
APUNTES DE MATEMÁTICAS

TEMA 4: VECTORES

1º BACHILLERATO

S3r4

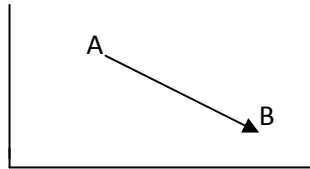
ÍNDICE

VECTORES EN EL PLANO..... 3
 Vector Fijo..... 3
 VECTOR LIBRE 3
 Operaciones con Vectores..... 3
 Suma de vectores..... 3
 Producto de un número por un vector 4
 Combinación lineal de vectores 4
 Vectores linealmente dependientes 5
 Vectores linealmente independientes 5
 Consecuencia de las definiciones anteriores:..... 5
 En el plano..... 5
 BASE DE VECTORES. 5
 Coordenadas de un vector respecto una base..... 6
 Base Ortonormal: 6
 OPERACIONES..... 6
 PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES. 6
 Propiedades del producto escalar 7
 MÓDULO DE UN VECTOR. 7
 VECTORES ORTOGONALES. 7
 VECTORES UNITARIOS. 8
 NORMALIZACIÓN DE UN VECTOR. 7
 Ángulo entre dos vectores 8
 Base Ortogonal 8
 Base Normada 8
 Base Ortonormal: 8
 OPERACIONES CON VECTORES EN AMBAS EXPRESIONES..... 8
 RELACIÓN DE PROBLEMAS TIPO:..... 10
 Ejercicios con solución..... 11
 EJERCICIOS RESUELTOS..... 12

VECTORES EN EL PLANO

Vector Fijo

Un vector fijo es un segmento orientado. El vector \vec{AB} es un vector de origen en el punto A y extremo en B. Conocemos su origen A y su final B. Se denota por \vec{AB} ,



Los elementos que definen un vector son tres:

Módulo: Longitud del segmento \vec{AB} . Y se escribe $|\vec{AB}|$

Dirección: Es la recta sobre la que se encuentra el vector.

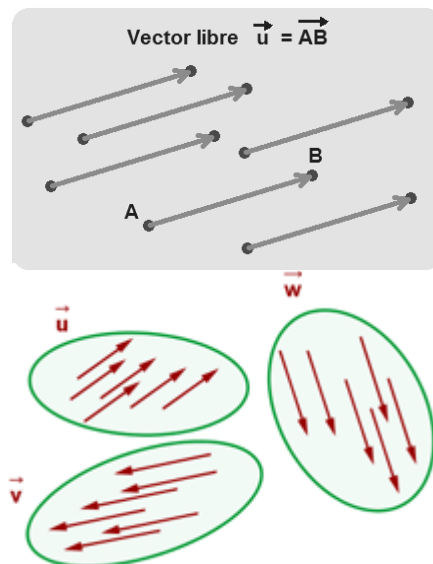
Sentido: Cada dirección tiene dos sentidos. Diremos que dos vectores fijos tienen igual sentido (teniendo igual dirección) si al unir los orígenes de los vectores ambos están en el mismo semiplano.

Vectores equivalentes: Son aquellos con igual módulo, dirección y sentido.

VECTOR LIBRE

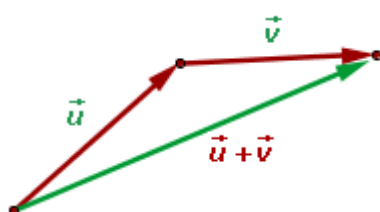
Vector libre: Es el conjunto de vectores que son equivalentes entre sí.

Un vector LIBRE representa un conjunto de vectores fijos con igual módulo, dirección y sentido.



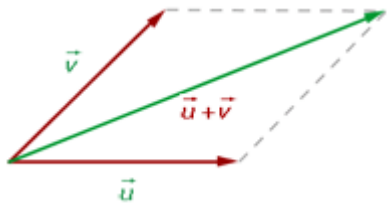
Representación de tres vectores libres

Operaciones con Vectores libres



Suma de vectores
Para sumar dos vectores libres \vec{u} y \vec{v} se escogen como representantes dos vectores tales que el extremo final de uno coincida con el extremo origen del otro vector.

