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ x + z &= 0 \\ -y &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= -\lambda \\ y &= 0 \\ z &= \lambda \end{aligned}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Para $m = 2$ el sistema es incompatible.

071 Discute el siguiente sistema según el valor del parámetro k y resuélvelo cuando $k = -1$.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= k \\ (1+k)x + y + z &= 2k \\ x + (1+k)y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

(Baleares. Junio 2007. Opción A. Cuestión 1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+k & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 1+k & 1 & 1 & 2k \\ 1 & 1+k & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+k & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 \end{vmatrix} = k^2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1+k & 1 & 2k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - k$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+k & 1 \end{vmatrix} = -k$$

- Si $k \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado
- Si $k = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 1 \neq$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible

Para $k = -1 \rightarrow |A| = 1$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -2 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0$$

072 **Clasifica en función del parámetro el sistema de ecuaciones:**

$$\left.\begin{aligned} ax - 3y - 2z &= 0 \\ -x + (5+a)z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

y resuélvelo, si es posible, para $a = -4$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2006. Bloque 3. Pregunta B)

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de a.

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 5+a \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 5+a \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -3a^2 - 21a - 36$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$-3a^2 - 21a - 36 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = -4 \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-4, -3\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -4$ o $a = -3 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2$
  Sistema compatible indeterminado

Para $a = -4$ consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned} -x &= -z \\ 2x + 3y &= -4z \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

073 Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales y resuélvelo en el caso de que sea compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} ax - y - 4z = 1 \\ x + ay - 2z = -1 \\ y + z = -a \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -4 \\ 1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -4 & 1 \\ 1 & a & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -4 \\ 1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3 \qquad \begin{vmatrix} a & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = 2a^2 - 3a + 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = 1 \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 1\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -3 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $a = 1$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} -y - 4z = 1 - x \\ y + z = -1 \end{array}\right\}$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 - x & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -x - 3 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 1 - x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = x$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-x - 3}{3} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{x}{3}$$

La solución es: $x = \lambda,\ \ y = \dfrac{-\lambda - 3}{3},\ \ z = \dfrac{\lambda}{3}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

074 Estudiar y resolver, cuando sea posible, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = 0 \\ x + y = a \end{array}\right\}$$

(Murcia. Septiembre 2007. BLoque 1. Cuestión A)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - b \qquad \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2$$

- Si $a \neq b \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = b = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1$
  Sistema compatible indeterminado
- Si $a = b \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 1 \neq$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible

Para $a \neq b \rightarrow \left.\begin{array}{r} ax + by = 0 \\ -ax - ay = -a^2 \end{array}\right\} \rightarrow (b - a)y = -a^2 \rightarrow y = -\dfrac{a^2}{b-a} \rightarrow x = \dfrac{ab}{b-a}$

Para $a = b = 0 \rightarrow x + y = 0 \rightarrow y = -x$

La solución es: $x = \lambda, \quad y = -\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

075 **Discute el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo en los casos en que sea posible.**

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = a^2 \\ x - y = -a \\ x + ay + z = a \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 0 & -a \\ 1 & a & 1 & a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ -1 & 0 & -a \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + 2a = -2a(a-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 0$ o $a = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$
  Sistema compatible indeterminado

Para $a = 0$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} y + z = 0 \\ -y = -x \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Para $a = 1$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} y + z = 1 - x \\ -y = -1 - x \end{array}\right\}$

La solución es: $x = \lambda, \quad y = 1 + \lambda, \quad z = -2\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

076 **Discute el sistema y resuélvelo para los valores del parámetro que lo hagan compatible determinado.**

$$\left.\begin{array}{r} mx + 2y + 3z = 0 \\ 2x + my + 2z = 2 \\ 2x + my + 3z = m - 2 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 3 & 0 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & m & 3 & m-2 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} = m^2 - 4 \qquad \begin{vmatrix} m & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 2m^2 - 16m + 24$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

- Si $m = \pm 2 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = -2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $m = 2 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $m = \pm 2 \rightarrow |A| = m^2 - 4$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ m-2 & m & 3 \end{vmatrix} = -3m^2 + 16m - 20$$

$$\rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-3m^2 + 16m - 20}{m^2 - 4} = \frac{-3m + 10}{m + 2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} m & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & 3 \end{vmatrix} = -2m^2 + 16m - 24$$

$$\rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2m^2 + 16m - 24}{m^2 - 4} = \frac{-2m + 12}{m + 2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} m & 2 & 0 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & m-2 \end{vmatrix} = m^3 - 4m^2 - 4m + 16$$

$$\rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{m^3 - 4m^2 - 4m + 16}{m^2 - 4} = m - 4$$

Para $m = 2$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x + 2z = 2 - 2y \\ 2x + 3z = -2y \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2-2y & 2 \\ -2y & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2y \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 2-2y \\ 2 & -2y \end{vmatrix} = -4$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 3 - y \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = -2$$

La solución es: $x = 3 - \lambda, \quad y = \lambda, \quad z = -2$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

077 **Resuelve para los valores del parámetro que lo hacen compatible determinado.**

$$\left.\begin{array}{r} ax - z = a \\ ay + 2z = 0 \\ 3x + y + z = 5 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + a$$

Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
Sistema compatible determinado

$$|A_x| = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{a^2 + 3a}{a^2 + a} = \frac{a+3}{a+1}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & a & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -4a \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-4a}{a^2 + a} = \frac{-4}{a+1}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2a^2 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{2a^2}{a^2 + a} = \frac{2a}{a+1}$$

078 **Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro α y resolverlo en los casos que sea posible.**

$$\left.\begin{aligned} 6x + 2y + 2z &= 6 \\ \alpha x + 2y + z &= \alpha \\ 5x + 3y + \alpha z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

(Canarias. Junio 2008. Bloque 3. Opción A)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 5 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & 6 \\ \alpha & 2 & 1 & \alpha \\ 5 & 3 & \alpha & 5 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 5 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = -2\alpha^2 + 18\alpha - 28$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$-2\alpha^2 + 18\alpha - 28 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = 7 \end{cases}$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{2, 7\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $\alpha = 2$ o $\alpha = 7 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2$
  Sistema compatible indeterminado

Para $\alpha \in \mathbb{R} - \{2, 7\}$:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 5 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = -2\alpha^2 + 18\alpha - 28 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 2 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 5 & 5 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 0$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 6 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0$$

Para $\alpha = 2$ consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned} 2y + 2z &= 6 - 6x \\ 2y + z &= 2 - 2x \end{aligned}\right\}$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6-6x & 2 \\ 2-2x & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2x \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 6-6x \\ 2 & 2-2x \end{vmatrix} = 8x - 8$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{2-2x}{-2} = x - 1 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{8x-8}{-2} = 4 - 4x$$

La solución es: $x = \lambda$, $y = \lambda - 1$, $z = 4 - 4\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Para $\alpha = 7$ consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned} 2y + 2z &= 6 - 6x \\ 2y + z &= 7 - 7x \end{aligned}\right\}$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6-6x & 2 \\ 7-7x & 1 \end{vmatrix} = 8x - 8 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 6-6x \\ 2 & 7-7x \end{vmatrix} = 2 - 2x$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{8x-8}{-2} = 4 - 4x \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{2-2x}{-2} = x - 1$$

La solución es: $x = \lambda$, $y = 4 - 4\lambda$, $z = \lambda - 1$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

079 Considerar el sistema lineal de ecuaciones en x, y y z.

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ mx + 2z &= 0 \\ my - z &= m \end{aligned}\right\}$$

a) Determinar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene solución única. Calcular dicha solución para $m = 1$.

b) Determinar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene infinitas soluciones. Calcular dichas soluciones.

c) Estudiar si existe algún valor de m para el cual el sistema no tiene solución.

(Aragón. Junio 2007. Opción A. Cuestión 1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = m^2 + m \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & -1 & m \end{vmatrix} = -4m$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

a) Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
Sistema compatible determinado

Para $m = 1 \rightarrow |A| = 2$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = -2 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = 2 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 1$$

b) Si $m = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $m = 0$ consideramos: $\left.\begin{array}{r} 3y + z = 5 - x \\ 2z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

c) Si $m = -1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

080 **Discútase, en función del parámetro real k, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:**

$$\left.\begin{array}{r} kx + 3y = 0 \\ 3x + 2y = k \\ 3x + ky = 0 \end{array}\right\}$$

Resuélvase el sistema cuando sea posible.

(Castilla y León. Septiembre 2006. Prueba B. Problema 1)

$$A = \begin{pmatrix} k & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} k & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2k - 9 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & k \end{vmatrix} = 3k - 6 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2 \text{ para cualquier valor de } k$$

$$\begin{vmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{vmatrix} = -k(k^2 - 9)$$

- Si $k \in \mathbb{R} - \{-3, 0, 3\} \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $k = -3$, $k = 0$ o $k = 3 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

Para $k = -3$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = -3 \\ 3x - 3y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{5} \\ y = -\dfrac{3}{5} \end{array}\right.$

Para $k = 0$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 0 \\ 3x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$

Para $k = 3$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 3 \\ 3x + 3y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -3 \end{array}\right.$

081 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x + (k+1)y + 2z &= -1 \\ kx + y + z &= k \\ (k-1)x - 2y - z &= k+1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

b) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

(Madrid. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 3)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ k-1 & -2 & -1 & k+1 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2k^2 - 5k + 2$ $\qquad \begin{vmatrix} k+1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ -2 & -1 & k+1 \end{vmatrix} = 2k^2 - 3k - 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$2k^2 - 5k + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

- Si $k \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}, 2\right\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $k = \dfrac{1}{2} \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $k = 2 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) Para $k = 2$ consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned} y + z &= 2 - 2x \\ -2y - z &= 3 - x \end{aligned}\right\}$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 2-2x & 1 \\ 3-x & -1 \end{vmatrix} = 3x - 5$ $\qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2-2x \\ -2 & 3-x \end{vmatrix} = 7 - 5x$

$y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = 3x - 5$ $\qquad z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = 7 - 5x$

La solución es: $x = \lambda, \quad y = 3\lambda - 5, \quad z = 7 - 5\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

082 Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$$\left.\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ x + (a^2 - a - 1)y &= -1 \\ x + (a^2 - a - 1)y + (a-2)z &= 1 - a^2 \end{aligned}\right\}$$

(Navarra. Junio 2008. Grupo 1. Opción A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & a^2-a-1 & 0 \\ 1 & a^2-a-1 & a-2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a^2-a-1 & 0 & -1 \\ 1 & a^2-a-1 & a-2 & 1-a^2 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & a^2-a-1 & 0 \\ 1 & a^2-a-1 & a-2 \end{vmatrix} = a(a-2)(a-1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & a-2 & 1-a^2 \end{vmatrix} = -a(a-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{1, 0, 2\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 0$ o $a = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$
  Sistema compatible indeterminado