Regla del paralelogramo

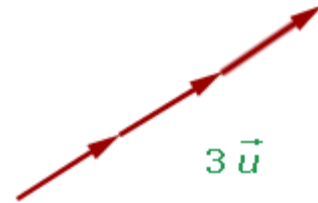


Se toman como representantes dos vectores con el origen en común, se trazan rectas paralelas a los vectores obteniéndose un paralelogramo cuya diagonal coincide con la suma de los vectores.

Producto de un número por un vector

El producto de un número k por un vector \vec{u} es otro vector:

- De **igual dirección** que el vector \vec{u} .
- Del **mismo sentido** que el vector \vec{u} si k es **positivo**.
- De **sentido contrario** del vector \vec{u} si k es **negativo**.
- De **módulo** $|k| |\vec{u}|$



Combinación lineal de vectores

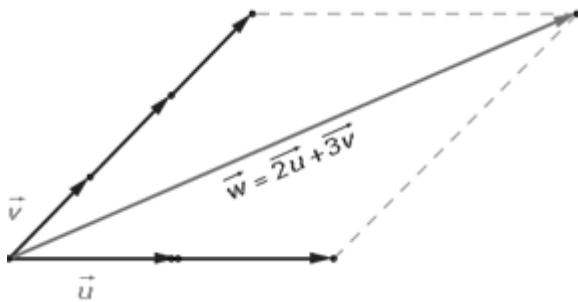
Una combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1; \vec{v}_2$ y \vec{v}_3 es una expresión de la forma: $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$ con a_1, a_2, a_3 números reales.

Se dice que \vec{u} se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1; \vec{v}_2$ y \vec{v}_3 si \vec{u} se puede escribir de la forma $\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$

a_1, a_2, a_3 son números reales

Ejemplo Una **combinación lineal** de dos o más vectores es el **vector** que se obtiene al **sumar** esos **vectores multiplicados** por sendos **escalares**.

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + \dots + a_n\vec{v}_n$$



de u y v

En este ejemplo w es una combinación lineal

Vectores linealmente dependientes

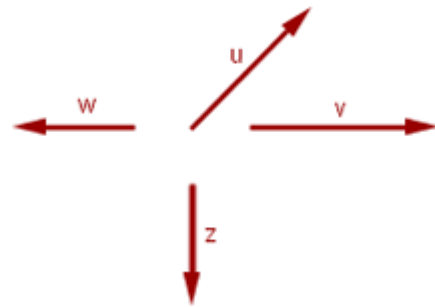
Un conjunto de vectores se dice que es **l.d.** cuando uno cualquiera se puede escribir como combinación lineal del resto.

Otra forma de definirlo es: Un conjunto de vectores se dice que l. d. cuando podemos escribir el vector $\vec{0}$ como combinación lineal de ellos sin que los coeficientes sean todos ceros

Vectores linealmente independientes

Un conjunto de vectores se dice que es **l.i.** cuando ninguno se puede escribir como combinación lineal del resto. O de

otra forma, si el vector cero $\vec{0}$ se puede expresar como combinación lineal de ellos todos los coeficientes son 0. Varios **vectores libres** son **linealmente dependientes** si ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los otros. O bien



$$\text{Si } a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Consecuencia de las definiciones anteriores:

El conjunto $\left\{ \vec{0}; \vec{a}; \vec{b}; \vec{c}; \dots \right\}$ es siempre l. dependiente ya que siempre podremos escribir el

vector $\vec{0}$ como combinación lineal de los demás $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} + \dots$

En el plano

- Gráficamente dos vectores son l.d. si son dos vectores de igual dirección.
- Gráficamente dos vectores son l.i. si son dos vectores de distinta dirección.
- Dados dos vectores l.i., si considero un tercero éste siempre se puede expresar como combinación lineal de los otros dos.
- Dados dos vectores l.i. en el plano forman una base.