Para $a \in \mathbb{R} - \{1, 0, 2\}$:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & a^2-a-1 & 0 \\ 1-a^2 & a^2-a-1 & a-2 \end{vmatrix} = a(a-1)(3-a^2) \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{(3-a^2)}{(a-2)}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1-a^2 & a-2 \end{vmatrix} = a(a-1) \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{a(a-1)}{a(a-2)(a-1)} = \frac{1}{(a-2)}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & a^2-a-1 & -1 \\ 1 & a^2-a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix} = a(a-1)(2-a^2)$$

$$\rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{a(a-1)(2-a^2)}{a(a-2)(a-1)} = \frac{(2-a^2)}{(a-2)}$$

Para $a = 0$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x - z = y \\ x = y - 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda - 1 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Para $a = 1$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x - z = y \\ x = y - 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda - 1 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

083 **Dado el sistema** $\left.\begin{array}{r} x + 3y - az = 4 \\ -ax + y + az = 0 \\ -x + 2ay = a + 2 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{array}\right\}$ **discutirlo según los valores de a, y resolverlo cuando sea compatible.**

(Aragón. Junio 2008. Bloque 1. Opción B)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a \\ -a & 1 & a \\ -1 & 2a & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -a & 4 \\ -a & 1 & a & 0 \\ -1 & 2a & 0 & a+2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -a \\ -a & 1 & a \\ -1 & 2a & 0 \end{vmatrix} = 2a(a-2)(a+1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -a \\ -a & 1 & a \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -(a-2)(a-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ -a & 1 & a & 0 \\ -1 & 2a & 0 & a+2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (a-2)^2(a+3) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & a+2 \end{vmatrix} = (a-2)(-5a-3)$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 2\} \rightarrow$ Rango $(A) = 3 \neq$ Rango $(A^*) = 4 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = -3 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 2 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $a = -3$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x + 3y + 3z = 4 \\ 3x + y - 3z = 0 \\ -x - 6y = -1 \end{array}\right\}$

$|A| = -60$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -60 \qquad x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = 0$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -60 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 1$$

Para $a = 2$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 4 + 2z \\ 2x - y = 2z \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4+2z & 3 \\ 2z & -1 \end{vmatrix} = -4 - 8z \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4+2z \\ 2 & 2z \end{vmatrix} = -8 - 2z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{4+8z}{7} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{8+2z}{7}$$

La solución es: $x = \dfrac{4+8\lambda}{7}, \quad y = \dfrac{8+2\lambda}{7}, \quad z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

084 **Discutir, según los valores que adopte el parámetro t (un número real), la compatibilidad o incompatibilidad del sistema:**

$$\left.\begin{array}{r} tx + 3y = 2 \\ 3x + 2y = t \\ 2x + ty = 3 \end{array}\right\}$$

Resuélvelo cuando sea posible.

(La Rioja. Junio 2006. Propuesta B. Ejercicio 5)

$$A = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & t \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} t & 3 & 2 \\ 3 & 2 & t \\ 2 & t & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} t & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2t - 9 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & t \end{vmatrix} = 3t - 4 \rightarrow \text{Rango }(A) = 2 \text{ para cualquier valor de } t$$

$$\begin{vmatrix} t & 3 & 2 \\ 3 & 2 & t \\ 2 & t & 3 \end{vmatrix} = -(t+5)(t^2 - 5t + 7)$$

- Si $t \neq -5 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $t = -5 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

Para $t = -5$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} -5x + 3y = 2 \\ 3x + 2y = -5 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \end{array}\right.$

085 Considera el sistema de ecuaciones lineales, donde $m \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + mz = 1 \\ mx + (m-1)y + z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{array}\right\}$$

a) Determina el carácter del sistema según los valores de m.

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible determinado.

c) Modifica solamente un coeficiente de la última ecuación para que el sistema resultante sea compatible para cualquier valor de m.

(Cantabria. Septiembre 2007. Bloque 2. Opción A)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ m & m-1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m+1 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m-1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -m$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & m-1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

b) Si $m \neq 1$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^3 + m^2 + 2m - 1$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-m^3 + m^2 + 2m - 1}{m - 1}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ 1 & m+1 & 1 \end{vmatrix} = m^3 - m \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{m^3 - m}{m - 1} = m(m+1)$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m-1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -m \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-m}{m-1}$$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} x + y + mz &= 1 \\ mx + (m-1)y + z &= m \\ x + y + (m+1)z &= m+1 \end{aligned}\right\} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
Sistema compatible determinado para cualquier valor de m

086 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x - ay &= 2 \\ ax - y &= a + 1 \end{aligned}\right\}$$

Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que $y = 2$.

(Madrid. Junio 2008. Opción A. Ejercicio 1)

$$\text{Si } y = 2 \rightarrow \left.\begin{aligned} x - 2a &= 2 \\ ax - 2 &= a + 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 2 + 2a \rightarrow a(2 + 2a) - 2 = a + 1$$

$$\rightarrow 2a^2 + a - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

087 Considera este sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} mx - y &= 1 \\ x - my &= 2m - 1 \end{aligned}\right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores de m.

b) Calcula los valores de m para los que el sistema tiene una solución en la que $x = 3$.

(Andalucía. Junio 2004. Opción A. Ejercicio 3)

a) $A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m-1 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 1$ $\qquad \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 2m-1 \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1$

- Si $m \neq \pm 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = -1 \rightarrow$ Rango $(A) = 1 \neq$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $m = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

b) Si $x = 3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3m - y = 1 \\ 3 - my = 2m - 1 \end{array}\right\} \rightarrow y = 3m - 1 \rightarrow 3 - m(3m - 1) = 2m - 1$

$$\rightarrow -3m^2 - m + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

088 a) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{array}\right\}$$

b) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

(Madrid. Septiembre 2006. Opción B. Ejercicio 1)

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 3z \\ 2x + 3y = 5 + z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 3z \\ y = 5 - 5z \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -5 + 8\lambda \\ y = 5 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

b) Si $x + y + z = 4 \rightarrow -5 + 8\lambda + 5 - 5\lambda + \lambda = 4 \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

089 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3 \\ x + 3y + 2z = \alpha \end{array}\right\}$$

a) Justificar que, para cualquier valor del parámetro real α, el sistema tiene solución única.

b) Hallar la solución del sistema en función del parámetro α.

c) Determinar el valor de α para el que la solución (x, y, z) del sistema satisface $x + y + z = 1$.

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Bloque 1. Problema 1)

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -50 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas

Sistema compatible determinado para cualquier valor de α

b) $|A_x| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10\alpha - 50 \rightarrow x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{10\alpha - 50}{-50} = \dfrac{5-\alpha}{5}$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = -30\alpha + 30 \rightarrow y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{-30\alpha + 30}{-50} = \dfrac{3\alpha - 3}{5}$

$|A_z| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = 15\alpha - 20 \rightarrow z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{15\alpha - 20}{-50} = \dfrac{4 - 3\alpha}{10}$

c) Si $x + y + z = 1 \rightarrow \dfrac{5-\alpha}{5} + \dfrac{3\alpha - 3}{5} + \dfrac{4 - 3\alpha}{10} = 1 \rightarrow \alpha = 2 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \\ z = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$

090 **Demuestra que para que el sistema siguiente sea compatible tiene que suceder que: $c = a + b$.**

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= a \\ 2x + z &= b \\ 4x - y + 2z &= c \end{aligned}\right\}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & b \\ 4 & -1 & 2 & c \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 2 & 0 & b \\ 4 & -1 & c \end{vmatrix} = -2a - 2b + 2c$

El rango de la matriz A es 2. Para que el sistema sea compatible el rango de la matriz A^* también tiene que ser igual a 2. Para ello:

$$-2a - 2b + 2c = 0 \rightarrow c = a + b$$

091 **Los sistemas:** $\left.\begin{aligned} ax + y + bz &= -4 \\ bx + ay + cz &= -9 \\ cx + by + az &= -11 \end{aligned}\right\}$ **y** $\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ x + z &= -1 \\ x - z &= 3 \end{aligned}\right\}$ **son equivalentes.**

Hallar a, b y c.

(Murcia. Septiembre 2005. Bloque 1. Cuestión 1)

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ x + z &= -1 \\ x - z &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ x + z &= -1 \\ 2x &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases}$$

Si los sistemas son equivalentes entonces tienen la misma solución. Así:

$$\left.\begin{array}{r} a-3-2b=-4 \\ b-3a-2c=-9 \\ c-3b-2a=-11 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a-2b=-1 \\ -3a+b-2c=-9 \\ -2a-3b+c=-11 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & -9 \\ -2 & -3 & 1 & -11 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -3 & 1 & -11 \\ -3 & 1 & -2 & -9 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -3 & 1 & -11 \\ -7 & -5 & 0 & -31 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -3 & 1 & -11 \\ -7 & -5 & 0 & -31 \\ 0 & -19 & 0 & -38 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -2a-3b+c=-11 \\ -7a-5b=-31 \\ -19b=-38 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{array}\right.$$

092 Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Discutirlo según los valores del parámetro real λ.

b) Resolverlo para $\lambda = -3$.

c) Resolverlo para $\lambda = 1$.

(Madrid. Junio 2001. Opción B. Ejercicio 3)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 2\lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+\lambda & 3+\lambda & 3+\lambda & 3+\lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3+\lambda)\begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(3+\lambda)(1-\lambda)(\lambda-1)^2 = (3+\lambda)(\lambda-1)^3$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{-3, 1\} \rightarrow$ Rango $(A^*) = 4 \neq$ Rango $(A) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

- Si $\lambda = -3 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $\lambda = 1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 1 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) Para $\lambda = -3$ consideramos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= -3 \\ x + y - 3z &= 1 \\ x - 3y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= -3 \\ 4z &= -4 \\ 4y &= -4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

c) Para $\lambda = 1$ el sistema se reduce a:

$$x + y + z = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 - a - b \\ y = a \\ z = b \end{cases} \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

093 **Dado el sistema de ecuaciones:**

$$S = \begin{cases} x + 2y + z = A \\ x + y + z = B \\ x + y - z = C \end{cases}$$

Demostrar que es compatible determinado para cualquier valor de *A*, *B* y *C* y encontrar la solución en función de dichos valores.