BASE DE VECTORES.

Una base de vectores del plano está formada por dos vectores \vec{u} y \vec{v} , que son independientes y que a partir de combinaciones lineales de ellos, obtenemos todos los demás vectores del plano. Se denota de la siguiente forma:

$$B = \{ \vec{u}, \vec{v} \}$$

Y si \vec{z} es otro vector del plano, entonces $\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

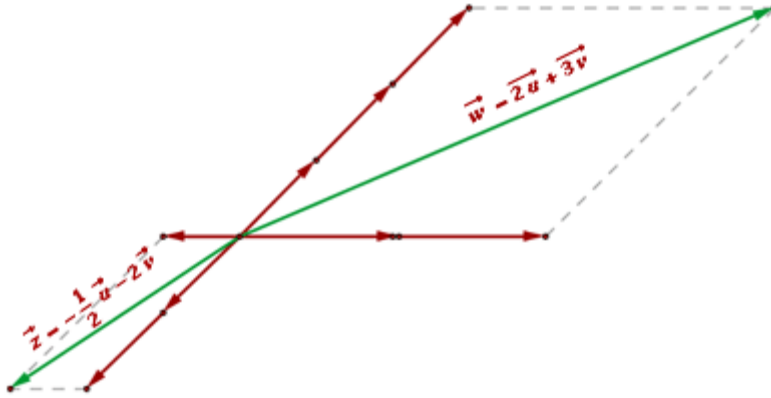
A partir de ahora, decir que todo vector puede venir expresado de dos formas distinta:

- A) en función de los vectores de una base: $\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v}$

- B) en coordenadas: $\vec{z} = (a, b)$

Coordenadas de un vector respecto una base

Si tengo la base $\left\{ \begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{matrix} \right\}$ a los escalares que aparecen al escribir dicho vector como combinación lineal de los elementos de la base. Estas coordenadas serán distintas respecto de cada base.



- $x = a\vec{u} + b\vec{v} \Rightarrow$ Las **coordenadas del vector** respecto a la **base** son: $\vec{x} = (a, b)$

Base Ortonormal:

Una base $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ se dice que es ortonormal si es ortogonal y los vectores tienen longitud 1, es decir, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ y vectores perpendiculares.

OPERACIONES.

Sean $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{v} = (c, d)$ dos vectores libres y sea α un número real, se definen las siguientes operaciones:

SUMA

$$1.- (a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d)$$

MULTIPLICACION POR ESCALAR

$$2.- \alpha \cdot (a, b) = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b)$$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores libres, cuyas coordenadas en una base ortonormal son $\vec{u} = (x_1, y_1)$ $\vec{v} = (x_2, y_2)$ (se llama producto escalar de ambos vectores al valor de la siguiente expresión:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha \quad \text{con } \alpha = \text{áng}(\vec{u}, \vec{v})$$

Si tengo una base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ entonces si hacemos los productos escalares de los vectores que forman esa base:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| |\vec{i}| \cos \alpha = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| |\vec{j}| \cos 90 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90 = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}| |\vec{j}| \cos \alpha = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{i} = |\vec{j}| |\vec{i}| \cos \alpha = 1 \cdot 1 \cdot \cos(-90) = 1$$

Propiedades del producto escalar

1. **Conmutativa:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2. **Distributiva** respecto a la suma vectorial: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

3. **Asociatividad** respecto al producto por un escalar k: $k(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (k \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Por lo tanto si \vec{u} y \vec{v} son dos vectores libres, cuyas coordenadas en una base ortonormal son $\vec{u} = (x_1, y_1)$ $\vec{v} = (x_2, y_2)$ el producto escalar de ambos vectores al valor de la siguiente expresión:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j})(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) = x_1 x_2 \vec{i} \cdot \vec{i} + x_1 y_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + y_1 x_2 \vec{j} \cdot \vec{i} + x_2 y_2 \vec{j} \cdot \vec{j} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Ejemplo

$$\vec{v} = (2;3) \text{ y } \vec{w} = (4;-5), \vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) = -7$$