(País Vasco. Septiembre 2003. Bloque A. Problema A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & A \\ 1 & 1 & 1 & B \\ 1 & 1 & -1 & C \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = \text{Rango } (A^*) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado para cualquier valor de A, B y C

$$|A_x| = \begin{vmatrix} A & 2 & 1 \\ B & 1 & 1 \\ C & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2A + 3B + C \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-2A + 3B + C}{2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & A & 1 \\ 1 & B & 1 \\ 1 & C & -1 \end{vmatrix} = 2A - 2B \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = A - B$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & A \\ 1 & 1 & B \\ 1 & 1 & C \end{vmatrix} = B - C \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{B - C}{2}$$

094 **En un supermercado se venden huevos de categorías *XL*, *L* y *M*. Averigua el precio de una docena de cada tipo de huevos sabiendo que:**

- **Carmen compró una docena de cada categoría y pagó 4,90 €.**
- **Jesús pagó 9,60 € por 2 docenas *XL* y 4 docenas *M*.**
- **Esther se llevó 3 docenas *L* y 3 *M* y pagó 9,30 €.**

Sean x, y, z los precios de cada docena de huevos de categorías *XL*, *L* y *M*, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=4{,}9 \\ 2x+4z=9{,}6 \\ 3y+3z=9{,}3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=4{,}9 \\ -2y+2z=-0{,}2 \\ y+z=3{,}1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=4{,}9 \\ -2y+2z=-0{,}2 \\ 4z=6 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=1{,}8 \\ y=1{,}6 \\ z=1{,}5 \end{array}\right.$$

Así, la docena de huevos *XL* cuesta 1,80 €, la de categoría *L* vale 1,60 € y la de *M* 1,50 €.

095 **El bloque de pisos en el que vivo ha estado de obras. El administrador de la comunidad está tratando de descubrir cuánto cobran a la hora un electricista, un fontanero y un albañil. Sabe que:**

- **En el 4.º A el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas y tuvieron que pagar 78 € de mano de obra.**
- **En el 3.º D pagaron 85 € por las 2 horas que estuvo el fontanero y la hora que estuvo el albañil.**
- **En mi casa estuvieron 1 hora el fontanero, 1 hora el electricista y 3 horas el albañil y nos cobraron 133 €.**

¿Cuánto cobra por hora cada profesional?

Sean x, y, z los precios por hora de trabajo del electricista, el fontanero y el albañil, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+2z=78 \\ 2y+z=85 \\ x+y+3z=133 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+3z=133 \\ 2y+z=85 \\ x+2z=78 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+3z=133 \\ 2y+z=85 \\ -y-z=-55 \end{array}\right\}$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+y+3z=133 \\ 2y+z=85 \\ y=30 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=28 \\ y=30 \\ z=25 \end{array}\right.$$

El electricista cobra 28 €, el fontanero 30 € y el albañil 25 €.

096 **Tengo ahorradas 20 monedas por un valor total de 29,50 €. Hay cuatro veces más monedas de 2 € que de 1 €. También hay monedas de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas hay en total?**

Sean x, y, z las monedas de 2 €, 1 € y 50 céntimos que tengo ahorradas, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 2x+y+0{,}5z=29{,}5 \\ x=4y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 20x+10y+5z=295 \\ x-4y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 15x+5y=195 \\ x-4y=0 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 15x+5y=195 \\ 65y=195 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=12 \\ y=3 \\ z=5 \end{array}\right.$$

Hay 12 monedas de 2 €, 3 de 1 € y 5 de 50 céntimos.

097 **Pilar compra 200 acciones de la empresa *A*, 150 de *B* y 100 de *C* y paga 3.300 € mientras que Juan gasta 3.750 € por la compra de 50 acciones de *A*, 120 de *B* y 240 de *C*. Con estos datos, ¿es posible saber el precio de cada acción? ¿Y si cada acción tiene un precio entero comprendido entre 1 € y 12 €, ambos incluidos?**

Sean x, y, z los precios de las acciones de las empresas *A*, *B* y *C*, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 200x+150y+100z=3.300 \\ 50x+120y+240z=3.750 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 200 & 150 \\ 50 & 120 \end{vmatrix} = 16.500 \neq 0$$

Los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, como el sistema tiene 3 incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

Es decir, el sistema tiene infinitas soluciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} 200x+150y+100z=3.300 \\ 50x+120y+240z=3.750 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=66 \\ 5x+12y+24z=375 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=66 \\ 33y+86z=1.170 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{16\lambda-111}{11} \\ y=\dfrac{1.170-86\lambda}{33} \\ z=\lambda \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Con los datos no es posible determinar los precios de las acciones.

Si las acciones tienen un precio entero, el valor de la acción de la empresa *C* solo puede ser de 9 €, así las acciones de la empresa *A* valen 3 € y las de *B* 12 €.

098 **El encargado de un almacén de electrodomésticos desea conocer lo que pesan un frigorífico y una lavadora. Como no tiene báscula requiere ciertas informaciones a otros empleados:**

- **Sr. Moreno: un frigorífico y una lavadora juntos pesan 120 kg.**
- **Sr. Arce: el otro día llevé en el camión 3 frigoríficos y 4 lavadoras. La camioneta vacía pesa 1.250 kg y con la carga pesaba 1.550 kg.**
- **Sr. Puente: yo llevé 4 frigoríficos y 5 lavadoras y todo pesaba 480 kg.**

Realiza los cálculos para determinar los pesos. ¿Qué sucede? Busca alguna explicación de esos resultados.

Sea x el peso de un frigorífico y sea y el de una lavadora.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ 3x+4y=1.550-1.250 \\ 4x+5y=480 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ 3x+4y=300 \\ 4x+5y=480 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 120 \\ 3 & 4 & 300 \\ 4 & 5 & 480 \end{vmatrix} = 60 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A^*)=3 \neq \text{Rango }(A)=2 \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

El sistema no tiene solución, por tanto los datos recogidos no pueden ser correctos.

099 **Cuando en el año 1800 Beethoven escribe su primera sinfonía, su edad es diez veces mayor que la del jovencito Franz Schubert. Pasa el tiempo y es Schubert el que compone su célebre *Sinfonía Incompleta*. Entonces la suma de las edades de ambos músicos es igual a 77 años. Cinco años después muere Beethoven y en ese momento Schubert tiene los mismos años que tenía Beethoven cuando compuso su primera sinfonía.**

Determinar el año de nacimiento de cada uno de estos dos compositores.

(Aragón. Junio 2004. Opción A. Cuestión 1)

Sean x e y los años de nacimiento de Beethoven y Schubert, respectivamente, y sea z el año en que se compuso la Sinfonía completa.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 1.800-x=10(1.800-y) \\ (z-y)+(z-x)=77 \\ z+5-y=1.800-x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+10y=16.200 \\ -x-y+2z=77 \\ x-y+z=1.795 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=1.795 \\ -x-y+2z=77 \\ -x+10y=16.200 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=1.795 \\ -3x+y=-3.513 \\ -x+10y=16.200 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=1.795 \\ -3x+y=-3.513 \\ 29x=51.330 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1.770 \\ y=1.797 \\ z=1.822 \end{array}\right.$$

Así, Beethoven nació en el año 1770 y Schubert en el 1797.

100 **La liga de fútbol de un cierto país la juegan 21 equipos a doble vuelta. Este año, los partidos ganados valían 3 puntos, los empatados 1 punto y los perdidos 0 puntos. En estas condiciones, el equipo campeón de liga obtuvo 70 puntos.**

Hasta el año pasado los partidos ganados valían 2 puntos y el resto, igual. Con el sistema antiguo, el actual campeón hubiera obtenido 50 puntos.

¿Cuántos partidos ganó, empató y perdió el equipo campeón?

(Aragón. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 1)

Sean x, y, z los partidos ganados, empatados y perdidos por el equipo, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=40 \\ 3x+y=70 \\ 2x+y=50 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=40 \\ 3x+y=70 \\ -x=-20 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=20 \\ y=10 \\ z=10 \end{array}\right.$$

El equipo ganó 20 partidos, empató 10 y perdió otros 10.

101 **Las edades, en años, de un niño, su padre y su abuelo verifican las siguientes condiciones:**

- **La edad del padre es α veces la de su hijo.**
- **El doble de la edad del abuelo más la edad del niño y más la del padre es de 182 años.**
- **El doble de la edad del niño más la del abuelo es 100.**

a) Establece las edades de los tres suponiendo que $\alpha = 2$.

b) Para $\alpha = 3$, ¿qué ocurre con el problema planteado?

c) Siguiendo con $\alpha = 3$, ¿qué ocurre si en la segunda condición la suma es de 200 en vez de 182?

(Asturias. Junio 2004. Bloque 2)

Sean x, y, z las edades del niño, del padre y del abuelo, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} y=\alpha x \\ 2z+x+y=182 \\ 2x+z=100 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha x-y=0 \\ x+y+2z=182 \\ 2x+z=100 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+2z=182 \\ \alpha x-y=0 \\ 2x+z=100 \end{array}\right\}$$

a) Si $\alpha = 2 \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 182 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 100 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 18 \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 182 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 100 & 1 \end{vmatrix} = 36 \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 182 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 100 \end{vmatrix} = 64$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 18 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = 36 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 64$$

El hijo tiene 18 años, el padre 36 y el abuelo 64.

b) Si $\alpha = 3 \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 182 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 100 \end{vmatrix} = -36 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A^*) = 3 \neq \text{Rango }(A) = 2$$

Sistema incompatible

c) $\left.\begin{array}{r} y = 3x \\ 2z + x + y = 200 \\ 2x + z = 100 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x - y = 0 \\ x + y + 2z = 200 \\ 2x + z = 100 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 200 \\ 3x - y = 0 \\ 2x + z = 100 \end{array}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 100 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango }(A^*) = 2 = \text{Rango }(A) < \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible indeterminado

102 **En una caja hay monedas de tres tipos: de 2 €, de 1 € y de 50 céntimos.**

Se sabe que, en total, hay 33 monedas y el valor conjunto de todas ellas es de 40 €. ¿Se puede determinar el número de cada tipo de monedas?

Si la respuesta es afirmativa, encuentra el número de cada uno de los tipos de moneda.

Si la respuesta es negativa, encuentra, al menos, dos conjuntos diferentes de 33 monedas de los tipos descritos y de manera que el valor total sea de 40.

(País Vasco. Junio 2002. Bloque E. Cuestión E)

Sean x, y, z el número de monedas de 2 €, 1 € y 50 céntimos que hay en la caja, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 33 \\ 2x + y + 0{,}5z = 40 \end{array}\right\}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, como el sistema tiene 3 incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Es decir, el sistema tiene infinitas soluciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 33 \\ 2x + y + 0{,}5z = 40 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 33 \\ -x + 0{,}5z = -7 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7 + 0{,}5\lambda \\ y = 26 - 1{,}5\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Respuesta abierta: dos soluciones posibles son 8 monedas de 2 €, 23 de 1 € y 2 de 50 céntimos, o bien, 9 monedas de 2 €, 20 de 1 € y 4 de 50 céntimos.