Ejemplo Calcula el producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$ con los datos que se indican en cada caso.

a. $\vec{v} = (1;5)$ $|\vec{w}| = \sqrt{6}$ $\hat{\alpha} = 45^\circ$ c. $\vec{v} = (4;-1)$ $\vec{w} = (1;4)$

b. $|\vec{v}| = |\vec{w}| = 3$ $\hat{\alpha} = 210^\circ$ d. $|\vec{v}| = 4 \cdot |\vec{w}|$ $\hat{\alpha} = 90^\circ$

MÓDULO DE UN VECTOR.

Sea \vec{u} un vector libre, llamamos módulo del mismo a su longitud, y lo denotamos por $|\vec{u}|$

Si las coordenadas de \vec{u} en una base ortonormal son (x,y) entonces $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

VECTORES UNITARIOS.

Se llaman vectores unitarios a aquellos vectores que su $|\vec{u}| = 1$

NORMALIZACIÓN DE UN VECTOR.

Sea \vec{u} un vector no nulo y no unitario. Normalizar dicho vector es construir otro, a partir de él, que tenga la misma dirección, sentido y que su módulo sea 1. Dicho vector se construye de la siguiente forma:

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

VECTORES ORTOGONALES.

Dos vectores \vec{u} y \vec{v} se dicen que son ortogonales si su producto escalar es cero:
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\mathbf{u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0}$$

Demostración

$$\mathbf{u \perp v \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow u \cdot v = |u| |v| \cos\theta = 0}$$

y

$$\mathbf{u \cdot v = 0 \Rightarrow |u| |v| \cos\theta = 0 \Rightarrow \text{algún vector es nulo}$$

ó

$$\mathbf{\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2}$$

Ángulo entre dos vectores

Se define como el menor ángulo positivo determinado por ambos al estar aplicados en un origen común.

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

Base Ortogonal

Una base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ se dice que es ortogonal, si sus vectores lo son, es decir, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Base Normada

Una base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ se dice que es normada si los vectores que la forman son unitarios, es decir, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$.

Base Ortonormal:

Una base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ se dice que es ortonormal si es ortogonal y normada a la vez, es decir, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0, |\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$.

Todo vector que venga expresado en función de los vectores de una base ortonormal, puede expresarse mediante sus coordenadas.

Dado el vector $\vec{u}(a,b)$; las coordenadas de \vec{u} respecto de la base canónica serán siempre (a,b)

OPERACIONES CON VECTORES EN AMBAS EXPRESIONES.

Sea $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ una base de vectores. En ella consideramos los vectores

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} \quad \vec{y} = c\vec{u} + d\vec{v}$$

Base no ortonormal:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot (c\vec{u} + d\vec{v}) = a.c|\vec{u}|^2 + a.d\vec{u} \cdot \vec{v} + b.c\vec{u} \cdot \vec{v} + b.d|\vec{v}|^2$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(a\vec{u} + b\vec{v})(a\vec{u} + b\vec{v})}$$

Base ortonormal:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (a, b) \cdot (c, d) = a \cdot c + b \cdot d$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

RELACIÓN DE PROBLEMAS TIPO:

- 1.- Calcular el valor de m y n para que los vectores $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, m\right)$ y $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, n\right)$ sean unitarios.
- Hallar el valor de m para que los vectores $\vec{u} = (1, m)$ y $\vec{v} = (3, 4)$ sean ortogonales.
- Dados los vectores $\vec{x} = (2, 3)$ e $\vec{y} = (-1, 4)$,
 A) Normalizarlos.
 B) Hallar el ángulo que forman dichos vectores.
 C) Hallar un vector unitario y ortogonal al \vec{x} .
- Se sabe que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$, $\vec{u} = (a, 3)$ y $|\vec{v}| = 4$ y $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$. Hallar el valor de a
- 5.- Sea $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ una base ortonormal. En ella consideramos los vectores $\vec{x} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{y} = -\vec{u} + k\vec{v}$.
 Hallar k de forma que los vectores \vec{x} e \vec{y} sean ortogonales.
 Normalizar \vec{x} .
 Hallar un vector unitario y ortogonal al \vec{x} .
- Sea $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ una base ortogonal con $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$. Sean los mismos vectores del ejercicio anterior, hallar los mismos apartados.
- Idem, pero $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ una base normada y $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$.
- Idem, pero $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ una base con $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$ y $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$
- A un vector libre $(-5, 7)$ pertenece un vector fijo de origen en punto $A(3, -3)$. Determina el extremo y comprueba gráficamente el resultado.
- El vector fijo AB tiene la misma dirección que el vector fijo CD, sus sentidos son opuesto y la longitud de CD es tres veces la de AB. Determina las coordenadas de D sabiendo que $A(3, -2)$, $B(6, 1)$ y $C(5, 5)$. Haz una comprobación gráfica del resultado.
- Sean $U = \left\{ \begin{matrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{matrix} \right\}$ y $V = \left\{ \begin{matrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{matrix} \right\}$ dos bases en el plano. Sabemos, además que $\vec{u}_1 = -3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$; y $\vec{u}_2 = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$. ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{v} = \frac{5}{3}\vec{u}_1 - 7\vec{u}_2$ respecto de la base V? ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{u} = 3\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2$ respecto de la base U?
- ¿Forman base los vectores $(3, -2)$ y $(5, -1)$?
- Dibuja los vectores $(1, 3)$; $(3, 2)$; $(4, 5)$; $(4, 0)$; $(0, 4)$; $(3, 2)$; $(2, -3)$; $(-5, 4)$. ¿cuáles son perpendiculares entre sí?. Escribe el primero como combinación lineal de los dos siguientes.
- Sabemos que $3\vec{u} - 2\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}$
- ¿Puede afirmarse que \vec{u} depende linealmente de \vec{v} y \vec{w} ?
- ¿Puede afirmarse que \vec{w} depende linealmente de \vec{u} y \vec{v} ?

Ejercicios con solución

1. Un vector fijo tiene su origen en el punto $A(2, -1)$ y es equipolente al vector $\overrightarrow{CD}(-1, 4)$. Determina las coordenadas de su extremo y su módulo. **[Sol]** $B(1, 3)$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17}$.

2. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son los puntos $A(1, -3)$, $B(2, 2)$ y $C(-3, 0)$. Calcula las coordenadas del cuarto vértice. **[Sol]** $D(-4, -5)$

3. Halla el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en los siguientes casos:

a) $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = \frac{1}{4}$; $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$ b) $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = (2, -3)$; $(\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ$

c) $\vec{u} = \left(3, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{v} = (-1, 3)$ **[Sol]** a) $\frac{1}{4}$; b) $= \frac{3\sqrt{26}}{2}$; c) $-\frac{3}{2}$

4. Dados los vectores $\vec{u}(1, -2)$, $\vec{v}(3, 1)$ y $\vec{w}(2, 0)$,

- a) calcula las coordenadas del vector $2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$,
- b) expresa \vec{w} como combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} ,
- c) calcula los ángulos que forman dos a dos,
- d) halla un vector con la misma dirección que \vec{u} y de módulo $\sqrt{20}$,

[Sol] a) $\left(-\frac{1}{3}, -5\right)$; b) $\vec{w} = \frac{2}{7}\vec{u} + \frac{4}{7}\vec{v}$; c) $(\vec{u}, \vec{v}) = 81^\circ 52' 12''$; $(\vec{u}, \vec{w}) = 63^\circ 26' 6''$; $(\vec{v}, \vec{w}) = 18^\circ 26' 6''$; d) $\vec{x}_1 = (2, -4)$ y $\vec{x}_2 = (-2, 4)$.