103 De tres números, x, y, z, sabemos lo siguiente: que el primero más el segundo suman 0; que el primero más el tercero suman 1; que la suma de los tres es 0 y, para terminar, que el primero multiplicado por un número k más el doble de la suma del segundo y el tercero da 1.

a) ¿Qué puede decirse del valor de k?

b) ¿Cuánto valen esos tres números?

(Cataluña. Año 2005. Serie 4. Problema 5)

$$\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x+z=1 \\ x+y+z=0 \\ kx+2(y+z)=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x+z=1 \\ x+y+z=0 \\ kx+2y+2z=1 \end{array}\right\}$$

Considerando las tres primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x+z=1 \\ z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ z=0 \end{array}\right.$$

Si sustituimos en la última ecuación: $k-2=1 \rightarrow k=3$

Por tanto, si $k=3$ el sistema es compatible determinado y los números son: $1, -1$ y 0

Si $k \neq 3$ el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

104 En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- Alimento Migato: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura.
- Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura.
- Alimento Comecat: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura.

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

(C. Valenciana. Septiembre 2005. Ejercicio B. Problema 1)

Sean x, y, z los porcentajes de carne, pescado y verdura que se encuentran en los alimentos, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 600x+300y+200z=470 \\ 300x+400y+600z=370 \\ 100x+300y+200z=160 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 60x+30y+20z=47 \\ 30x+40y+60z=37 \\ 5x+15y+10z=8 \end{array}\right\}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 40 & 60 \\ 5 & 15 & 10 \end{vmatrix} = -25.000 \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 47 & 30 & 20 \\ 37 & 40 & 60 \\ 8 & 15 & 10 \end{vmatrix} = -15.500 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 0{,}62$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 60 & 47 & 20 \\ 30 & 37 & 60 \\ 5 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -5.500 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 0,22$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 60 & 30 & 47 \\ 30 & 40 & 37 \\ 5 & 15 & 8 \end{vmatrix} = -4.000 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0,16$$

Los porcentajes son: 62 %, 22 % y 16 %.

105 **Luis, Juan y Óscar son tres amigos. Luis le dice a Juan: Si te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad. Calcular lo que tiene cada uno ellos sabiendo que entre los tres reúnen 60 €.**

(Aragón. Junio 2003. Opción A. Cuestión 1)

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ \dfrac{x}{3} + y = x - \dfrac{x}{3} \\ \dfrac{x}{3} + y - z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 10 \\ z = 20 \end{cases}$$

106 **Un coleccionista decide regalar un montón de sellos. A cada persona con la que se encuentra le da la mitad de los sellos que llevaba más uno, y se encuentra exactamente con 6 personas. Si al final regala todos los sellos, ¿cuántos sellos tenía el coleccionista?**

(País Vasco. Julio 2007. Bloque E. Cuestión E)

Sea x el número de sellos que tenía el coleccionista.

A la primera persona le da: $\dfrac{x}{2} + 1$

A la segunda:

$$\left(x - \left(\frac{x}{2} + 1\right)\right) : 2 + 1 = \left(\frac{x}{2} - 1\right) : 2 + 1 = \frac{x}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

A la tercera:

$$\left(x - \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\right) : 2 + 1 = \left(x - \frac{3x}{4} - \frac{3}{2}\right) : 2 + 1 = \frac{x}{8} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{x}{8} + \frac{1}{4}$$

A la cuarta:

$$\left(x - \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{x}{8} + \frac{1}{4}\right)\right) : 2 + 1 = \left(x - \frac{7x}{8} - \frac{7}{4}\right) : 2 + 1 =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{7}{8} + 1 = \frac{x}{16} + \frac{1}{8}$$

A la quinta:

$$\left(x-\left(\frac{x}{2}+1+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{1}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{8}\right)\right):2+1=\left(x-\frac{15x}{16}-\frac{15}{8}\right):2+1=$$
$$=\frac{x}{32}-\frac{15}{16}+1=\frac{x}{32}+\frac{1}{16}$$

A la sexta:

$$\left(x-\left(\frac{x}{2}+1+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{1}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{8}+\frac{x}{32}+\frac{1}{16}\right)\right):2+1=$$
$$=\left(x-\frac{31x}{32}-\frac{31}{16}\right):2+1=\frac{x}{64}-\frac{31}{32}+1=\frac{x}{64}+\frac{1}{32}$$

Entonces:

$$\frac{x}{2}+1+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{1}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{8}+\frac{x}{32}+\frac{1}{16}+\frac{x}{64}+\frac{1}{32}=x$$
$$\rightarrow \frac{63x}{64}+\frac{63}{32}=x \rightarrow 63x+126=64x \rightarrow x=126$$

107 **Julia y Pedro están hablando por teléfono para comprobar que los sistemas que han resuelto les dan los resultados. Solo hay uno donde los resultados son diferentes.**

Para Julia las soluciones de ese sistema son $x=\frac{\lambda+8}{7}$, $y=\frac{11\lambda+18}{7}$, $z=\lambda$,

mientras que para Pedro son $x=\frac{\mu+10}{11}$, $y=\mu$, $z=\frac{7\mu-18}{11}$. Después

de cerciorarse de que ambos han escrito el enunciado del problema de la misma manera, empiezan a pensar que quizás sean dos maneras diferentes de resolver el mismo sistema de ecuaciones. Decídelo tú.