5. Si $\vec{u}(2, a)$ y $\vec{v}(1, -4)$ determina el valor de a para que:

a) \vec{u} y \vec{v} sean perpendiculares; b) \vec{u} y \vec{v} tengan el mismo módulo,

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$. **[Sol]** a) $a = \frac{1}{2}$; b) $a = \pm\sqrt{13}$; c) $a = -2$

6. Sea $\vec{u}(3, -2)$. Calcula:

- a) un vector \vec{x} unitario y con la misma dirección que \vec{u} ,
- b) un vector \vec{z} unitario y perpendicular a \vec{u} .

[Sol] a) $\vec{x}_1 = \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ y $\vec{x}_2 = \left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$; b) $\vec{z}_1 = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$ y $\vec{z}_2 = \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$.

EJERCICIOS RESUELTOS

Dado el vector $\vec{u} = (2, -1)$, determinar dos vectores equipolentes a \vec{u} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , sabiendo que $A(1, -3)$ y $D(2, 0)$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad (2,1) = (x_B - 1, y_B + 3)$$

$$\begin{aligned} 2 &= x_B - 1 & x_B &= 3 \\ -1 &= y_B + 3 & y_B &= -4 \end{aligned} \quad B = (3, -4)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{CD} \quad (2,1) = (2 - x_C, 0 - y_C)$$

$$\begin{aligned} 2 &= 2 - x_C & x_C &= 0 \\ -1 &= -y_C & y_C &= 1 \end{aligned} \quad C = (0, 1)$$

Calcula el valor de k sabiendo que el módulo del vector $\vec{u} = (k, 3)$ es 5.

$$5 = \sqrt{k^2 + 9} \quad 25 = k^2 + 9 \quad k = \pm 4$$

Si \vec{v} es un vector de componentes (3,4), hallar un vector unitario de su misma dirección y sentido.

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \vec{w} = \frac{1}{5}(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Hallar las coordenadas del punto C, sabiendo que B(2, -2) es el punto medio de AC, A(-3, 1).

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{-3 + x_C}{2} & 4 &= -3 + x_C & x_C &= 7 \\ -2 &= \frac{1 + y_C}{2} & -4 &= 1 + y_C & y_C &= -5 \end{aligned} \quad C(7, -5)$$

Averiguar si están alineados los puntos: A(-2, -3), B(1, 0) y C(6, 5).

$$\frac{1+2}{6-1} = \frac{0+3}{5-0} \quad \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \quad \text{Sí}$$

Las coordenadas de los extremos del segmento AB son: A(2, -1) y B(8, -4). Hallar las coordenadas del punto C que divide al segmento AB en dos partes tales que AC es la mitad de CB.

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \quad (x - 2, y + 1) = \frac{1}{2}(8 - x, -4 - y)$$

$$x - 2 = \frac{1}{2}(8 - x) \quad x = 4$$

$$C(4, -2)$$

$$y + 1 = \frac{1}{2}(-4 - y) \quad y = -2$$

6. Estudiar si los vectores \overline{AB} y \overline{CD} son equipolentes siendo A(1, 3), B(4, 1), C(-1, 1), D(2, -1).

Solución.

Si dos vectores son equipolentes tienen igual módulo dirección y sentido, en definitiva son IGUALES. La relación de equipolencia es una relación de igualdad.

$$\vec{u} \approx \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$$

$$\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (4, 1) - (1, 3) = (4 - 1, 1 - 3) = (3, -2)$$

$$\overline{CD} = \vec{d} - \vec{c} = (2, -1) - (-1, 1) = (2 - (-1), -1 - 1) = (3, -2)$$

$$\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow \text{Vectores equipolentes.}$$

10. Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores

- a) $\{(4, 12), (2, 6)\}$
- b) $\{(1, 2), (3, 4)\}$
- c) $\{(1, 0), (0, 1)\}$
- d) $\{(1, 3), (5, 4), (-3, 7)\}$

Solución.

Un conjunto de n vectores es linealmente dependiente si existe n números, no todos nulos, que permiten plantear una combinación lineal entre ellos cuyo resultado sea el vector nulos. En el caso de

vectores de \mathbb{R}^2 , el máximo número de vectores linealmente independientes es dos, y dos vectores serán linealmente dependientes si son proporcionales.

Si \vec{u} y \vec{v} son linealmente dependientes se cumplirá:

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0} \quad \alpha \vec{u} = -\beta \vec{v} \quad \vec{u} = \frac{-\beta}{\alpha} \vec{v} \quad \vec{u} = K\vec{v}$$

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = K(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = Kv_1 \\ u_2 = Kv_2 \end{cases} : K = \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$$

- a. $\{(4, 12), (2, 6)\}: \frac{4}{2} = \frac{12}{6} \Rightarrow$ Linealmente dependientes.
- b. $\{(1, 2), (3, 4)\}: \frac{1}{3} \neq \frac{2}{4} \Rightarrow$ Linealmente independientes.
- c. $\{(1, 0), (0, 1)\}: \frac{1}{0} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow$ Linealmente independientes. Base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.
- d. $\{(1, 3), (5, 4), (-3, 7)\}: \Rightarrow$ Por ser más de dos, linealmente dependientes.

11. ¿Son $\vec{v} = (1,2)$ y $\vec{w} = (-3,1)$ linealmente dependientes?

Solución.

Para que dos vectores sean linealmente dependientes debe existir una combinación lineal no trivial entre ellos que sea cero.

$$\alpha_1 \vec{v} + \alpha_2 \vec{w} = 0$$

Operando con la expresión se demuestra que para que dos vectores sean dependientes, deben ser proporcionales.

$$\alpha_1 \vec{v} = -\alpha_2 \vec{w} \quad : \quad \vec{v} = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \vec{w}$$

α_1 y α_2 son constantes y su cociente también lo es, por tanto

$$\vec{v} = K \cdot \vec{w}$$

$$\vec{v}(v_1, v_2) = K \cdot \vec{w}(w_1, w_2) : \begin{cases} v_1 = K \cdot w_1 : K = \frac{v_1}{w_1} \\ v_2 = K \cdot w_2 : K = \frac{v_2}{w_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2}$$

$$\frac{1}{-3} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow \text{Vectores son linealmente independientes. Forma una base.}$$

13. Probar que $B = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2 \}$ es una base del plano vectorial, siendo $\vec{u}_1 = (4, 0)$ y $\vec{u}_2 = (5, 1)$.

Solución.

Para que un subconjunto de vectores sea base de un conjunto de vectores debe cumplir dos condiciones:

- i. Debe ser un sistema generador, es decir, los vectores que forman la base, deben ser capaces de generar cualquier vector del conjunto mediante combinación lineal
- ii. Los vectores que forman la base deben ser linealmente independientes.

i. Para demostrar que un subconjunto de vectores $\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2 \}$ es un sistema generador de un espacio vectorial (V^2) hay que expresar los coeficientes de la combinación lineal (α_1, α_2) en función de las componentes de un vector genérico ($\vec{v}(x, y)$) del espacio vectorial (V^2).

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2$$

$$(x, y) = \alpha_1 (4, 0) + \alpha_2 (5, 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 4\alpha_1 + 5\alpha_2 \\ y = \alpha_2 \end{cases}$$

Hay que despejar α_1 y α_2 en función de x e y

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 5\alpha_2 = x \\ \alpha_2 = y \end{cases} : 4\alpha_1 + 5y = x \quad : \quad \alpha_1 = \frac{x-5y}{4}$$

$\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2 \}$ es un sistema generador de V^2 , cualquier vector (x, y) de V^2 se puede expresar como combinación lineal de \vec{u}_1 y \vec{u}_2 , siendo los coeficientes de la combinación lineal:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{x-5y}{4} \\ \alpha_2 = y \end{cases}$$

ii. Por tratarse de vectores de V^2 , si no son proporcionales, serán linealmente independientes.
 $\vec{u}_1(4, 0) \neq k \cdot \vec{u}_2(5, 1) \Rightarrow$ Linealmente independientes.

\vec{u}_1 y \vec{u}_2 forman una base de V^2 .