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\lambda+8}{7} \\ y=\dfrac{11\lambda+18}{7} \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x=z+8 \\ 7y=11z+18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x-z=8 \\ 7y-11z=18 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\mu+10}{11} \\ y=\mu \\ z=\dfrac{7\mu-18}{11} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 11x=y+10 \\ 11z=7y-18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 11x-y=10 \\ 7y-11z=18 \end{array}\right\}$$

Si formamos un sistema con las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 7x-z=8 \\ 7y-11z=18 \\ 11x-y=10 \end{array}\right\}$$

comprobamos que ambas soluciones son correctas.

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $AP = PA$.

(Madrid. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 2)

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$PA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

$$AP = PA \to \left.\begin{array}{r} a+2c = a \\ b+2d = 2a+b \\ c = c \\ d = 2c+d \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \\ c = c \\ 0 = c \end{array}\right.$$

Las matrices P son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

2 Resuelve: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(Andalucía. Junio 2006. Opción B. Ejercicio 3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \to A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{5}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{5}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$, $B = (a \quad 2 \quad 3)$ y $C = (4 \quad 0 \quad 2)$.

a) Halle los valores x, y y z para los que A no tiene inversa.

b) Determine los valores de a para los que el sistema $BA = C$ tiene solución.

c) Resuelva el sistema anterior cuando sea posible.

(Asturias. Junio 2008. Bloque 1)

a) A no tiene inversa si $|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y\begin{vmatrix} x & y & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y(y - yz) = y^2(1 - z)$$

La inversa no existe si $y = 0$ o $z = 1$.

b) $BA = C \rightarrow (a \quad 2 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix} = (4 \quad 0 \quad 2) \rightarrow \left.\begin{aligned} ax + 2y + 3 &= 4 \\ ay + 3z &= 0 \\ ax + 2y + 3z &= 2 \end{aligned}\right\}$

$$\left.\begin{aligned} ax + 2y &= 1 \\ ay + 3z &= 0 \\ ax + 2y + 3z &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 3 & 0 \\ a & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a^2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3a + 6$$

- Si $a \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

c) Si $a \neq 0$:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 6 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{3a+6}{3a^2} = \frac{a+2}{a^2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3a \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = -\frac{3a}{3a^2} = -\frac{1}{a}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 2 & 2 \end{vmatrix} = a^2 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$$

4 Se considera el sistema $\left.\begin{aligned} x - y + z &= -1 \\ y + z &= 2a \\ x + 2z &= a^2 \end{aligned}\right\}$ donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del valor de a.

b) Resolver el sistema para $a = 0$.

c) Resolver el sistema para $a = 1$.

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba B. Problema 1)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & 2 & a^2 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) = 2$

- Si $a \neq 1 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 3 \neq$ Rango $(A) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

b) Para $a = 0 \rightarrow$ El sistema es incompatible, no tiene solución.

c) Para $a = 1$ consideramos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= -1 - z \\ y &= 2 - z \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} z = 1 - 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

5 Dado el sistema dependiente del parámetro α: $\left.\begin{aligned} \alpha x + y + z &= 1 \\ x + \alpha y + z &= 1 \\ x + y + \alpha z &= 1 \end{aligned}\right\}$

Se pide:

a) Determinar, razonadamente, los valores de α para los que el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

b) Resolver el sistema cuando es compatible determinado.

c) Obtener, razonadamente, la solución del sistema cuando $\alpha = 0$.

(C. Valenciana. Junio 2008. Bloque 1. Problema 1)

a) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ \alpha+2 & \alpha & 1 \\ \alpha+2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha+2)(\alpha-1)^2$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $\alpha = -2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $\alpha = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

b) Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \rightarrow |A| = (\alpha+2)(\alpha-1)^2$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{\alpha+2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{1}{\alpha+2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1}{\alpha+2}$$

c) Si $\alpha = 0 \rightarrow x = y = z = \dfrac{1}{2}$

6 **Cierto país importa 21.000 vehículos de tres marcas *A*, *B* y *C* al precio de 10.000, 15.000 y 20.000 € respectivamente. El total de la importación asciende a 332 millones de euros. Se ha observado que también hay 21.000 vehículos contando solamente los de la marca *B* y α veces los de la *A*.**

a) Plantea un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema en función del número de vehículos de cada marca.

b) Establece el número de vehículos de cada marca suponiendo $\alpha = 3$.

c) Estudia si existe algún valor α para el cual la situación no pueda darse en el campo de los números reales.

(Asturias. Junio 2007. Bloque 2)

a) Sean x, y, z los vehículos de cada marca. Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 21.000 \\ 10.000x + 15.000y + 20.000z = 332.000.000 \\ \alpha x + y = 21.000 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 21.000 \\ 10x + 15y + 20z = 332.000 \\ \alpha x + y = 21.000 \end{array}\right\}$$

b) Si $\alpha = 3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 21.000 \\ 10x + 15y + 20z = 332.000 \\ 3x + y = 21.000 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 21.000 \\ 10x + 5y = 88.000 \\ 3x + y = 21.000 \end{array}\right\}$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 21.000 \\ 10x + 5y = 88.000 \\ 5x = 17.000 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3.400 \\ y = 10.800 \\ z = 6.800 \end{array}\right.$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 20 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21.000 \\ 10 & 15 & 20 & 332.000 \\ \alpha & 1 & 0 & 21.000 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 20 \\ \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5\alpha - 10 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 21.000 \\ 10 & 15 & 332.000 \\ \alpha & 1 & 21.000 \end{vmatrix} = 17.000\alpha - 17.000$$

Si $\alpha = 2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible